Sistemas de unidades. Algunos factores de conversión comunes

En la tabla siguiente se presentan los sistemas de unidades de uso más común. El sistema mks también se conoce como *Sistema Internacional de Medidas* (abreviado Sistema SI). En este sistema se acostumbra usar las abreviaturas s (en lugar de seg) y N (en lugar de nt).

Sistema de unidades	Longitud	Masa	Tiempo	Fuerza
Sistema Cgs	centímetro (cm)	gramo (g)	segundo (s)	dina
Sistema Mks	metro (m)	kilogramo (kg)	segundo (s)	newton (nt)
Sistema de ingeniería	pie (ft)	slug	segundo (sec)	libra (lb)

1 pulgada (in) = 2.54000 51 cm

1 pie (ft) = 30.48006 12 cm

1 yarda (yd) = 3 ft = 91.44018 36 cm

1 milla terrestre (mi) = 5280 ft = 1.60935 km

1 milla náutica = 6080.2 ft = 1.8532 km

1 acre = 4840 yd^2 = 4046.773 m^2

1 mi^2 = 640 acres = 2.58999 87 km^2

1 onza de líquido = 29.5737 cm^3

1 galón de EU = 4 cuartos (liq.) = 8 pintas (liq,) = 128 fl oz = 3785.432 cm^3

1 galón británico imperial y canadiense = 1.20094 galones de EU = 4546.1 cm^3

1 slug = 14.59390 kg

1 libra (lb) = 4.448444 N

1 newton (N) = 10^5 dinas

1 unidad térmica británica (Btu) = 1054.8 joules

1 joule 10^7 ergs

1 caloría (cal) = 4.1840 joules

1 kilowatt-hora (kWh) = 3413 Btu = $3.6 \cdot 10^6$ joules

1 caballo de fuerza (hp) = 2545 Btu/h = 178.2 cal/s = 0.74570 kW

1 kilowatt (kW) = 1000 watts = 3413 Btu/h = 238.9 cal/s

°F = °C · 1.8 + 32

1° = 60' = 3600'' = 0.01745 radianes

Para mayores detalles, ver, por ejemplo, D. Halliday, R. Resnick y K. Krane, *Physics*, 4a. ed., Nueva York: Wiley. Ver también AN American National Standard, ASTM/IEEE Standard Metric Practice, Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., 345 East 47th Street, Nueva York, N.Y. 10017.



MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA INGENIERÍA

VOL. II

Prefacio

Propósito del libro. Este libro presenta a los estudiantes de ingeniería, física, matemáticas y ciencias de la computación las áreas de las matemáticas que, desde una perspectiva moderna, poseen mayor importancia en relación con problemas prácticos.

El contenido y carácter de las matemáticas necesarias en aplicaciones prácticas cambian con rapidez. Cada vez son más importantes el álgebra lineal —en particular las matrices— y los métodos numéricos para computadoras. La estadística y la teoría de las gráficas desempeñan papeles más sobresalientes. El análisis real (las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales) y el análisis complejo siguen siendo indispensables. El material del presente texto, dividido en dos volúmenes, está organizado consecuentemente en siete partes independientes (ver también el diagrama de la página siguiente):

- A Ecuaciones diferenciales ordinarias (capítulos 1-6)
- B Álgebra lineal, cálculo vectorial (capítulos 7-9)
- C Análisis de Fourier y ecuaciones diferenciales parciales (capítulos 10, 11)
- D Análisis complejo (capítulos 12-17)
- E Métodos numéricos (capítulos 18-20)
- F Optimización, gráficas (capítulos 21, 22)
- G Probabilidad y estadística (capítulos 23, 24)

A lo que sigue:

- Bibliografía (apéndice 1)
- Respuestas a los problemas de número impar (apéndice 2)
- Material complementario (apéndice 3)
- Demostraciones adicionales (apéndice 4)
- Tablas de funciones (apéndice 5)

Este libro ha contribuido a allanar el camino para el progreso actual y capacitará a los estudiantes para la situación actual y el futuro mediante un tratamiento moderno de las áreas mencionadas y de las ideas —algunas de ellas relacionadas con la computación— que dan lugar en la actualidad a cambios fundamentales; muchos métodos son ya obsoletos. Se hace hincapié en las ideas nuevas, por ejemplo, la estabilidad, la estimación de errores y problemas estructurales de algoritmos, por citar sólo algunas. Las tendencias se alimentan por la oferta y la demanda: oferta de nuevos y eficaces métodos matemáticos y numéricos aunados a los enormes recursos de las computadoras; la demanda de resolver problemas de complejidad y alcance crecientes, los cuales se originan de sistemas o procesos de producción cada vez más elaborados, de condiciones físicas extremas (por ejemplo, las de viajes espaciales), de materiales con propiedades inusuales (plásticos, aleaciones, superconductores, etc.) o de tareas por completo nuevas en el ámbito de las computadoras, la robótica y otros campos nuevos.

La tendencia general es clara. Los detalles son más difíciles de predecir, los estudiantes necesitan un conocimiento sólido de los principios, métodos y resultados

PARTE A	PARTE B	PARTE C
Capítulos 1–6	Capítulos 7–9	Capítulos 10, 11
Ecuaciones diferenciales ordinarias	Álgebra lineal. Cálculo vectorial	Análisis de Fourier. Ecuaciones diferenciales parciales
Capítulos 1–4 Material básico	Capítulo 7 Vectores y matrices	Capítulo 10 Análisis de Fourier
Capítulo 5 Soluciones en series de potencias. Funciones especiales; Capítulo 6 Transformada de Laplace	Capítulo 8 Cálculo diferencial vectorial	Capítulo 11 Ecuaciones diferenciales parciales
	Capítulo 9 Cálculo integral vectorial	

PARTE D	PARTE E	PARTE F
Capítulos 12–17	Capítulos 18–20	Capítulos 21, 22
Análisis complejo	Métodos numéricos	Optimización. Gráficas
Capítulo 12–15 Material básico	Capítulo 18 Métodos numéricos generales; Capítulo 19 Métodos para álgebra lineal; Capítulo 20 Métodos para ecuaciones diferenciales	Capítulo 21 Programa lineal; Capítulo 22 Gráficas. Optimización combinatoria
Capítulo 16 Mapeo conforme		
Capítulo 17 Teoría del potencial		

PARTE G
Capítulos 23, 24
Probabilidad. Estadística
Capítulo 23 Teoría de la probabilidad
Capítulo 24 Estadística matemática

Partes del libro y capítulos correspondientes

básicos, así como una percepción clara de cuál es el campo de acción de las matemáticas para ingeniería en las tres fases de la solución de problemas:

Modelado: Traducir la información y los datos físicos o de otras áreas a una forma matemática, a un *modelo* matemático (una ecuación diferencial, un sistema de ecuaciones o alguna otra expresión matemática).

Solución: Obtener la solución seleccionando y aplicando los métodos matemáticos apropiados y, en la mayoría de los casos, realizando los cálculos numéricos en una computadora. Esta es la tarea principal de este libro.

Interpretación: Entender el significado e implicaciones de la solución matemática del problema original en términos de física —o del campo en donde se origine el problema.

No tendría sentido sobrecargar a los estudiantes con todo tipo de detalles que sólo se usarán de vez en cuando. Más bien, es importante que los estudiantes se familiaricen con las formas de pensar matemáticamente, que entiendan la necesidad de aplicar métodos matemáticos a problemas de ingeniería, que se den cuenta de que las matemáticas son una ciencia sistemática construida a partir de un número relativamente reducido de conceptos básicos que incluye eficaces principios unificadores y lleguen a una comprensión firme de la interrelación entre la teoría, los cálculos y la experimentación.

Los acelerados avances mencionados arriba han redundado en la incorporación de diversos cambios y nuevas características en la presente edición de este libro.

En particular, se han redactado de nuevo varias secciones de una manera más detallada y pausada, para hacer más sencillo el libro.

Lo anterior también ha llevado a un mejor equilibrio entre aplicaciones, ideas algorítmicas, ejemplos resueltos y teoría.

Los principales cambios en esta edición

1. NUEVOS EJERCICIOS DE LAS SECCIONES. Ahora guardan una relación más estrecha con los ejemplos resueltos en el texto.
2. REORGANIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES. Las ecuaciones de orden n se ampliaron en un capítulo aparte. Los sistemas se ampliaron y actualizaron de manera sustancial.
3. REORGANIZACIÓN COMPLETA DEL ÁLGEBRA LINEAL:

   Vectores y matrices (capítulo 7)

   Álgebra vectorial y cálculo diferencial en R^3 (capítulo 8)

   Cálculo integral vectorial en R^3 (capítulo 9)

Cambios adicionales y nuevas características de los capítulos
Ecuaciones diferenciales ordinarias (capítulos 1-6)

- *De primer orden* (capítulo 1). Presentación de los factores de integración en una manera más sistemática (sección 1.6); inclusión de las ecuaciones de Riccati y Clairaut (sección 1.7); inclusión de problemas diversos (sección 1.7, etc.).

- *De segundo orden* (capítulo 2). Mayor fluidez del material al reordenarlo—toda la teoría se encuentra ahora en secciones consecutivas (secciones 2.7, 2.8), seguida por los dos métodos principales para encontrar soluciones particulares (secciones 2.9, 2.10) y por las aplicaciones básicas de oscilaciones forzadas (secciones 2.11, 2.12).
- *De orden n* (capítulo 3). Separación del material de las ecuaciones de segundo orden y colocación en un capítulo aparte, con una ampliación del material; la presentación sigue en la medida de lo posible el esquema del capítulo 2.
- *Sistemas* (capítulo 4). Redacción por completo nueva y ampliación del tema, con el uso sistemático de matrices 2×2 (las cuales se repasan en la sección 4.0).
- *Método de Frobenius* (capítulo 5). Ejemplos más sencillos; ampliación de la discusión de las funciones de Bessel (sección 5.6). Ampliación de la discusión del desarrollo de eigenfunciones (sección 5.9).
- *Transformada de Laplace* (capítulo 6). Inclusión de la función de transferencia (sección 6.2); inclusión de la ecuación de Laguerre (sección 6.5); ampliación de la discusión de las entradas discontinuas y las técnicas de convolución (sección 6.6); mejor tratamiento de las fracciones parciales (sección 6.7).

Álgebra lineal, cálculo vectorial (capítulos 7-9)

- *Vectores y matrices en R^n*, se encuentran ahora antes (capítulo 7), seguidos de
- *Álgebra vectorial, geometría y cálculo diferencial en R^3* (capítulo 8). Seguidos de
- *Cálculo integral vectorial* (capítulo 9; la independencia de la trayectoria aparece ahora al principio en la sección 9.2).

Esta nueva disposición del material ofrece una mejor fluidez.

Análisis de Fourier y ecuaciones diferenciales parciales (capítulos 10,11)

- *Series e integrales de Fourier* (capítulo 10). Nueva sección sobre series complejas de Fourier (sección 10.6); nueva discusión del espectro de la amplitud de la integral de Fourier y su significado físico (secciones 10.9, 10.11).
- *Ecuaciones diferenciales parciales* (capítulo 11). Se amplía el tema 2 de la solución de d'Alembert (sección 11.4); más problemas con valores en la frontera (sección 11.5, etc.); material tomado de los ejercicios y desarrollado en el texto, a fin de ofrecer más ayuda al estudiante.

Análisis complejo (capítulos 12-17)

- *Números complejos* (sección 12.1), se introducen ahora con aspectos algebraicos y geométricos cuidadosamente aclarados.
- *Series* (capítulo 14). Secciones de repaso combinados en una sola (sección 14.1); se hace opcional la convergencia uniforme de series *generales* (sección 14.6).

- *Mapeos* (capítulos 16, 17). Análisis simplificado de algunos de los problemas más complicados.

Métodos numéricos (capítulos 18-20)

- *Aspectos y algoritmos relacionados con las computadoras*, se hace aún más hincapié en ellos.
- *Actualización* y análisis simplificado en los tres capítulos; más detalles sobre la estabilidad (sección 18.1, etc.); un mejor análisis de los errores de interpolación (sección 18.3); más sobre interpolación segmentaria (splines) (sección 18.4) y mejoramiento de la convergencia por desplazamiento (sección 19.8).

Apéndices

- **Apéndice 1** (bibliografía), actualizado.
- **Apéndice 4**, reúne las demostraciones opcionales que se encontraban dispersas.

Sugerencias para cursos: cuatro semestres consecutivos

El material puede tomarse en cualquier orden y es adecuado para cuatro cursos consecutivos de un semestre, con 3 a 5 horas por semana:

Primer semestre.	Ecuaciones diferenciales ordinarias (capítulos 1-6)
Segundo semestre.	Álgebra lineal y análisis vectorial (capítulos 7-9)
Tercer semestre.	Análisis complejo (capítulos 12-17)
Cuarto semestre.	Métodos numéricos (capítulos 18-20)

En cuanto a los capítulos restantes, ver abajo. Obviamente se puede intercambiar el material; por ejemplo, los métodos numéricos podrían preceder al análisis complejo, etc.

Sugerencias para cursos: cursos independientes de un semestre

Esta obra también se presta para varios cursos independientes de un semestre con 3 horas a la semana; por ejemplo,

Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias (capítulos 1-3)
Transformada de Laplace (capítulo 6)
Álgebra y cálculo vectoriales (capítulos 8, 9)
Matrices y sistemas de ecuaciones lineales (capítulo 7)
Series de Fourier y ecuaciones diferenciales parciales (capítulos 10, 11, secciones 20.4 - 20.7)
Introducción al análisis complejo (capítulos 12-15)
Análisis numérico (capítulos 18, 20)
Álgebra lineal numérica (capítulo 19)
Optimización (capítulos 21, 22)

Gráficas y optimización combinatoria (capítulo 22)

Probabilidad y estadística (capítulos 23, 24)

Características generales de esta edición

La selección, ordenación y presentación del material se han hecho con el mayor cuidado, con base en mi experiencia pasada y actual como docente, investigador y asesor. Algunas de las características sobresalientes de la obra son:

El libro es independiente, excepto por algunos puntos marcados con toda claridad porque una demostración rebasaría el nivel de un libro como éste y en su lugar se ofrece una referencia bibliográfica.

Ocultar las dificultades o hacer una simplificación excesiva no sería de ayuda para los estudiantes.

La presentación es detallada, con el fin de evitar incomodar al lector con referencias frecuentes para que consulte los detalles en otros libros.

Los ejemplos son sencillos, a fin de conseguir que el libro se presente para la enseñanza —¿por qué escoger ejemplos complicados cuando los sencillos son tan ilustrativos, o incluso mejores?

La notación es moderna y convencional, para ayudar a que los estudiantes lean artículos en revistas o en otros libros modernos y entiendan otros cursos con orientación matemática.

Los capítulos son en gran medida independientes, lo que permite gran flexibilidad en la enseñanza de cursos especiales (ver arriba).

Agradecimientos

Me encuentro en deuda con muchos de mis antiguos profesores, colegas y estudiantes que directa o indirectamente me han ayudado en la elaboración de este libro, en particular, de la presente edición del mismo. Varias partes del manuscrito se distribuyeron en mis clases en forma mimeografiada y volvieron a mí con recomendaciones para mejorarlas. Las discusiones con ingenieros y matemáticos (así como los comentarios escritos) me fueron de gran ayuda; quisiera mencionar en especial a los profesores S.L. Campbell, J.T. Cargo, P.L. Chambré, V.F. Connolly, A. Cronheim, J. Delany, J.W. Dettman, D. Dicker, D. Ellis, W. Fox, R.G. Helsel, V.W. Howe, W.N. Huff, J. Keener, E.C. Klipple, V. Komkow, H. Kuhn, G. Lamb, H.B. Mann, I. Marx, K. Millet, J.D. Moore, W.D. Munroe, J.N. Ong, Jr., P.J. Pritchard, H.-W.Pu, W.O. Ray, P.V. Reichelderfer, J.T. Scheick, H.A. Smit, J.P. Spencer, J. Todd, H. Unz, A.L. Villone, H.J. Weiss, A. Wilansky, C.H. Wilcox, L. Zia, A.D. Ziebur, todos ellos estadounidenses; a los profesores H.S.M. Coxeter y R. Vaillancourt y al señor H. Kreyszig (cuyo dominio de las computadoras fue de gran ayuda en los capítulos18-20) de Canadá, y a los profesores H. Florian, M. Kracht, H. Unger, H. Wielandt, todos ellos de Europa. Aquí sólo me es posible ofrecer un reconocimiento insuficiente de mi aprecio.

Asimismo, quisiera agradecer a John Wiley and Sons, al señor y a la señora E.A. Burke de Hudson River Studio y a General Graphic Services su eficiente colaboración y esmero en la preparación de la presente edición.

ERWIN KREYSZIG

Contenido

Volumen 1

PARTE A. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS 21

CAPÍTULO 1

Ecuaciones diferenciales de primer orden 23

1.1 Conceptos e ideas básicas, 23
1.2 Ecuaciones diferenciales separables, 32
1.3 Modelado: ecuaciones separables, 35
1.4 Reducción a la forma separable. *Opcional*, 43
1.5 Ecuaciones diferenciales exactas, 46
1.6 Factores integrantes, 50
1.7 Ecuaciones diferenciales lineales, 53
1.8 Modelado: circuitos eléctricos, 61
1.9 Trayectorias ortogonales de curvas. *Opcional*, 67
1.10 Soluciones aproximadas: campos direccionales, iteración, 72
1.11 Existencia y unicidad de las soluciones, 77

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 1, 82
Resumen del capítulo 1, 85

CAPÍTULO 2

Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden 87

2.1 Ecuaciones lineales homogéneas, 88
2.2 Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes, 94
2.3 Caso de raíces complejas. Función exponencial compleja, 98
2.4 Operadores diferenciales. *Opcional*, 103
2.5 Modelado: oscilaciones libres (sistema masa-resorte), 105
2.6 Ecuación de Euler-Cauchy, 115
2.7 Teoría de existencia y unicidad. Wronskiano, 119
2.8 Ecuaciones no homogéneas, 125
2.9 Solución por coeficientes indeterminados, 129
2.10 Solución por variación de parámetros, 132
2.11 Modelado: oscilaciones forzadas. Resonancia, 136
2.12 Modelado de circuitos eléctricos, 143

2.13 Método complejo para obtener soluciones particulares. *Opcional*, 149

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 2, 152
Resumen del capítulo 2, 154

CAPÍTULO 3

Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior 157

3.1 Ecuaciones lineales homogéneas, 157
3.2 Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes, 165
3.3 Ecuaciones no homogéneas, 171
3.4 Método de coeficientes indeterminados, 173
3.5 Método de variación de parámetros, 176

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 3, 180
Resumen del capítulo 3, 181

CAPÍTULO 4

Sistemas de ecuaciones diferenciales. Plano fase, estabilidad 183

4.0 Introducción: vectores, matrices, 183
4.1 Ejemplos introductorios, 190
4.2 Conceptos y teoría básicos, 195
4.3 Sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes, 198
4.4 Plano fase, puntos críticos, estabilidad, 208
4.5 Métodos del plano fase para sistemas no lineales, 212
4.6 Sistemas lineales no homogéneos, 219

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 4, 226
Resumen del capítulo 4, 228

CAPÍTULO 5

Soluciones en series de potencias de las ecuaciones diferenciales. Funciones especiales 231

5.1 Método de las series de potencias, 232
5.2 Teoría del método de las series de potencias, 236
5.3 Ecuación de Legendre. Polinomios de Legendre $P_n(x)$, 243
5.4 Método de Frobenius, 249
5.5 Ecuación de Bessel. Funciones de Bessel $J_\nu(x)$, 260
5.6 Propiedades adicionales de $J_\nu(X)$, 267
5.7 Funciones de Bessel de segunda clase, 272
5.8 Problemas de Sturm-Liouville. Ortogonalidad, 277
5.9 Desarrollo de eigenfunciones, 285

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 5, 295
Resumen del capítulo 5, 296

CAPÍTULO 6

Transformada de Laplace 299

6.1 Transformada de Laplace. Transformada inversa. Linealidad, 300
6.2 Transformadas de derivadas e integrales, 306
6.3 Traslación S, traslación t. Función escalón unitario, 314
6.4 Aplicaciones adicionales. Función delta de Dirac, 323
6.5 Derivación e integración de transformadas, 328
6.6 Convolución. Ecuaciones integrales, 333
6.7 Fracciones parciales. Sistemas de ecuaciones diferenciales, 338
6.8 Funciones periódicas. Aplicaciones adicionales, 349
6.9 Transformada de Laplace: fórmulas generales, 358
6.10 Tabla de transformadas de Laplace, 359

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 6, 361
Resumen del capítulo 6, 364

PARTE B. ÁLGEBRA LINEAL, CÁLCULO VECTORIAL 367

CAPÍTULO 7

Álgebra lineal: matrices, vectores, determinantes 369

7.1 Conceptos básicos, 370
7.2 Adición de matrices, multiplicación por escalares, 373
7.3 Multiplicación de matrices, 377
7.4 Sistemas de ecuaciones lineales. Eliminación de Gauss, 388
7.5 Independencia lineal. Espacio vectorial. Rango de una matriz, 398
7.6 Sistemas lineales: propiedades generales de las soluciones, 405
7.7 Inversa de una matriz, 409
7.8 Determinantes, 415
7.9 El rango en términos de determinantes. Regla de Cramer, 425
7.10 Eigenvalores, eigenvectores, 432
7.11 Algunas aplicaciones de problemas de eigenvalores, 438
7.12 Matrices simétrica, antisimétrica y ortogonal, 443
7.13 Matrices hermitiana, antihermitiana y unitaria, 447
7.14 Propiedades de los eigenvectores. Diagonalización, 455
7.15 Espacios vectoriales, espacios con producto interior. Transformaciones lineales. *Opcional*, 462

Preguntas y problemas de repaso del capítulo 7, 470
Resumen del capítulo 7, 473

CAPÍTULO 8

Cálculo diferencial vectorial. Gradiente, divergencia, rotacional 477

8.1 Álgebra vectorial en espacios bidimensionales y tridimensionales, 478
8.2 Producto interior (producto punto), 486

8.3 Producto vectorial (producto cruz), 493
8.4 Funciones y campos vectoriales y escalares. Derivadas, 502
8.5 Curvas. Tangentes. Longitud de arco, 508
8.6 Velocidad y aceleración, 516
8.7 Curvatura y torsión de una curva. *Opcional*, 521
8.8 Repaso de cálculo en varias variables. *Opcional*, 524
8.9 Gradiente de un campo escalar. Derivada direccional, 527
8.10 Divergencia de un campo vectorial, 534
8.11 Rotacional de un campo vectorial, 538
8.12 Gradiente, divergencia y rotacional en coordenadas curvilíneas. *Opcional*, 540

Preguntas y problemas de repaso del capítulo 8, 547
Resumen del capítulo 8, 549

CAPÍTULO 9

Cálculo integral vectorial. Teoremas sobre integrales 553

9.1 Integrales de línea, 553
9.2 Integrales de línea independientes de la trayectoria, 561
9.3 Del cálculo: integrales dobles. *Opcional*, 569
9.4 Teorema de Green en el plano, 576
9.5 Superficies para integrales de superficie, 584
9.6 Integrales de superficie, 589
9.7 Integrales triples. Teorema de Gauss de la divergencia, 600
9.8 Aplicaciones adicionales del teorema de la divergencia, 606
9.9 Teorema de Stokes, 612

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 9, 619
Resumen del capítulo 9, 621

APÉNDICES

Apéndice 1 Bibliografía, 623
Apéndice 2 Respuestas a los problemas impares, 629
Apéndice 3 Material auxiliar, 659
A3.1 Fórmulas para funciones especiales, 659
A3.2 Derivadas parciales, 665
A3.3 Sucesiones y series, 668
Apéndice 4 Demostraciones adicionales, 671
Apéndice 5 Tablas, 687

ÍNDICE 703

Volumen 2

PARTE C. ANÁLISIS DE FOURIER Y ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES 21

CAPÍTULO 10

Series, integrales y transformadas de Fourier 23

10.1 Funciones periódicas. Series trigonométricas, 24
10.2 Series de Fourier, 26
10.3 Funciones de cualquier periodo $p = 2L$, 35
10.4 Funciones pares e impares, 38
10.5 Desarrollos de medio rango, 43
10.6 Series complejas de Fourier. *Opcional*, 46
10.7 Oscilaciones forzadas, 49
10.8 Aproximación por polinomios trigonométricos, 53
10.9 Integrales de Fourier, 57
10.10 Transformadas de Fourier de cosenos y de senos, 66
10.11 Transformada de Fourier, 70
10.12 Tablas de transformadas, 79

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 10, 82
Resumen del capítulo 10, 83

CAPÍTULO 11

Ecuaciones diferenciales parciales 87

11.1 Conceptos básicos, 88
11.2 Modelado: cuerda vibratoria, ecuación de onda, 90
11.3 Separación de variables, uso de series de Fourier, 92
11.4 Solución de D'Alembert de la ecuación de onda, 101
11.5 Ecuación del calor: solución por series de Fourier, 107
11.6 Ecuación del calor: solución por integrales de Fourier, 119
11.7 Modelado: membrana, ecuación bidimensional de onda, 124
11.8 Membrana rectangular. Uso de series dobles de Fourier, 127
11.9 Laplaciano en coordenadas polares, 135
11.10 Membrana circular. Uso de la serie de Fourier-Bessel, 138
11.11 Ecuación de Laplace. Potencial, 145
11.12 Laplaciano en coordenadas esféricas. Ecuación de Legendre, 149
11.13 Solución por transformadas de Laplace, 155
11.14 Solución por transformadas de Fourier, 159

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 11, 164
Resumen del capítulo 11, 166

PARTE D. ANÁLISIS COMPEJO 169

CAPÍTULO 12

Números complejos. Funciones analíticas complejas 171

12.1 Números complejos. El plano complejo, 171
12.2 Forma polar de los números complejos. Potencias y raíces, 177
12.3 Curvas y regiones en el plano complejo, 184
12.4 Límite. Derivada. Función analítica, 187
12.5 Ecuaciones de Cauchy-Riemann, 192
12.6 Función exponencial, 198
12.7 Funciones trigonométricas, funciones hiperbólicas, 202
12.8 Logaritmo. Potencia general, 206
12.9 Mapeos por funciones especiales. *Opcional,* 210

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 12, 214
Resumen del capítulo 12, 216

CAPÍTULO 13

Integración compleja 219

13.1 Integral de línea en el plano complejo, 219
13.2 Dos métodos de integración. Ejemplos, 223
13.3 Teorema de la integral de Cauchy, 230
13.4 Existencia de la integral indefinida, 238
13.5 Fórmula de la integral de Cauchy, 240
13.6 Derivadas de funciones analíticas, 244

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 13, 249
Resumen del capítulo 13, 251

CAPÍTULO 14

Series de potencias, series de Taylor, series de Laurent 253

14.1 Sucesiones, series y pruebas de convergencia, 254
14.2 Series de potencias, 263
14.3 Funciones dadas por series de potencias, 269
14.4 Series de Taylor, 274
14.5 Series de potencias: métodos prácticos, 281
14.6 Convergencia uniforme, 285
14.7 Series de Laurent, 294
14.8 Singularidades y ceros. Infinito, 302

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 14, 308
Resumen del capítulo 14, 309

CAPÍTULO 15

Integración por el método de residuos 311

15.1 Residuos, 311
15.2 Teorema del residuo, 317
15.3 Evaluación de integrales reales, 320
15.4 Otros tipos de integrales reales, 324

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 15, 331
Resumen del capítulo 15, 333

CAPÍTULO 16

Mapeo conforme 335

16.1 Mapeo conforme, 335
16.2 Transformaciones fraccionarias lineales, 340
16.3 Transformaciones fraccionarias lineales especiales, 345
16.4 Mapeos por medio de otras funciones, 351
16.5 Superficies de Riemann, 356

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 16, 360
Resumen del capítulo 16, 362

CAPÍTULO 17

Análisis complejo aplicado a la teoría del potencial 363

17.1 Campos electrostáticos, 364
17.2 Uso del mapeo conforme, 369
17.3 Problemas de calor, 373
17.4 Flujo bidimensional de fluidos, 378
17.5 Fórmula de la integral de Poisson, 385
17.6 Propiedades generales de las funciones armónicas, 390

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 17, 394
Resumen del capítulo 17, 395

PARTE E. MÉTODOS NUMÉRICOS 397

CAPÍTULO 18

Métodos numéricos en general 399

18.1 Introducción, 400
18.2 Solución de ecuaciones por iteración, 407
18.3 Interpolación, 419

18.4 Interpolación segmentaria (splines), 432
18.5 Integración y derivación numéricas, 440

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 18, 451
Resumen del capítulo 18, 453

CAPÍTULO 19

Métodos numéricos en álgebra lineal 457

19.1 Sistemas lineales: eliminación de Gauss, 457
19.2 Sistemas lineales: factorización LU, inversión de matrices, 466
19.3 Sistemas lineales: solución por iteración, 472
19.4 Sistemas lineales: mal acondicionamiento, normas, 479
19.5 Métodos de mínimos cuadrados, 486
19.6 Problemas de eigenvalores de matrices: introducción, 490
19.7 Inclusión de eigenvalores de matrices, 493
19.8 Eigenvalores por iteración (método de las potencias), 499
19.9 Deflación de una matriz, 503
19.10 Tridiagonalización de Householder y factorización QR, 506

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 19, 517
Resumen del capítulo 19, 519

CAPÍTULO 20

Métodos numéricos para ecuaciones diferenciales 523

20.1 Métodos para ecuaciones diferenciales de primer orden, 523
20.2 Métodos de pasos múltiples, 534
20.3 Métodos para ecuaciones diferenciales de segundo orden, 538
20.4 Métodos numéricos para ecuaciones diferenciales parciales elípticas, 545
20.5 Problemas de Neumann y mixto. Frontera irregular, 555
20.6 Métodos para ecuaciones parabólicas, 560
20.7 Métodos para ecuaciones hiperbólicas, 566

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 20, 569
Resumen del capítulo20, 572

PARTE F. OPTIMIZACIÓN, GRÁFICAS 575

CAPÍTULO 21

Optimización no restringida, programación lineal 577

21.1 Conceptos básicos. Optimización no restringida, 577
21.2 Programación lineal, 581

21.3 Método simplex, 585
21.4 Método simplex: degeneración, dificultades en el inicio, 590

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 21, 596
Resumen del capítulo 21, 597

CAPÍTULO 22

Gráficas y análisis combinatorio 599

22.1 Gráficas y gráficas dirigidas (digráficas), 599
22.2 Problemas de la trayectoria más corta. Complejidad, 605
22.3 Principio de optimalidad de Bellman. Algoritmo de Dijkstra, 611
22.4 Árboles de expansión más cortos. Algoritmo codicioso de Kruskal, 615
22.5 Algoritmo de Prim para árboles de expansión más cortos, 620
22.6 Redes. Trayectorias de aumento de flujo, 623
22.7 Algoritmo de Ford-Fulkerson para flujo máximo, 630
22.8 Problemas de asignación. Apareamiento bipartita, 635

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 22, 642
Resumen del capítulo 22, 644

PARTE G. PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA 647

CAPÍTULO 23

Teoría de probabilidad 649

23.1 Experimentos, resultados, eventos, 649
23.2 Probabilidad, 653
23.3 Permutaciones y combinaciones, 661
23.4 Variables aleatorias, distribuciones de probabilidad, 666
23.5 Media y variancia de una distribución, 674
23.6 Distribuciones binomial, de Poisson e hipergeométrica, 679
23.7 Distribución normal, 686
23.8 Distribuciones de varias variables aleatorias, 692

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 23, 702
Resumen del capítulo 23, 704

CAPÍTULO 24

Estadística matemática 707

24.1 Naturaleza y objetivos de la estadística, 708
24.2 Muestreo aleatorio. Números aleatorios, 709
24.3 Procesamiento de muestras, 711
24.4 Media y variancia de la muestra, 719

24.5 Estimación de parámetros, 722
24.6 Intervalos de confianza, 725
24.7 Prueba de hipótesis. Decisiones, 735
24.8 Control de calidad, 747
24.9 Muestreo de aceptación, 753
24.10 Bondad de ajuste. Prueba χ^2, 758
24.11 Pruebas no paramétricas, 761
24.12 Pares de mediciones. Ajuste de rectas, 765

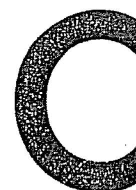
Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 24, 770
Resumen del capítulo 24, 773

APÉNDICES

Apéndice 1 Bibliografía, 777
Apéndice 2 Respuestas a los problemas impares, 783
Apéndice 3 Material auxiliar, 817
A3.1 Fórmulas para funciones especiales, 817
A3.2 Derivadas parciales, 823
A3.3 Sucesiones y series, 826
Apéndice 4 Demostraciones adicionales, 829
Apéndice 5 Tablas, 837

ÍNDICE 853

Parte



ANÁLISIS DE FOURIER Y ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

Capítulo 10 Series, integrales y transformadas de Fourier
Capítulo 11 Ecuaciones diferenciales parciales

Son muy comunes los fenómenos periódicos en la física y en sus aplicaciones en la ingeniería y es un importante problema práctico representar las funciones periódicas correspondientes en términos de funciones periódicas simples tales como el seno y el coseno. Esto lleva a las **series de Fourier**, cuyos términos son funciones de senos y de cosenos. Su introducción por Fourier (después de los trabajos realizados por Euler y Daniel Bernoulli) fue uno de los acontecimientos más importantes en el desarrollo de las matemáticas aplicadas. El capítulo 10 se ocupa principalmente de las series de Fourier. Las ideas y técnicas correspondientes pueden generalizarse a fenómenos no periódicos. Esto lleva a las **integrales de Fourier** y a las **transformadas de Fourier** (secciones 10.9-10.11) y un nombre genérico para esta área en su conjunto es **análisis de Fourier**.

El capítulo 11 se ocupa de las **ecuaciones diferenciales parciales** más importantes de la física y la ingeniería. En esta área el análisis de Fourier tiene sus aplicaciones más importantes, como herramienta básica para la solución de problemas con valores en la frontera y con valor inicial en mecánica, flujo de calor, electrostática y otros campos.

Capítulo

10

Series, integrales y transformadas de Fourier

Las **series de Fourier**[1] (sección 10.2) son series de términos coseno y seno y surgen en la importante tarea práctica de representar funciones periódicas generales. Constituyen una herramienta muy importante en la solución de problemas en los que intervienen ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales.

En el presente capítulo se discuten los conceptos, hechos y técnicas básicas en relación con las series de Fourier. Se incluyen ejemplos ilustrativos y algunas aplicaciones importantes en ingeniería. En el capítulo siguiente sobre ecuaciones diferenciales parciales y problemas con valor inicial y con valores en la frontera se presentan aplicaciones adicionales.

La *teoría* de las series de Fourier es bastante complicada, pero la *aplicación* de estas series es simple. Las series de Fourier son, en cierto sentido, más universales que las series de Taylor, ya que muchas funciones periódicas *discontinuas* de interés práctico pueden desarrollarse en series de Fourier, pero, desde luego, no tienen representaciones en series de Taylor.

En las tres secciones finales de este capítulo se tratan las **integrales de Fourier** y las **transformadas de Fourier**, que generalizan las ideas y las técnicas de las series de Fourier a funciones no periódicas definidas para toda x. En el capítulo siguiente (sección 11.14) se considerarán las aplicaciones correspondientes a ecuaciones diferenciales parciales.

Prerrequisitos para este capítulo: Cálculo integral elemental
Secciones que pueden omitirse en un curso más corto: 10.6-10.11
Bibliografía: Apéndice 1, parte C.
Respuestas a los problemas: Apéndice 2.

[1] JEAN-BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768-1830), físico y matemático francés, vivió y enseñó en Paris, acompañó a Napoleón a Egipto y más tarde fue prefecto de Grenoble. Utilizó series de Fourier en su obra principal *Théorie analytique de la chaleur* (*Teoría analítica del calor*, Paris, 1822) en la que desarrolló la teoría de la conducción del calor (ecuación del calor, ver la sección 11.5). Estas nuevas series llegaron a ser una herramienta de suma importancia en la física matemática y tuvieron asimismo una influencia considerable en el desarrollo subsecuente de las propias matemáticas; ver la referencia [9] en el apéndice 1.

10.1 FUNCIONES PERIÓDICAS. SERIES TRIGONOMÉTRICAS

Se dice que una función $f(x)$ es **periódica** si está definida para toda x real y si existe algún número positivo p tal que

(1) $$f(x + p) = f(x) \qquad \text{para toda } x.$$

A este número p se le llama **periodo** de $f(x)$. La gráfica de esta función se obtiene por repetición periódica de su gráfica en cualquier intervalo de longitud p (figura 229). Los fenómenos y las funciones periódicas se presentan en muchas aplicaciones.

Funciones periódicas conocidas son las funciones seno y coseno y se hace notar que la función $f = c = const$ es también una función periódica en el sentido de la definición, ya que satisface (1) para toda p positiva. Ejemplos de funciones que *no* son periódicas son x, x^2, x^3, e^x y $\ln x$, por mencionar sólo algunas.[2]

Por (1) se tiene $f(x + 2p) = f[(x + p) + p] = f(x + p) = f(x)$, etc., y para cualquier entero n,

(2) $$f(x + np) = f(x) \qquad \text{para toda } x.$$

Por tanto, $2p$, $3p$, $4p$, $\cdots$ también son periodos de $f(x)$. Además, si $f(x)$ y $g(x)$ tienen periodo p, entonces la función

$$h(x) = af(x) + bg(x) \qquad (a, b \text{ constantes})$$

también tiene periodo p.

El problema por resolver en las primeras secciones de este capítulo será la representación de varias funciones de periodo $p = 2\pi$ en términos de las funciones simples

(3) $$1, \quad \cos x, \quad \operatorname{sen} x, \quad \cos 2x, \quad \operatorname{sen} 2x, \cdots, \quad \cos nx, \quad \operatorname{sen} nx, \cdots,$$

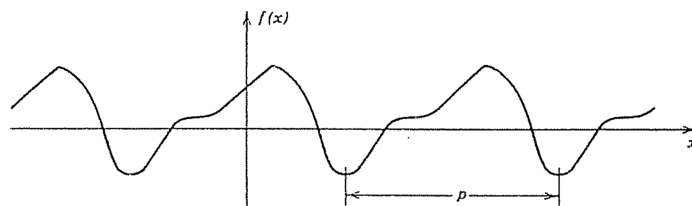


Figura 229. Función periódica.

[2] Si una función periódica $f(x)$ tiene un periodo p (> 0) que es el más pequeño de todos, éste con frecuencia se denomina el **periodo primitivo** de $f(x)$. Por ejemplo, el periodo primitivo de sen x es 2π y el periodo primitivo de sen $2x$ es π. Una función periódica sin periodo primitivo es $f = const$.

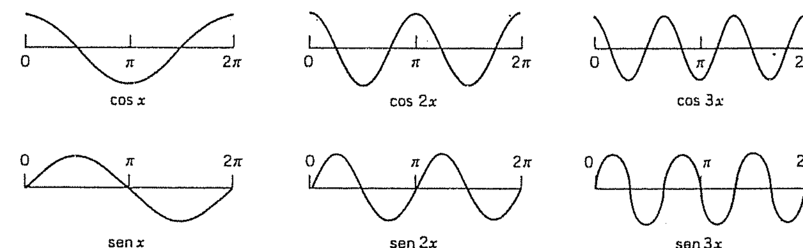


Figura 230. Funciones coseno y seno que tienen el periodo 2π.

que tienen periodo 2π (figura 230). Las series que surgirán serán de la forma

(4) $$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + a_2 \cos 2x + b_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots,$$

donde $a_0, a_1, a_2, \cdots, b_1, b_2, \cdots$ son constantes reales. Estas series se llaman **series trigonométricas** y a las a_n y b_n se les llama los **coeficientes** de la serie. Usando el signo de sumatoria,[3] esta serie puede escribirse

(4) $$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx).$$

Al conjunto de funciones (3) a partir del cual se ha construido la serie (4) suele llamarse el **sistema trigonométrico**.

Se observa que cada término de la serie (4) tiene periodo 2π. Por tanto, *si la serie (4) converge, su suma será una función de periodo 2π.*

Las funciones periódicas que se presentan en problemas prácticos con frecuencia son bastante complicadas y es deseable representarlas en términos de funciones periódicas simples. Se verá que casi cualquier función periódica $f(x)$ de periodo 2π que aparezca en las aplicaciones —por ejemplo, con relación a vibraciones— puede representarse por una serie trigonométrica (la cual se denominará *series de Fourier* de f).

Problemas de la sección 10.1

Encontrar el periodo positivo p más pequeño de las siguientes funciones.

1. $\cos x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos 2x$, $\operatorname{sen} 2x$, $\cos \pi x$, $\operatorname{sen} \pi x$, $\cos 2\pi x$, $\operatorname{sen} 2\pi x$
2. $\cos nx$, $\operatorname{sen} nx$, $\cos \frac{2\pi x}{k}$, $\operatorname{sen} \frac{2\pi x}{k}$, $\cos \frac{2\pi n x}{k}$, $\operatorname{sen} \frac{2\pi n x}{k}$
3. Si $f(x)$ y $g(x)$ tienen periodo p, demostrar que $h = af + bg$ (a, b, constantes) tiene periodo p. En consecuencia, todas las funciones de periodo p forman un espacio vectorial.

[3] Y entre paréntesis; de una serie convergente esto da también como resultado una serie convergente con la misma suma, como puede demostrarse.

4. Si p es un periodo de $f(x)$, demostrar que np, $n = 2, 3, \cdots$, es un periodo de $f(x)$.
5. Demostrar que la función $f(x) = const$ es una función periódica de periodo p para toda p positiva.
6. Si $f(x)$ es una función periódica de x de periodo p, demostrar que $f(ax)$, $a \neq 0$, es una función periódica de x de periodo p/a, y que $f(x/b)$, $b \neq 0$, es una función periódica de x de periodo bp. Comprobar estos resultados para $f(x) = \cos x$, $a = b = 2$.

Trazar las siguientes funciones $f(x)$, las cuales se suponen periódicas de periodo 2π y, para $-\pi < x < \pi$, están dadas por las fórmulas

7. $f(x) = x$
8. $f(x) = x^2$
9. $f(x) = e^{|x|}$
10. $f(x) = |x|$
11. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$
12. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ 1 - x/\pi & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$
13. $f(x) = \begin{cases} \pi + x & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$
14. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \cos x/2 & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$
15. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$
16. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$

Evaluar las siguientes integrales donde $n = 0, 1, 2, \cdots$. (Son ejemplos típicos de integrales que se necesitarán más adelante.)

17. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} nx \, dx$
18. $\int_{-\pi/2}^{0} \cos nx \, dx$
19. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \cos nx \, dx$
20. $\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx \, dx$
21. $\int_{-\pi}^{0} e^x \operatorname{sen} nx \, dx$
22. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \operatorname{sen} nx \, dx$
23. $\int_0^{\pi} e^x \cos nx \, dx$
24. $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx$
25. $\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} nx \, dx$

10.2 SERIES DE FOURIER

Las series de Fourier surgen de la tarea práctica de representar una función periódica $f(x)$ dada en términos de funciones coseno y seno. Estas series son trigonométricas (sección 10.1) cuyos coeficientes se determinan a partir de $f(x)$ mediante ciertas fórmulas [las "fórmulas de Euler" (6) siguientes], las cuales se establecerán primero. Después se considerará la teoría de las series de Fourier.

Fórmulas de Euler para los coeficientes de Fourier

Se supone que $f(x)$ es una función periódica de periodo 2π que puede **representarse** por una serie trigonométrica,

$$(1) \qquad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx);$$

es decir, se supone que esta serie converge y que tiene a $f(x)$ como su suma. Dada una función $f(x)$ como ésta, quieren determinarse los coeficientes a_n y b_n de la serie (1) correspondiente.

Se determina a_0. Al integrar ambos miembros de (1) de $-\pi$ a π, se obtiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \right] dx.$$

Si es posible realizar la integración término a término de la serie[4], se obtiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \, dx \right).$$

El primer término del segundo miembro es igual a $2\pi a_0$. Las demás integrales del segundo miembro son cero, como puede verse de inmediato por integración. Por tanto, el primer resultado obtenido es

$$(2) \qquad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx.$$

Se determinan ahora $a_1, a_2, \cdots$ por un procedimiento similar. Se multiplica (1) por $\cos mx$, donde m es cualquier entero positivo fijo, y se integra de $-\pi$ a π:

$$(3) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \right] \cos mx \, dx.$$

Al integrar término a término, se observa que el segundo miembro queda

$$a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx \, dx \right].$$

La primera integral es cero. Al aplicar (11) del apéndice 3 se obtiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos (n+m)x \, dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos (n-m)x \, dx,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} (n+m)x \, dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} (n-m)x \, dx.$$

[4] Esto se justifica, por ejemplo, en el caso de la convergencia uniforme (ver el teorema 3 de la sección 14.6).

La integración demuestra que los cuatro términos del segundo miembro son cero, con excepción del último término del primer renglón, que es igual a π cuando $n = m$. Puesto que en (3) este término está multiplicado por a_m, el segundo miembro de (3) es igual a $a_m\pi$. El segundo resultado obtenido es

$$\text{(4)} \qquad a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx, \qquad m = 1, 2, \cdots.$$

Por último, se determinan $b_1, b_2, \cdots$ en (1). Si se multiplica (1) por sen mx, donde m es cualquier entero positivo fijo, y después se integra de $-\pi$ a π, se tiene

$$\text{(5)} \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\,\text{sen}\,nx)\right]\text{sen}\,mx\,dx.$$

Al integrar término a término, se observa que el segundo miembro queda

$$a_0\int_{-\pi}^{\pi}\text{sen}\,mx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\text{sen}\,mx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\text{sen}\,nx\,\text{sen}\,mx\,dx\right].$$

La primera integral es cero. La integral siguiente es del tipo considerado antes, y es cero para toda $n = 1, 2, \cdots$. Para la última integral se obtiene

$$\int_{-\pi}^{\pi}\text{sen}\,nx\,\text{sen}\,mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n-m)x\,dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n+m)x\,dx.$$

El último término es cero. El primer término del segundo miembro es cero cuando $n \neq m$ y es π cuando $n = m$. Puesto que en (5) este término está multiplicado por b_m, el segundo miembro de (5) es igual a $b_m\pi$ y el último resultado obtenido es

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,mx\,dx, \qquad m = 1, 2, \cdots.$$

Al escribir n en lugar de m, se obtienen las llamadas **fórmulas de Euler**[5]

$$\text{(6)} \quad \begin{array}{lll} \text{(a)} & a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx & \\ \text{(b)} & a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx & n = 1, 2, \cdots, \\ \text{(c)} & b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,nx\,dx & n = 1, 2, \cdots. \end{array}$$

[5] Ver la nota de pie de página 9 de la sección 2.6.

Los números dados por (6) se denominan los **coeficientes de Fourier** de $f(x)$. La serie trigonométrica

$$\text{(7)} \qquad a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\,\text{sen}\,nx)$$

con coeficientes dados por (6) se denomina la **serie de Fourier** de $f(x)$ (sin atender la convergencia —ésta se discute en la página 95).

EJEMPLO 1 Onda cuadrada

Encontrar los coeficientes de Fourier de la función periódica $f(x)$ de la figura 231*a*, p. 632. La fórmula es

$$f(x) = \begin{cases} -k & \text{si} \quad -\pi < x < 0 \\ k & \text{si} \quad 0 < x < \pi \end{cases} \qquad \text{y} \qquad f(x + 2\pi) = f(x).$$

Funciones de este tipo se presentan como fuerzas externas que actuan sobre sistemas mecánicos, fuerzas electromotrices en circuitos eléctricos, etc. (El valor de $f(x)$ en un solo punto no afecta la integral, por lo que puede dejarse indefinida $f(x)$ en $x = 0$ y $x = \pm\pi$.

Solución. Por (6a) se obtiene $a_0 = 0$. Esto también puede verse sin integrar, ya que el área bajo la curva de $f(x)$ entre $-\pi$ y π es cero. Por (6b),

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-k)\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi}k\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-k\left.\frac{\text{sen}\,nx}{n}\right|_{-\pi}^{0} + k\left.\frac{\text{sen}\,nx}{n}\right|_{0}^{\pi}\right] = 0.$$

porque sen $nx = 0$ en $-\pi$, 0 y π para toda $n = 1, 2, \cdots$. De manera similar, por (6c) se obtiene

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-k)\,\text{sen}\,nx\,dx + \int_{0}^{\pi}k\,\text{sen}\,nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[k\left.\frac{\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{0} - k\left.\frac{\cos nx}{n}\right|_{0}^{\pi}\right].$$

Puesto que $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ y $\cos 0 = 1$, de esta expresión se obtiene

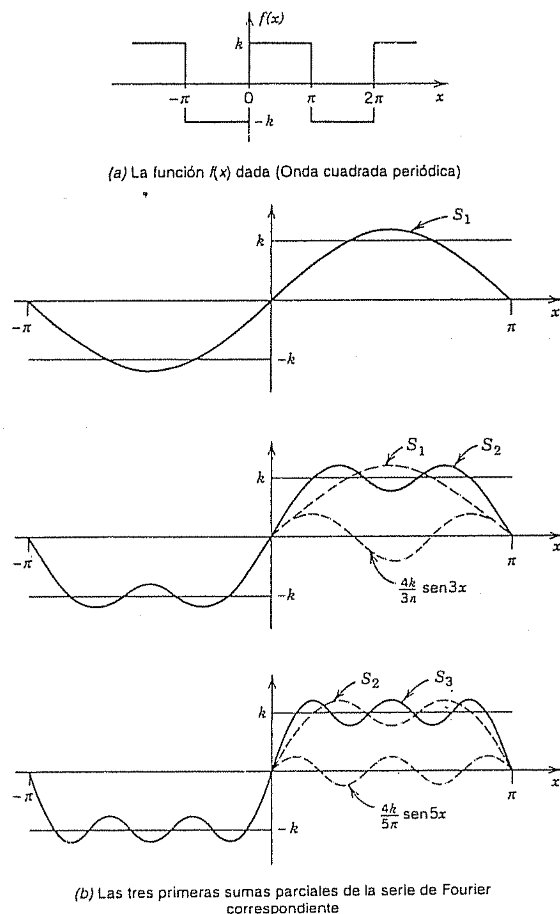
$$b_n = \frac{k}{n\pi}[\cos 0 - \cos(-n\pi) - \cos n\pi + \cos 0] = \frac{2k}{n\pi}(1 - \cos n\pi).$$

Ahora bien, $\cos\pi = -1$, $\cos 2\pi = 1$, $\cos 3\pi = -1$, etc.; en general,

$$\cos n\pi = \begin{cases} -1 & \text{para } n \text{ impar} \\ 1 & \text{para } n \text{ par} \end{cases} \qquad \text{y por tanto} \qquad 1 - \cos n\pi = \begin{cases} 2 & \text{para } n \text{ impar.} \\ 0 & \text{para } n \text{ par.} \end{cases}$$

Por tanto, los coeficientes de Fourier b_n de la función en cuestión son

$$b_1 = \frac{4k}{\pi}, \qquad b_2 = 0, \qquad b_3 = \frac{4k}{3\pi}, \qquad b_4 = 0, \qquad b_5 = \frac{4k}{5\pi}, \cdots,$$



(a) La función $f(x)$ dada (Onda cuadrada periódica)

(b) Las tres primeras sumas parciales de la serie de Fourier correspondiente

Figura 231. Ejemplo 1.

y como las a_n son cero, la serie de Fourier de $f(x)$ es

$$\frac{4k}{\pi}\left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x + \cdots\right). \tag{8}$$

Las sumas parciales son

$$S_1 = \frac{4k}{\pi}\operatorname{sen} x, \qquad S_2 = \frac{4k}{\pi}\left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x\right), \qquad \text{etc.},$$

y sus gráficas en la figura 231 parecen indicar que la serie es convergente y que tiene la suma $f(x)$, la función dada. Se observa que en $x = 0$ y $x = \pi$, los puntos de discontinuidad de $f(x)$, todas las sumas parciales tienen el valor cero, la media aritmética de los valores $-k$ y k de la función en cuestión.

Además, suponiendo que $f(x)$ es la suma de la serie y haciendo $x = \pi/2$, se tiene

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = k = \frac{4k}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \cdots\right),$$

por tanto

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

Este es un famoso resultado de Leibniz (obtenido en 1673 a partir de consideraciones geométricas). Ilustra que los valores de varias series con términos constantes pueden obtenerse evaluando la serie de Fourier en puntos específicos ∎

Ortogonalidad del sistema trigonométrico

El sistema trigonométrico (3), sección 10.1,

$$1, \quad \cos x, \quad \operatorname{sen} x, \quad \cos 2x, \quad \operatorname{sen} 2x, \quad \cdots, \quad \cos nx, \quad \operatorname{sen} nx, \quad \cdots$$

es **ortogonal** *en el intervalo* $-\pi \leqq x \leqq \pi$ (y, en consecuencia, en cualquier intervalo de longitud 2π, debido a la periodicidad). Por definición, esto significa que la integral del producto de cualesquiera dos de estas funciones diferentes sobre dicho intervalo es cero; en fórmulas, para enteros cualesquiera m y $n \neq m$ se tiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0 \qquad (m \neq n)$$

y

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx = 0 \qquad (m \neq n)$$

y para los enteros m y n cualesquiera (incluyendo $m = n$) se tiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \operatorname{sen} nx \, dx = 0.$$

Esta es la propiedad más importante del sistema trigonométrico, la clave en la deducción de las fórmula de Euler (donde se demostró esta ortogonalidad).

Convergencia y suma de series de Fourier

En todo este capítulo las series de Fourier se consideran desde un punto de vista práctico. Se verá que la aplicación de estas series es muy sencilla. En contraste con esto, la teoría de dichas series es complicada y no se entrará en los detalles de la misma. Por consiguiente, sólo se aborda un teorema sobre la convergencia y la suma de series de Fourier, que se presenta a continuación.

Suponer que $f(x)$ es cualquier función periódica dada de periodo 2π para la que existen las integrales de (6); por ejemplo, $f(x)$ es continua o tan sólo continua por secciones (continua salvo por un número finito de saltos en el intervalo de integra-

ción). Entonces pueden calcularse los coeficientes de Fourier (6) de $f(x)$ y usarlos para formar la serie de Fourier (7) de $f(x)$. Sería muy conveniente que la serie así obtenida convergiera y tuviera la suma $f(x)$. La mayoría de las funciones que se presentan en las aplicaciones son tales que esto se cumple (salvo en los saltos de $f(x)$, los cuales se discuten a continuación). En este caso, cuando la serie de Fourier de $f(x)$ representa a $f(x)$, se escribe

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

con un signo de igualdad. Si la serie de Fourier de $f(x)$ no tiene la suma $f(x)$ o no converge, se sigue escribiendo

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

con una tilde ~, la cual indica que la serie trigonométrica del segundo miembro tiene los coeficientes de Fourier de $f(x)$ como coeficientes, por lo que se trata de la serie de Fourier de $f(x)$.

La clase de las funciones que pueden representarse por series de Fourier es sorprendentemente grande y general. Las condiciones suficientes correspondientes que abarcan casi cualquier aplicación concebible son las siguientes.

Teorema 1 (Representación por una serie de Fourier)

Si una función periódica $f(x)$ con periodo 2π es continua por secciones[6] en el intervalo $-\pi \leqq x \leqq \pi$ y tiene derivada por la izquierda y por la derecha[7] en todo punto de dicho intervalo, entonces la serie de Fourier (7) de $f(x)$ [con coeficientes (6)] es convergente. Su suma es $f(x)$, salvo en un punto x_0 en el que $f(x)$ es discontinua y la suma de la serie es el promedio de los límites por la izquierda y la derecha[7] de $f(x)$ en x_0.

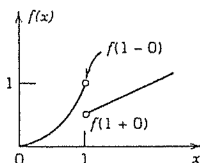


Figura 232. Límites por la izquierda y por la derecha $f(1-0) = 1$, $f(1+0) = \frac{1}{2}$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x < 1 \\ x/2 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

[6] Definición en la sección 6.1

[7] El límite por la izquierda de $f(x)$ en x_0 se define como el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 por la izquierda y se denota con frecuencia por $f(x_0 - 0)$. Por tanto

$$f(x_0 - 0) = \lim_{h \to 0} f(x_0 - h) \quad \text{cuando } h \to 0 \text{ por valores positivos.}$$

El límite por la derecha se denota por $f(x_0 + 0)$ y

$$f(x_0 + 0) = \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) \quad \text{cuando } h \to 0 \text{ por valores positivos.}$$

Las derivadas por la izquierda y por la derecha de $f(x)$ en x_0 se definen como los límites de

$$\frac{f(x_0 - h) - f(x_0 - 0)}{-h} \quad \text{y} \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)}{h},$$

respectivamente, cuando $h \to 0$ a través de valores positivos. Desde luego, si $f(x)$ es continua en x_0, el último término de ambos numeradores es simplemente $f(x_0)$.

Demostración de la convergencia en el teorema 1 para una función continua $f(x)$ que tiene primera y segunda derivadas continuas. Al integrar (6b) por partes se obtiene

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{f(x) \operatorname{sen} nx}{n\pi} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \operatorname{sen} nx \, dx.$$

El primer término del segundo miembro es cero. Al integrar otra vez por partes se obtiene

$$a_n = \frac{f'(x) \cos nx}{n^2\pi} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos nx \, dx.$$

El primer término del segundo miembro es cero debido a la periodicidad y la continuidad de $f'(x)$. Puesto que f'' es continua en el intervalo de integración, se tiene

$$|f''(x)| < M$$

para una constante M adecuada. Además, $|\cos nx| \leqq 1$. Se sigue que

$$|a_n| = \frac{1}{n^2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos nx \, dx \right| < \frac{1}{n^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M \, dx = \frac{2M}{n^2}.$$

De manera similar, $|b_n| < 2\,M/n^2$ para toda n. Por tanto, el valor absoluto de cada término de la serie de Fourier de $f(x)$ es a lo sumo igual al término correspondiente de la serie

$$|a_0| + 2M \left(1 + 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \right)$$

que es convergente. Por tanto, esa serie de Fourier converge y se termina así la demostración. (Los lectores familiarizados con la convergencia uniforme observarán que por el criterio de Weierstrass de la sección 14.6, bajo los supuestos presentes, la serie de Fourier converge uniformemente y, en consecuencia, la deducción de (6) integrando término a término se justifica por el teorema 3 de la sección 14.6.)

La demostración de la convergencia en el caso de una función $f(x)$ continua por secciones y la demostración de que bajo los supuestos del teorema la serie de Fourier (7) con coeficientes (6) representa a $f(x)$ son mucho más complicadas; ver, por ejemplo, la referencia [C14]. ∎

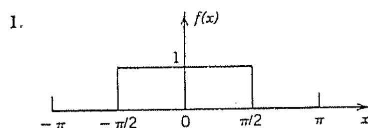
EJEMPLO 2 Convergencia en un salto según se indica en el teorema 1

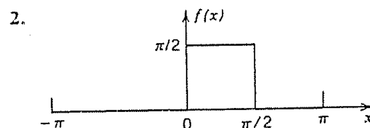
La onda cuadrada del ejemplo 1 tiene un salto en $x = 0$. Su límite por la izquierda ahí es $-k$ y su límite por la derecha es k (figura 231), por lo que el promedio de estos límites es 0. La serie de Fourier (8) de la onda cuadrada converge en realidad a este valor cuando $x = 0$ ya que entonces todos sus términos son cero. Se procede de manera similar para los otros saltos. Esto concuerda con el teorema 1. ∎

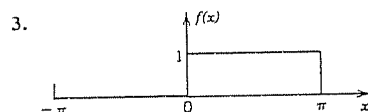
Resumen. Una serie de Fourier de una función $f(x)$ dada de periodo 2π es una serie de la forma (7) con coeficientes dados por las fórmulas de Euler (6). El teorema 1 da las condiciones que son suficientes para que esta serie converja y para que en toda x tenga el valor $f(x)$, salvo en las discontinuidades de $f(x)$, donde la serie es igual a la media aritmética de los límites por la izquierda y por la derecha de $f(x)$ en ese punto.

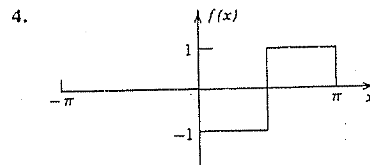
Problemas de la sección 10.2

Encontrar la serie de Fourier de la función $f(x)$, la cual se supone tiene periodo 2π, y trazar gráficas precisas de las tres primeras sumas parciales,[8] donde $f(x)$ es igual a

1.


2.


3.


4.


5. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ -1 & \text{si } \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } 0 < x < \pi/2 \\ 0 & \text{si } \pi/2 < x < 2\pi \end{cases}$

7. $f(x) = x \ (-\pi < x < \pi)$

8. $f(x) = x \ (0 < x < 2\pi)$

9. $f(x) = x^2 \ (-\pi < x < \pi)$

10. $f(x) = x^2 \ (0 < x < 2\pi)$

11. $f(x) = x^3 \ (-\pi < x < \pi)$

12. $f(x) = x + |x| \ (-\pi < x < \pi)$

13. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0 & \text{si } \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$

14. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ x & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$

15. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \pi - x & \text{si } \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$

16. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \pi^2/4 & \text{si } \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$

17. Comprobar el último enunciado del teorema 1 acerca de las discontinuidades para la función del problema 1.
18. Obtener la serie de Fourier en el problema 3 a partir de la del problema 1.
19. Demostrar que si $f(x)$ tiene los coeficientes de Fourier a_n, b_n y $g(x)$ tiene los coeficientes de Fourier a_n^*, b_n^*, entonces $kf(x) + lg(x)$ tiene los coeficientes de Fourier $ka_n + la_n^*$, $kb_n + lb_n^*$.
20. Usando el problema 19, encontrar la serie de Fourier del problema 2 a partir de las de los problemas 3 y 4.

[8] Es decir, $a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$ para $N = 1, 2, 3$.

10.3 FUNCIONES DE CUALQUIER PERIODO $P = 2L$

Las funciones consideradas hasta este punto tenían periodo 2π, en tanto que la mayoría de las funciones periódicas en las aplicaciones tendrán otros periodos. Pero se demuestra que la transición de funciones de periodo $p = 2\pi$ a funciones de periodo[9] $p = 2L$, es bastante simple, en esencia un alargamiento de escala sobre el eje.

Si una función $f(x)$ de periodo $p = 2L$ tiene una **serie de Fourier**, se afirma que esta serie es

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \right) \tag{1}$$

con los **coeficientes de Fourier** de $f(x)$ dados por las **fórmulas de Euler**

(2)

$$\text{(a)} \quad a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx$$

$$\text{(b)} \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

$$\text{(c)} \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

Demostración. La idea es deducir estas expresiones a partir de la sección 10.2 mediante un cambio de escala. Se hace $v = \pi x/L$, de donde $x = Lv/\pi$. Entonces $x = \pm L$ corresponde a $v = \pm\pi$. Por tanto f, considerada como una función de v a la que se llama $g(v)$,

$$f(x) = g(v),$$

tiene periodo 2π. Por consiguiente, por (7) y (6), sección 10.2, con v en lugar de x, esta función periódica $g(v)$ con periodo 2π tiene la serie de Fourier

$$g(v) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nv + b_n \operatorname{sen} nv) \tag{3}$$

[9] Esta notación es práctica, ya que en las aplicaciones L será la longitud de una cuerda en vibración (sección 11.2), de una varilla en la conducción de calor (sección 11.5), etc.

con coeficientes

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(v)\,dv$$

(4) $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(v)\cos nv\,dv$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(v)\operatorname{sen} nv\,dv.$$

Puesto que $v = \pi x/L$ y $g(v) = f(x)$, la fórmula (3) da como resultado (1). En (4) se introduce $x = Lv/\pi$ como variable de integración. Entonces los límites de integración $v = \pm\pi$ pasan a ser $x = \pm L$. Asimismo, $v = \pi x/L$ implica $dv = \pi\,dx/L$. Por tanto, $dv/2\pi = dx/2L$ en a_0. De manera similar, $dv/\pi = dx/L$ en a_n y b_n. En consecuencia, de (4) se obtiene (2). ∎

El intervalo de integración en (2) puede reemplazarse por cualquier intervalo de longitud $p = 2L$, por ejemplo, por el intervalo $0 \leq x \leq 2L$.

EJEMPLO 1 Onda cuadrada periódica

Encontrar la serie de Fourier de la función (ver la figura 233)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -2 < x < -1 \\ k & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases} \qquad p = 2L = 4, \quad L = 2.$$

Solución. Por (2a) y (2b) se obtiene

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} k\,dx = \frac{k}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} k\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{2k}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$$

Por tanto, $a_n = 0$ si n es par y

$$a_n = 2k/n\pi \quad \text{si} \quad n = 1, 5, 9, \cdots, \qquad a_n = -2k/n\pi \quad \text{si} \quad n = 3, 7, 11, \cdots.$$

A partir de (2c) se encuentra que $b_n = 0$ para $n = 1, 2, \cdots$. Por tanto el resultado es

$$f(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}x + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2}x - + \cdots\right).$$ ∎

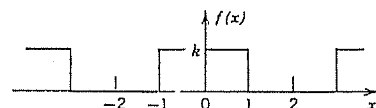


Figura 233. Ejemplo 1.

EJEMPLO 2 Rectificador de media onda

Un voltaje senoidal E sen ωt, donde t es el tiempo, se hace pasar por un rectificador de media onda que corta la porción negativa de la onda (figura 234). Encontrar la serie de Fourier de la función periódica resultante

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -L < t < 0, \\ E\operatorname{sen}\omega t & \text{si} \quad 0 < t < L \end{cases} \qquad p = 2L = \frac{2\pi}{\omega}, \quad L = \frac{\pi}{\omega}.$$

Solución. Puesto que $u = 0$ cuando $-L < t < 0$, por (2a), con t en lugar de x, se obtiene

$$a_0 = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega} E\operatorname{sen}\omega t\,dt = \frac{E}{\pi}$$

y por (2b), usando la fórmula (11) del apéndice 3.1 con $x = \omega t$ y $y = n\omega t$,

$$a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} E\operatorname{sen}\omega t\cos n\omega t\,dt = \frac{\omega E}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega}[\operatorname{sen}(1+n)\omega t + \operatorname{sen}(1-n)\omega t]\,dt.$$

Si $n = 1$, la integral del segundo miembro es cero, y si $n = 2, 3, \cdots$, se obtiene de inmediato

$$a_n = \frac{\omega E}{2\pi}\left[-\frac{\cos(1+n)\omega t}{(1+n)\omega} - \frac{\cos(1-n)\omega t}{(1-n)\omega}\right]_0^{\pi/\omega}$$

$$= \frac{E}{2\pi}\left(\frac{-\cos(1+n)\pi + 1}{1+n} + \frac{-\cos(1-n)\pi + 1}{1-n}\right).$$

Si n es impar, esta expresión es igual a cero, y para n par se tiene

$$a_n = \frac{E}{2\pi}\left(\frac{2}{1+n} + \frac{2}{1-n}\right) = -\frac{2E}{(n-1)(n+1)\pi} \qquad (n = 2, 4, \cdots).$$

En una manera similar, a partir de (2c) se encuentra que $b_1 = E/2$ y $b_n = 0$ para $n = 2, 3, \cdots$. Por consiguiente,

$$u(t) = \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2}\operatorname{sen}\omega t - \frac{2E}{\pi}\left(\frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\omega t + \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega t + \cdots\right).$$ ∎

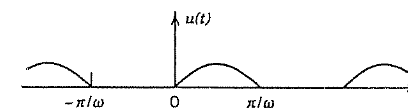


Figura 234. Rectificador de media onda.

Problemas de la sección 10.3

Encontrar la serie de Fourier de la función periódica $f(x)$, de periodo $p = 2L$, y trazar $f(x)$ y las tres primeras sumas parciales.

1. $f(x) = -1 \quad (-1 < x < 0), \quad f(x) = 1 \quad (0 < x < 1), \quad p = 2L = 2$
2. $f(x) = 0 \quad (-1 < x < 1), \quad f(x) = 1 \quad (1 < x < 3), \quad p = 2L = 4$
3. $f(x) = 0 \quad (-2 < x < 0), \quad f(x) = 2 \quad (0 < x < 2), \quad p = 2L = 4$
4. $f(x) = x \quad (-1 < x < 1), \quad p = 2L = 2$

5. $f(x) = 1 - x^2 \quad (-1 < x < 1), \quad p = 2L = 2$
6. $f(x) = 2|x| \quad (-2 < x < 2), \quad p = 2L = 4$
7. $f(x) = 0, \quad (-1 < x < 0), \quad f(x) = x \quad (0 < x < 1), \quad p = 2L = 2$
8. $f(x) = x \quad (0 < x < 1), \quad f(x) = 1 - x \quad (1 < x < 2), \quad p = 2L = 2$
9. $f(x) = -1 \quad (-1 < x < 0), \quad f(x) = 2x \quad (0 < x < 1), \quad p = 2L = 2$
10. $f(x) = \frac{1}{2} + x \quad (-\frac{1}{2} < x < 0), \quad f(x) = \frac{1}{2} - x \quad (0 < x < \frac{1}{2}), \quad p = 2L = 1$
11. $f(x) = 3x^2 \quad (-1 < x < 1), \quad p = 2L = 2$
12. $f(x) = \pi x^3/2 \quad (-1 < x < 1), \quad p = 2L = 2$
13. $f(x) = \pi \operatorname{sen} \pi x \quad (0 < x < 1), \quad p = 2L = 1$
14. $f(x) = x^2/4 \quad (0 < x < 2), \quad p = 2L = 2$
15. Obtener la serie de Fourier en el problema 1 directamente a partir de la del ejemplo 1, sección 10.2.
16. Obtener la serie de Fourier en el problema 11 directamente a partir de la del problema 9, sección 10.2.
17. Obtener la serie de Fourier en el problema 3 directamente a partir de la del ejemplo 1.
18. Encontrar la serie de Fourier de la función periódica que se obtiene al hacer pasar el voltaje $v(t) = k \cos 100\pi t$ por un rectificador de media onda.
19. Demostrar que cada término de (1) tiene periodo $p = 2L$.
20. Demostrar que en (2) el intervalo de integración puede reemplazarse por cualquier intervalo de longitud $p = 2L$.

10.4 FUNCIONES PARES E IMPARES

La función del ejemplo 1 de la sección anterior era impar y sólo tenía términos seno en su serie de Fourier, sin términos coseno. Esto es típico. De hecho, puede evitarse trabajo innecesario (y las consiguientes fuentes de error) al determinar los coeficientes de Fourier si una función es impar o par.

Se recuerda primero que una función $y = g(x)$ es **par** si

$$g(-x) = g(x) \qquad \text{para toda } x$$

La gráfica de esta función es simétrica con respecto al eje y (figura 235). Una función $h(x)$ es **impar** si

$$h(-x) = -h(x) \qquad \text{para toda } x$$

(Ver la figura 236.) La función $\cos nx$ es par, en tanto que $\operatorname{sen} nx$ es impar.

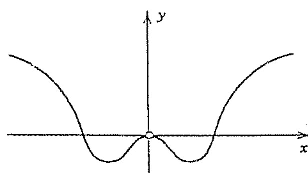


Figura 235. Función par.

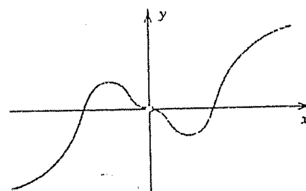


Figura 236. Función impar.

Si $g(x)$ es una función par, entonces

$$\int_{-L}^{L} g(x)\, dx = 2\int_{0}^{L} g(x)\, dx \qquad (g \text{ par}) \tag{1}$$

Si $h(x)$ es una función impar, entonces

$$\int_{-L}^{L} h(x)\, dx = 0 \qquad (h \text{ impar}) \tag{2}$$

Las fórmulas (1) y (2) son obvias a partir de las gráficas de g y h y las demostraciones formales se le dejan al estudiante.

El producto $q = gh$ de una función para g y una función impar h es impar, ya que

$$q(-x) = g(-x)h(-x) = g(x)[-h(x)] = -q(x).$$

Por tanto, si $f(x)$ es par, entonces el integrando $f \operatorname{sen}(n\pi x/L)$ en (2c), sección 10.3, es impar, y $b_n = 0$. De manera similar, si $f(x)$ es impar, entonces $f \cos(n\pi x/L)$ en (2b), sección 10.3, es impar, y $a_n = 0$. Por lo anterior y (1) se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 1 (Series de Fourier de funciones pares e impares)

La serie de Fourier de una función par de periodo $2L$ es una **"serie de Fourier de cosenos"**

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x \qquad (f \text{ par}) \tag{3}$$

con coeficientes

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\, dx, \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\, dx, \qquad n = 1, 2, \cdots. \tag{4}$$

La serie de Fourier de una función impar de periodo $2L$ es una **"serie de Fourier de senos"**

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \qquad (f \text{ impar}) \tag{5}$$

con coeficientes

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, dx. \tag{6}$$

■

El caso del periodo 2π. En este caso, para una función par por el teorema 1 se obtiene

$$(3^*) \qquad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad (f \text{ par})$$

con coeficientes

$$(4^*) \qquad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

y para una función impar

$$(5^*) \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx \qquad (f \text{ impar})$$

con coeficientes

$$(6^*) \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

Por ejemplo, $f(x)$ del ejemplo 1, sección 10.2, es impar y, por lo tanto, está representada por una serie de Fourier de senos.

Simplificaciones adicionales resultan de la siguiente propiedad (ya mencionada en el problema 19 de la sección 10.2):

Teorema 2 (Suma de funciones)

Los coeficientes de Fourier de una suma $f_1 + f_2$ son las sumas de los coeficientes de Fourier de f_1 y f_2 correspondientes.

Los coeficientes de Fourier de cf son el producto de c y los coeficientes de Fourier de f correspondientes.

EJEMPLO 1 Pulso rectangular

La función $f^*(x)$ de la figura 237 es la suma de la función $f(x)$ del ejemplo 1 de la sección 10.2 y la constante k. Por tanto, a partir de dicho ejemplo y del teorema 2 se concluye que

$$f^*(x) = k + \frac{4k}{\pi}\left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x + \cdots\right).$$ ∎

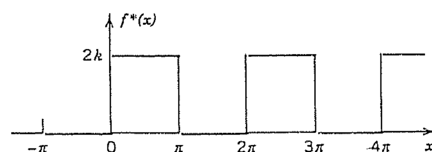


Figura 237. Ejemplo 1.

EJEMPLO 2 Onda diente de sierra

Encontrar la serie de Fourier de la función (figura 238*a*)

$$f(x) = x + \pi \quad \text{si} \quad -\pi < x < \pi \qquad \text{y} \qquad f(x + 2\pi) = f(x).$$

Solución. Puede escribirse

$$f = f_1 + f_2$$

donde

$$f_1 = x \qquad \text{y} \qquad f_2 = \pi.$$

Los coeficientes de Fourier de f_2 son cero, salvo el primero (el término constante), que es π. En consecuencia, por el teorema 2, los coeficientes de Fourier a_n, b_n son los de f_1, excepto para a_0, que es π. Puesto que f_1 es impar, $a_n = 0$ para $n = 1, 2, \cdots$, y

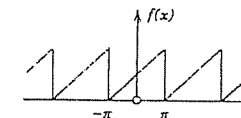
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_1(x)\operatorname{sen} nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} nx\,dx.$$

Al integrar por partes se obtiene

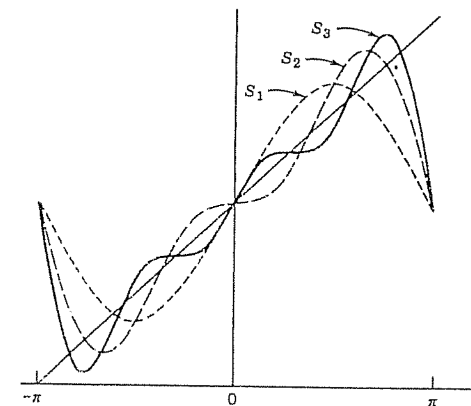
$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right] = -\frac{2}{n}\cos n\pi.$$

Por tanto, $b_1 = 2$, $b_2 = -2/2$, $b_3 = 2/3$, $b_4 = -2/4$, $\cdots$ y la serie de Fourier de $f(x)$ es

$$f(x) = \pi + 2\left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x - + \cdots\right).$$ ∎



(a) La función $f(x)$



(b) Sumas parciales $S_n(x)$

238. Ejemplo 2.

Problemas de la sección 10.4

¿Las funciones siguientes son impares, pares o ni lo uno ni lo otro?

1. $|x^3|$, $x \cos nx$, $x^2 \cos nx$, $\cosh x$, $\operatorname{senh} x$, $\operatorname{sen} x + \cos x$, $x|x|$
2. $x + x^2$, $|x|$, e^x, e^{x^2}, $\operatorname{sen}^2 x$, $x \operatorname{sen} x$, $\ln x$, $x \cos x$, $e^{-|x|}$

¿Las siguientes funciones $f(x)$, las cuales se suponen periódicas, de periodo 2π, son pares, impares o ni lo uno ni lo otro?

3. $f(x) = x^3 \quad (-\pi < x < \pi)$
4. $f(x) = x^4 \quad (0 < x < 2\pi)$
5. $f(x) = x|x| \quad (-\pi < x < \pi)$
6. $f(x) = e^{-|x|} \quad (-\pi < x < \pi)$
7. $f(x) = |\operatorname{sen} x| \quad (-\pi < x < \pi)$
8. $x^3 - x$
9. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ x & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$
10. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 < x < 2\pi - 1 \\ x & \text{si } -1 < x < 1 \end{cases}$
11. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{senh} x & \text{si } -\pi < x < 0 \\ -\cosh x & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$
12. $f(x) = \begin{cases} \cos^2 2x & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \operatorname{sen}^2 2x & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$

Representar las siguientes funciones como la suma de una función par y una impar.

13. $1/(1-x)$ 14. $1/(1-x)^2$ 15. e^{kx} 16. $x/(x+1)$

17. Demostrar el teorema 2.
18. Encontrar todas las funciones que sean tanto pares como impares.
19. Demostrar que la conocida identidad $\operatorname{sen}^3 x = \frac{3}{4} \operatorname{sen} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 3x$ puede interpretarse como el desarrollo de una serie de Fourier y que se cumple lo mismo para la identidad $\cos^3 x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x$.

Demostrar que:

20. La suma y el producto de funciones pares son funciones pares.
21. La suma de funciones impares es impar. El producto de dos funciones impares es par.
22. Si $f(x)$ es impar, entonces $|f(x)|$ y $f^2(x)$ son funciones pares.
23. Si $f(x)$ es par, entonces $|f(x)|$, $f^2(x)$ y $f^3(x)$ son funciones pares.
24. Si $g(x)$ está definida para toda x, entonces la función $p(x) = [g(x) + g(-x)]/2$ es par y la función $q(x) = [g(x) - g(-x)]/2$ es impar.

Encontrar la serie de Fourier de las siguientes funciones, las cuales se supone tienen periodo 2π. *Sugerencia.* Usar el hecho de que algunas de estas funciones son pares o impares.

25. $f(x) = \begin{cases} k & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0 & \text{si } \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$
26. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < \pi \\ \pi - x & \text{si } \pi < x < 2\pi \end{cases}$
27. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \pi - x & \text{si } \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$
28. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -\pi < x < 0 \\ x & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$

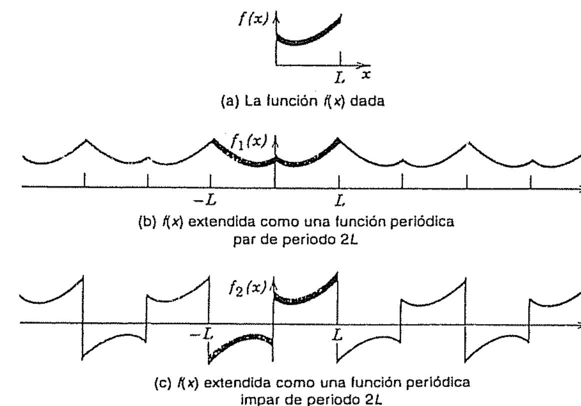
29. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \pi^2/4 & \text{si } \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$
30. $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$
31. $f(x) = x^2/4 \quad (-\pi < x < \pi)$
32. $f(x) = x(\pi^2 - x^2) \quad (-\pi < x < \pi)$

Demostrar que

33. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots = \frac{\pi}{4}$ (Usar el problema 25)
34. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$ (Usar el problema 31)
35. $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + - \cdots = \frac{\pi^2}{12}$ (Usar el problema 31)

10.5 DESARROLLOS DE MEDIO RANGO

En varias aplicaciones existe la necesidad práctica de usar series de Fourier en relación con funciones $f(x)$ que están dadas solamente en algún intervalo, por ejemplo, $0 \leqq x \leqq L$, como en la figura 239a. En el capítulo siguiente (secciones 11.3 y 11.5) se presentan casos típicos. Podría extenderse $f(x)$ periódicamente con periodo L para después representar la función extendida por una serie de Fourier, la cual en general incluiría *tanto* términos coseno *como* seno. Sin embargo, hay una alternativa mejor mediante la cual se obtiene siempre una serie de cosenos al extender primero $f(x)$ de $0 \leqq x \leqq L$ como una función *par* en el rango (el intervalo) $-L \leqq x \leqq L$, como en la figura 239b, para después extender esta nueva función como una función periódica de perio-



(a) La función $f(x)$ dada

(b) $f(x)$ extendida como una función periódica par de periodo $2L$

(c) $f(x)$ extendida como una función periódica impar de periodo $2L$

Figura 239. (a) Función $f(x)$ dada en un intervalo $0 \leqq x \leqq L$, (b) su extensión par al "rango" (intervalo) completo $-L \leqq x \leqq L$ (curva remarcada) y la extensión periódica de periodo $2L$ al eje x, (c) su extensión impar a $-L \leqq x \leqq L$ (curva remarcada) y la extensión periódica de periodo $2L$ al eje x.

do $2L$ y, como es par, representarla por una serie de Fourier de cosenos. O puede extenderse $f(x)$ desde $0 \leqq x \leqq L$ como una función *impar* en $-L \leqq x \leqq L$, como en la figura 239c, para después extender esta nueva función como una función periódica de periodo $2L$ y, como es impar, representarla por una serie de Fourier de senos. Estas dos series se llaman los dos **desarrollos de medio rango** de la función $f(x)$, la cual está dada sólo en "la mitad del rango" (la mitad del intervalo de periodicidad de estas series). La forma de estas series se presenta en la sección 10.4. El desarrollo de cosenos de medio rango es [ver (3), (4), sección 10.4]

(1)
$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x$$

donde

(2)
$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\, dx, \qquad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

El desarrollo de senos de medio rango es [ver (5), (6), sección 10.4]

(3)
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x$$

donde

(4)
$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

EJEMPLO 1 El "triángulo" y sus desarrollos de medio rango

Encontrar los dos desarrollos de medio rango de la función (figura 240)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2k}{L} x & \text{si } 0 < x < \dfrac{L}{2} \\[2mm] \dfrac{2k}{L}(L - x) & \text{si } \dfrac{L}{2} < x < L. \end{cases}$$

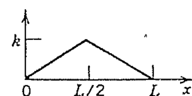


Figura 240. La función dada en el ejemplo 1.

Solución. (a) Extensión periódica par. Por (4), sección 10.4, se obtiene

$$a_0 = \frac{1}{L}\left[\frac{2k}{L}\int_0^{L/2} x\, dx + \frac{2k}{L}\int_{L/2}^{L} (L - x)\, dx\right] = \frac{k}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{L}\left[\frac{2k}{L}\int_0^{L/2} x \cos \frac{n\pi}{L} x\, dx + \frac{2k}{L}\int_{L/2}^{L} (L - x) \cos \frac{n\pi}{L} x\, dx\right].$$

Entonces, al integrar por partes,

$$\int_0^{L/2} x \cos \frac{n\pi}{L} x\, dx = \frac{Lx}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \Big|_0^{L/2} - \frac{L}{n\pi}\int_0^{L/2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x\, dx$$
$$= \frac{L^2}{2n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1\right).$$

De manera similar,

$$\int_{L/2}^{L} (L - x) \cos \frac{n\pi}{L} x\, dx = -\frac{L^2}{2n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} - \frac{L^2}{n^2\pi^2}\left(\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2}\right).$$

Si se introducen estos dos resultados, se obtiene

$$a_n = \frac{4k}{n^2\pi^2}\left(2 \cos \frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1\right).$$

Por tanto,

$$a_2 = -16k/2^2\pi^2, \qquad a_6 = -16k/6^2\pi^2, \qquad a_{10} = -16k/10^2\pi^2, \cdots,$$

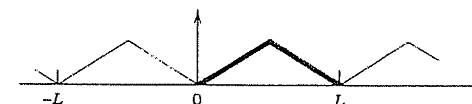
y $a_n = 0$ si $n \neq 2, 6, 10, 14, \cdots$. Así, el primer desarrollo de medio rango de $f(x)$ es

$$f(x) = \frac{k}{2} - \frac{16k}{\pi^2}\left(\frac{1}{2^2} \cos \frac{2\pi}{L} x + \frac{1}{6^2} \cos \frac{6\pi}{L} x + \cdots\right).$$

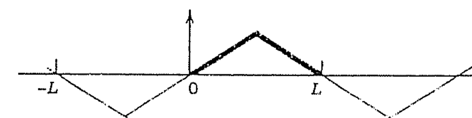
Esta serie representa la extensión periódica par de la función $f(x)$ dada, de periodo $2L$, ilustrada en la figura 241a.

(b) Extensión periódica impar. De manera similar, a partir de (6), sección 10.4, se obtiene

(5)
$$b_n = \frac{8k}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}.$$



(a) Extensión par



(b) Extensión impar

Figura 241. Extensiones periódicas de $f(x)$ en el ejemplo 1.

En consecuencia, el otro desarrollo de medio rango de $f(x)$ es

$$f(x) = \frac{8k}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{L}x - \frac{1}{3^2}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{L}x + \frac{1}{5^2}\operatorname{sen}\frac{5\pi}{L}x - + \cdots\right).$$

Esta serie representa la extensión periódica impar de $f(x)$, de periodo $2L$, ilustrada en la figura 241b. ∎

Problemas de la sección 10.5

Representar las siguientes funciones $f(x)$ por una serie de Fourier de senos y trazar la extensión periódica correspondiente de $f(x)$.

1. $f(x) = k \quad (0 < x < L)$
2. $f(x) = kx \quad (0 < x < L)$
3. $f(x) = x^2 \quad (0 < x < L)$
4. $f(x) = 1 - (2/L)x \quad (0 < x < L)$
5. $f(x) = L - x \quad (0 < x < L)$
6. $f(x) = x^3 \quad (0 < x < L)$
7. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < \pi/2 \\ \pi/2 & \text{si } \pi/2 < x < \pi \end{cases}$
8. $f(x) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } 0 < x < \pi/2 \\ \pi - x & \text{si } \pi/2 < x < \pi \end{cases}$
9. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < L/2 \\ L - x & \text{si } L/2 < x < L \end{cases}$
10. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < L/2 \\ L/2 & \text{si } L/2 < x < L \end{cases}$

Representar las siguientes funciones $f(x)$ por una serie de Fourier de cosenos y trazar la extensión periódica correspondiente de $f(x)$.

11. $f(x) = x \quad (0 < x < L)$
12. $f(x) = 1 \quad (0 < x < L)$
13. $f(x) = x^2 \quad (0 < x < L)$
14. $f(x) = \operatorname{sen}^2 3x \quad (0 < x < \pi)$
15. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < L/2 \\ 1 & \text{si } L/2 < x < L \end{cases}$
16. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < L/2 \\ 0 & \text{si } L/2 < x < L \end{cases}$
17. $f(x) = e^x \quad (0 < x < L)$
18. $f(x) = x^3 \quad (0 < x < L)$
19. $f(x) = \operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} \quad (0 < x < L)$
20. $f(x) = \frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2L} \quad (0 < x < L)$

10.6 SERIES COMPLEJAS DE FOURIER. *OPCIONAL*

En esta sección opcional se demuestra que la serie de Fourier

(1) $$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

puede escribirse en forma compleja, la cual en ocasiones simplifica los cálculos (ver el ejemplo 1 siguiente). Esto se hace por la fórmula de Euler (8), sección 2.3,

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$$

y la fórmula que la complementa

$$e^{-it} = \cos t - i \operatorname{sen} t$$

[obtenida a partir de cos $(-t)$ = cos t, sen $(-t)$ = – sen t] con $t = nx$, es decir,

(2) $$e^{inx} = \cos nx + i \operatorname{sen} nx,$$

(3) $$e^{-inx} = \cos nx - i \operatorname{sen} nx.$$

Al sumar estas expresiones y dividirlas entre 2 se obtiene

(4) $$\cos nx = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}).$$

Al restarlas y dividirlas entre $2i$ se obtiene

(5) $$\operatorname{sen} nx = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}).$$

A partir de estos resultados, usando $1/i = -i$, en (1) se tiene

$$a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx = \frac{1}{2}a_n(e^{inx} + e^{-inx}) + \frac{1}{2i}b_n(e^{inx} - e^{-inx})$$
$$= \tfrac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inx} + \tfrac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inx}.$$

Con lo anterior, (1) queda como

(6) $$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{inx} + k_n e^{-inx})$$

donde $c_0 = a_0$, y por (1)–(3) y las fórmulas de Euler (6), sección 10.2,

(7) $$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$
$$k_n = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx,$$

Por último, si se introduce la notación $k_n = c_{-n}$, por (6) y (7) se obtiene

(8) $$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \qquad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

Esta es la llamada **forma compleja de la serie de Fourier** o, abreviando, la **serie compleja de Fourier** de $f(x)$ y c_n recibe el nombre de **coeficientes complejos de Fourier** de $f(x)$.

Resulta interesante el hecho de que (8) pueda deducirse de manera independiente como sigue. Al multiplicar la serie de (8) por e^{-imx}, donde m es un entero fijo, e integrar término a término de $-\pi$ a π (permitida, por ejemplo, en el caso de la convergencia uniforme), se obtiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx}\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}\,dx$$

Cuando $n = m$, el integrando es $e^0 = 1$, y la integral es igual a 2π. Se obtiene así

$$(9) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx}\,dx = 2\pi c_m,$$

siempre que las demás integrales sean cero, lo cual se cumple por (5),

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}\,dx = \frac{1}{i(n-m)}\left(e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{i(n-m)}\,2i\,\operatorname{sen}(n-m)\pi = 0.$$

Entonces, al escribir n en lugar de m en (9), se obtiene la fórmula de los coeficientes de (8). ∎

Para una función de periodo $2L$, el razonamiento anterior da como resultado la **serie compleja de Fourier**

$$(10) \qquad \boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}, \qquad c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi x/L}\,dx.}$$

EJEMPLO 1 Serie compleja de Fourier

Encontrar la serie compleja de Fourier de $f(x) = e^x$ si $-\pi < x < \pi$ y $f(x + 2\pi) = f(x)$ y a partir de ella obtener la serie común de Fourier

Solución. Por (8),

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{1-in}\,e^{(1-in)x}\Big|_{-\pi}^{\pi}.$$

Multiplicando el numerador y el denominador por $1 + in$ y usando $e^{i n\pi} = e^{-in\pi} = (-1)^n$, se obtiene

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1+in}{1+n^2}(-1)^n(e^{\pi} - e^{-\pi}).$$

El último factor $(\cdots)$ es $2 \operatorname{senh} \pi$, por lo que la serie compleja de Fourier es

$$(11) \qquad e^x = \frac{\operatorname{senh}\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n \frac{1+in}{1+n^2}e^{inx} \qquad (-\pi < x < \pi).$$

Aquí, por (2),

$$(1 + in)(\cos nx + i \operatorname{sen} nx) = (\cos nx - n \operatorname{sen} nx) + i(n \cos nx + \operatorname{sen} nx).$$

El término correspondiente con $-n$ en lugar de n es (obsérvese que $\cos(-nx) = \cos nx$ y $\operatorname{sen}(-nx) = -\operatorname{sen} nx$)

$$(1 - in)(\cos nx - i \operatorname{sen} nx) = (\cos nx - n \operatorname{sen} nx) - i(n \cos nx + \operatorname{sen} nx).$$

Las partes imaginarias se cancelan si se suman los dos términos, por lo que su suma es

$$2(\cos nx - n \operatorname{sen} nx), \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

Para $n = 0$ se obtiene 1 (no 2) debido a que hay un solo término. Por tanto, la serie real de Fourier es

$$(12) \qquad e^x = \frac{2\operatorname{senh}\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{1+1^2}(\cos x - \operatorname{sen} x) + \frac{1}{1+2^2}(\cos 2x - 2\operatorname{sen} 2x) - + \cdots\right]$$

donde $-\pi < x < \pi$.

Problemas de la sección 10.6

1. Demostrar que los coeficientes complejos de Fourier de una función impar son imaginarios puros y que los de una función par son reales.
2. Demostrar que $a_0 = c_0$, $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$, $n = 1, 2, \cdots$.
3. Encontrar la serie compleja de Fourier de $f(x) = -1$ si $-\pi < x < 0$, $f(x) = 1$ si $0 < x < \pi$.
4. Convertir la serie de Fourier del problema 3 a la forma real.
5. Encontrar la serie compleja de Fourier de $f(x) = x$ $(-\pi < x < \pi)$.
6. Encontrar la serie compleja de Fourier de $f(x) = 0$ si $-\pi < x < 0$, $f(x) = 1$ si $0 < x < \pi$.
7. Encontrar la serie compleja de Fourier de $f(x) = x$ $(0 < x < 2\pi)$.
8. Convertir la serie de Fourier del problema 7 a la forma real.
9. Encontrar la serie compleja de Fourier de $f(x) = x^2$ $(-\pi < x < \pi)$.
10. Convertir la serie de Fourier del problema 9 a la forma real.

10.7 OSCILACIONES FORZADAS

Las series de Fourier tienen importantes aplicaciones en las ecuaciones diferenciales. Se ilustra el punto para un problema básico en el que interviene una ecuación diferencial ordinaria. (En el capítulo 11 se presentan numerosas aplicaciones en ecuaciones diferenciales parciales.)

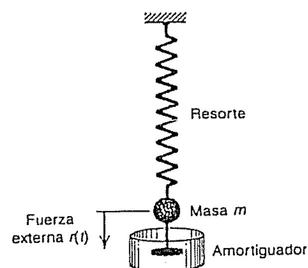


Figura 242. Sistema oscilatorio bajo consideración.

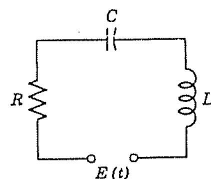


Figura 243. Análogo eléctrico del sistema de la figura 242 (circuito *RLC*).

Por la sección 2.11 se sabe que las oscilaciones forzadas de un cuerpo de masa m en un resorte de módulo k están gobernadas por la ecuación

(1) $$my'' + cy' + ky = r(t),$$

donde $y = y(t)$ es el desplazamiento a partir del reposo, c es la constante de amortiguamiento y $r(t)$ es la fuerza externa que depende del tiempo t. En la figura 242 se ilustra el modelo y en la figura 243 se presenta su análogo eléctrico, un circuito RLC gobernado por

(1*) $$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'(t)$$

(ver la sección 2.12).

Se considera (1). Si $r(t)$ es una función de senos o de cosenos y si hay amortiguamiento ($c > 0$), entonces la solución de estado estacionario es una oscilación armónica con frecuencia igual a la de $r(t)$. Sin embargo, si $r(t)$ no es una función de senos o de cosenos pura sino cualquier otra función periódica, entonces la solución de estado estacionario será una superposición de oscilaciones armónicas con frecuencias iguales a las de $r(t)$ y múltiplos enteros de esta última. Y si una de estas frecuencias está próxima a la frecuencia de resonancia del sistema oscilatorio (ver la sección 2.11), entonces la oscilación correspondiente puede ser la parte dominante de la respuesta del sistema a la fuerza externa. Esto es lo que pondrá de manifiesto el uso de series de Fourier; desde luego, esto resulta bastante sorprendente para un observador no familiarizado con la teoría subyacente, que es de gran importancia en el estudio de los sistemas oscilatorios y la resonancia. Se discute la situación global en términos de un ejemplo típico.

EJEMPLO 1 Oscilaciones forzadas bajo una fuerza impulsora periódica no senoidal

En (1), sean $m = 1$ (g), $c = 0.02$ (g/s) y $k = 25$ (g/s²), de tal modo que (1) queda

(2) $$y'' + 0.02y' + 25y = r(t)$$

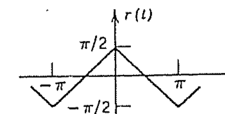


Figura 244. Fuerza en el ejemplo 1.

donde $r(t)$ se mide en g · cm/s². Sea (figura 244)

$$r(t) = \begin{cases} t + \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad -\pi < t < 0, \\ -t + \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad 0 < t < \pi, \end{cases} \qquad r(t + 2\pi) = r(t).$$

Encontrar la solución de estado estacionario $y(t)$.

Solución. Se representa $r(t)$ por una serie de Fourier, encontrándose

(3) $$r(t) = \frac{4}{\pi}\left(\cos t + \frac{1}{3^2}\cos 3t + \frac{1}{5^2}\cos 5t + \cdots\right)$$

(se toma $\pi/2$ menos la respuesta del problema 11 de la sección 10.5 con $L = \pi$). Entonces se considera la ecuación diferencial

(4) $$y'' + 0.02y' + 25y = \frac{4}{n^2\pi}\cos nt \qquad (n = 1, 3, \cdots)$$

cuyo segundo miembro es un solo término de la serie (3). Por la sección 2.11 se sabe que la solución de estado estacionario $y_n(t)$ de (4) es de la forma

(5) $$y_n = A_n \cos nt + B_n \operatorname{sen} nt.$$

Al sustituir esta expresión en (4) se encuentra que

(6) $$A_n = \frac{4(25 - n^2)}{n^2\pi D}, \qquad B_n = \frac{0.08}{n\pi D}, \qquad \text{donde} \qquad D = (25 - n^2)^2 + (0.02n)^2.$$

Puesto que la ecuación diferencial (2) es lineal, puede esperarse que la solución de estado estacionario sea

(7) $$y = y_1 + y_3 + y_5 + \cdots$$

donde y_n está dada por (5) y (6). De hecho, esto se establece de inmediato sustituyendo (7) en (2) y usando la serie de Fourier de $r(t)$, siempre que sea permisible la diferenciación término a término de (7). (Los lectores familiarizados con la noción de convergencia uniforme [sección 14.6] pueden demostrar que (7) puede diferenciarse término a término.)

Por (6) se encuentra que la amplitud de (5) es

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} = \frac{4}{n^2\pi\sqrt{D}}.$$

Valores numéricos son

$$C_1 = 0.0530$$
$$C_3 = 0.0088$$

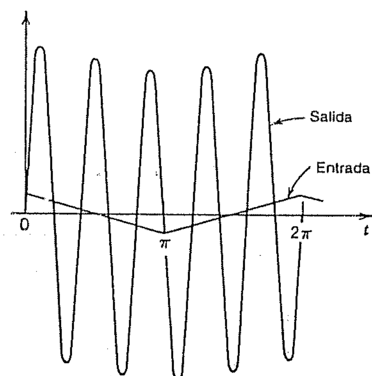


Figura 245. Entrada y salida de estado estacionario en el ejemplo 1.

$$\boxed{C_5 = 0.5100}$$
$$C_7 = 0.0011$$
$$C_9 = 0.0003.$$

Para $n = 5$ la cantidad D es muy pequeña, el denominador de C_5 es pequeño y C_5 es tan grande que y_5 es el término dominante en (7). Esto implica que el movimiento de estado estacionario es casi una oscilación armónica cuya frecuencia es igual a cinco veces la de la fuerza que causa la oscilación (figura 245). ∎

La aplicación de series de Fourier a sistemas oscilatorios más generales, a conducción de calor y a otros problemas se trata en el capítulo 11.

Problemas de la sección 10.7

1. ¿Qué ocurriría con las amplitudes C_n en el ejemplo 1 (y, por consiguiente con la forma de las oscilaciones) si se cambia la constante del resorte al valor 9? ¿Si se usa un resorte más rígido con $k = 49$? ¿Si se incrementa el amortiguamiento?

Encontrar una solución general de la ecuación diferencial $y'' + \omega^2 y = r(t)$, donde

2. $r(t) = \cos \alpha t + \cos \beta t \qquad (\omega^2 \neq \alpha^2, \beta^2)$
3. $r(t) = \operatorname{sen} t, \quad \omega = 0.5, 0.7, 0.9, 1.1, 1.5, 2.0, 10.0$
4. $r(t) = \operatorname{sen} t + \frac{1}{9}\operatorname{sen} 3t + \frac{1}{25}\operatorname{sen} 5t, \quad \omega = 0.5, 0.9, 1.1, 2, 2.9, 3.1, 4, 4.9, 5.1, 6, 8$
5. $r(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nt, \qquad |\omega| \neq 1, 2, \cdots, N$
6. $r(t) = \frac{\pi}{4}|\operatorname{sen} t|$ cuando $-\pi < t < \pi$ y $r(t + 2\pi) = r(t), |\omega| \neq 0, 2, 4, \cdots$
7. $r(t) = \begin{cases} t + \pi & \text{si } -\pi < t < 0 \\ -t + \pi & \text{si } 0 \leq t < \pi \end{cases}$ y $r(t + 2\pi) = r(t), |\omega| \neq 0, 1, 3, \cdots$
8. $r(t) = \begin{cases} t & \text{si } -\pi/2 < t < \pi/2 \\ \pi - t & \text{si } \pi/2 < t < 3\pi/2 \end{cases}$ y $r(t + 2\pi) = r(t), |\omega| \neq 1, 3, 5, \cdots$

Encontrar la oscilación de estado estacionario correspondiente a $y'' + cy' + y = r(t)$, donde $c > 0$ y

9. $r(t) = a_n \cos nt$
10. $r(t) = \sum_{n=1}^{N} b_n \operatorname{sen} nt$
11. $r(t) = \operatorname{sen} 3t$
12. $r(t) = \begin{cases} \pi t/4 & \text{si } -\pi/2 < t < \pi/2 \\ \pi(\pi - t)/4 & \text{si } \pi/2 < t < 3\pi/2 \end{cases}$ y $r(t + 2\pi) = r(t)$
13. $r(t) = \frac{t}{12}(\pi^2 - t^2)$ si $-\pi < t < \pi$ y $r(t + 2\pi) = r(t)$
14. **(Circuito *RLC*)** Encontrar la corriente de estado estacionario $I(t)$ en el circuito RLC de la figura 243, donde $R = 100$ ohms, $L = 10$ henrys, $C = 10^{-2}$ faradios.

$$E(t) = \begin{cases} 100(\pi t + t^2) & \text{si } -\pi < t < 0 \\ 100(\pi t - t^2) & \text{si } 0 < t < \pi \end{cases} \quad \text{y} \quad E(t + 2\pi) = E(t).$$

Proceder de la siguiente manera. Desarrollar $E(t)$ en una serie de Fourier. $I(t)$ aparecerá en la forma de una serie trigonométrica. Encontrar las fórmulas generales para los coeficientes de esta serie. Calcular valores numéricos de los primeros coeficientes. Graficar la suma de los primeros términos de esa serie.

15. Repetir el problema 14 con los mismos valores de R, L, C y $E(t) = 200t(\pi^2 - t^2)$ volts si $-\pi < t < \pi$ y $E(t + 2\pi) = E(t)$.

10.8 APROXIMACIÓN POR POLINOMIOS TRIGONOMÉTRICOS

Un campo principal de aplicación de las series de Fourier es en ecuaciones diferenciales, como ya se mencionó. Otra área de interés práctico en que las series de Fourier desempeñan un papel principal es la aproximación de funciones por medio de funciones más simples, área conocida como **teoría de aproximaciones**, como se explica a continuación.

Sea $f(x)$ una función de periodo 2π que puede representarse por una serie de Fourier. Entonces la N-ésima suma parcial de esta serie es una aproximación a $f(x)$:

$$(1) \qquad f(x) \approx a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx).$$

Es natural preguntarse si (1) es la "mejor" aproximación a f por un **polinomio trigonométrico** *de grado N* (N fija), es decir, una función de la forma

$$(2) \qquad F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \operatorname{sen} nx),$$

donde "mejor" significa que el "error" de la aproximación es mínimo.

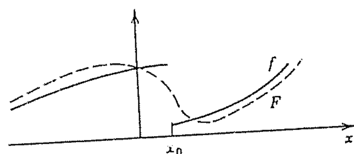


Figura 246. Error de aproximación.

Desde luego, debe definirse primero qué se entiende por el error E de esta aproximación. Desearía elegirse una definición que mida la bondad de la concordancia entre f y F *en el intervalo completo* $-\pi \leqq x \leqq \pi$. Evidentemente, el máximo de $|f-F|$ no es adecuado para este fin: en la figura 246, la función F es una buena aproximación de f, pero $|f-F|$ es grande cerca de x_0. Se elige

(3) $$E = \int_{-\pi}^{\pi} (f - F)^2\, dx.$$

Éste es el llamado **error cuadrático total** de F con relación a la función f en el intervalo $-\pi \leqq x \leqq \pi$. Obviamente, $E \geqq 0$.

Con N fija, quieren determinarse los coeficientes de (2) tales que E sea mínimo. Puesto que $(f-F)^2 = f^2 - 2fF + F^2$, se tiene

(4) $$E = \int_{-\pi}^{\pi} f^2\, dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} fF\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} F^2\, dx.$$

Al introducir (2) en la última integral y evaluando las integrales presentes como en la sección 10.2, se observa que todos los términos $\cos^2 nx$ y $\operatorname{sen}^2 nx$ $(n \geqq 1)$ tienen integral π y todos los "términos mixtos" $(\cos nx)(\operatorname{sen} mx)$ tienen integral cero. Por tanto

$$\int_{-\pi}^{\pi} F^2\, dx = \pi(2\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_N^2 + \beta_1^2 + \cdots + \beta_N^2).$$

Al introducir (2) en la segunda integral de (4), se observa que las integrales presentes son las de las fórmulas de Euler (6), sección 10.2, y por tanto se obtiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} fF\, dx = \pi(2\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_N a_N + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_N b_N).$$

Con estas expresiones (4) queda

(5) $$E = \int_{-\pi}^{\pi} f^2\, dx - 2\pi\left[2\alpha_0 a_0 + \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n a_n + \beta_n b_n)\right] + \pi\left[2\alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n^2 + \beta_n^2)\right].$$

Si se toma $\alpha_n = a_n$ y $\beta_n = b_n$ en (2), entonces por (5) se ve que el error cuadrático correspondiente a esta elección de los coeficientes de F está dado por

(6) $$E^* = \int_{-\pi}^{\pi} f^2\, dx - \pi\left[2a_0^2 + \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2)\right].$$

Al restar (6) de (5) se obtiene

$$E - E^* = \pi\left\{2(\alpha_0 - a_0)^2 + \sum_{n=1}^{N} [(\alpha_n - a_n)^2 + (\beta_n - b_n)^2]\right\}.$$

Puesto que la suma de los cuadrados de números reales en el segundo miembro no puede ser negativa,

$$E - E^* \geqq 0, \quad \text{por tanto} \quad E \geqq E^*,$$

y $E = E^*$ si y sólo si $\alpha_0 = a_0, \cdots, \beta_N = b_N$. Se demuestra así

Teorema 1 (Error cuadrático mínimo)

El error cuadrático total de F en (2) (con N fija) respecto de f en el intervalo $-\pi \leqq x \leqq \pi$ es mínimo si y sólo si los coeficientes de F en (2) son los coeficientes de Fourier de f. Este valor mínimo está dado por (6).

Por (6) se observa que E^* no puede incrementarse cuando N se incrementa, pero sí puede decrementarse. Por tanto, *con N creciente, las sumas parciales de la serie de Fourier de f dan aproximaciones cada vez mejores a f,* consideradas desde el punto de vista del error cuadrático.

Puesto que $E^* \geq 0$ y (6) es válida para toda N, a partir de (6) se obtiene la importante **desigualdad de Bessel**[10]

(7) $$2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leqq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\, dx$$

para los coeficientes de Fourier de cualquier función f para la que la integral del segundo miembro exista.

[10] Ver la nota de pie de página 12 en la sección 5.5.

Puede demostrarse (ver [C14]) que para esta función f, el **teorema de Parseval** es válido, es decir, la fórmula (7) es válida con el signo de igualdad, por lo que da lugar a la **"identidad de Parseval"**[11]

$$2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx. \qquad (8)$$

EJEMPLO 1 Error cuadrático de la onda diente de sierra

Calcular el error cuadrático total de F con $N = 3$ respecto a

$$f(x) = x + \pi \quad (-\pi < x < \pi) \qquad \text{(Fig. 238a, Sec. 10.4)}$$

en el intervalo $-\pi \leqq x \leqq \pi$.

Solución. $F(x) = \pi + 2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x + \frac{2}{3} \operatorname{sen} 3x$ por el ejemplo 2, sección 10.4. A partir de lo anterior y de (6),

$$E^* = \int_{-\pi}^{\pi} (x + \pi)^2 \, dx - \pi[2\pi^2 + 2^2 + 1^2 + (\tfrac{2}{3})^2],$$

por tanto

$$E^* = \tfrac{8}{3}\pi^3 - \pi(2\pi^2 + \tfrac{49}{9}) \approx 3.567.$$

$F = S_3$ se ilustra en la figura 238b y aun cuando $|f(x) - F(x)|$ es grande en $x = \pm\pi$ (¿qué tan grande?), donde f es discontinua, F es una buena aproximación a f en el intervalo completo. ∎

Se llega así al final de la discusión de las series de Fourier, en la que se ha hecho hincapié en los aspectos prácticos de estas series, como se necesita en las aplicaciones. En las cuatro últimas secciones de este capítulo se muestra la manera en que las ideas y técnicas de las series de Fourier pueden generalizarse a funciones no periódicas.

Problemas de la sección 10.8

1. Sea $f(x) = -1$ si $-\pi < x < 0$, $f(x) = 1$ si $0 < x < \pi$ y sea periódica con 2π. Encontrar la función $F(x)$ de la forma (2) para la que el error cuadrático total (3) es mínimo.
2. Calcular el error cuadrático mínimo en el problema 1 para $N = 1, 3, 5, 7$. ¿Cuál es la menor N tal que $E^* \leqq 0.2$?
3. Demostrar que el error cuadrático mínimo (6) es una función monótona decreciente de N.

En cada caso, encontrar la función $F(x)$ de la forma (2) para la que el error cuadrático total E en el intervalo $-\pi \leqq x \leqq \pi$ es mínimo y calcular este valor mínimo para $N = 1, 2, \cdots, 5$, donde, para $-\pi < x < \pi$,

4. $f(x) = |x|$
5. $f(x) = x$
6. $f(x) = x(\pi^2 - x^2)/12$
7. $f(x) = x^2$
8. $f(x) = -\pi - x$ si $-\pi < x < -\pi/2$, $f(x) = x$ si $-\pi/2 < x < \pi/2$, $f(x) = \pi - x$ si $\pi/2 < x < \pi$
9. $f(x) = x$ si $-\pi/2 < x < \pi/2$, $f(x) = 0$ en cualquier parte de $-\pi < x < \pi$

[11] MARC ANTOINE PARSEVAL (1755-1836), matemático francés. En la siguiente sección se presenta [illegible]

10. Comparar la rapidez del decremento del error cuadrático para la función discontinua del problema 5 y la función continua del problema 7 y comentar el resultado.

Usando la identidad de Parseval, demostrar que

11. $1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{96}$ (Usar el problema 27 de la sección 10.4.)
12. $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$ (Usar el problema 5 de la sección 10.2.)
13. $1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}$ (Usar el problema 9 de la sección 10.2.)
14. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^4 x \, dx = \frac{3\pi}{4}$
15. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^6 x \, dx = \frac{5\pi}{8}$

10.9 INTEGRALES DE FOURIER

Las series de Fourier son poderosas herramientas para abordar varios problemas en los que intervienen funciones *periódicas*. La sección 10.7 incluyó una primera ilustración de este hecho y en el capítulo 11 se presentan varias aplicaciones más. Puesto que, desde luego, en muchos problemas prácticos intervienen **funciones no periódicas**, surge la pregunta de qué puede hacerse para generalizar el método de las series de Fourier para tales funciones. Este es el objetivo de la presente sección. En el ejemplo 1 se empieza con una función especial $f_L(x)$ de periodo $2L$ y se observa lo que ocurre con su serie de Fourier si se hace que $L \to \infty$. Después se considera la serie de Fourier de una función arbitraria f_L de periodo $2L$ y se hace de nuevo que $L \to \infty$. Esto motivará y sugerirá el resultado principal de esta sección, una representación en integrales en el teorema 1 (p.60).

EJEMPLO 1 Onda cuadrada

Considérese la onda cuadrada periódica $f_L(x)$ de periodo $2L > 2$ dada por

$$f_L(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -L < x < -1 \\ 1 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 < x < L. \end{cases}$$

La parte izquierda de la figura 247 ilustra esta función para $2L = 4, 8, 16$ así como la función no periódica

$$f(x) = \lim_{L \to \infty} f_L(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

que se obtiene a partir de f_L si se hace que $L \to \infty$.

Se explora ahora lo que ocurre con los coeficientes de Fourier de f_L cuando L se incrementa. Puesto que f_L es par, $b_n = 0$ para toda n. Para a_n las fórmulas de Euler (2), sección 10.3, dan como resultado

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-1}^{1} dx = \frac{1}{L}, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-1}^{1} \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx = \frac{2}{L} \int_{0}^{1} \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx = \frac{2}{L} \frac{\operatorname{sen}(n\pi/L)}{n\pi/L}.$$

Esta sucesión de coeficientes de Fourier se llama el **espectro de la amplitud** de f_L ya que $|a_n|$ es la [illegible]

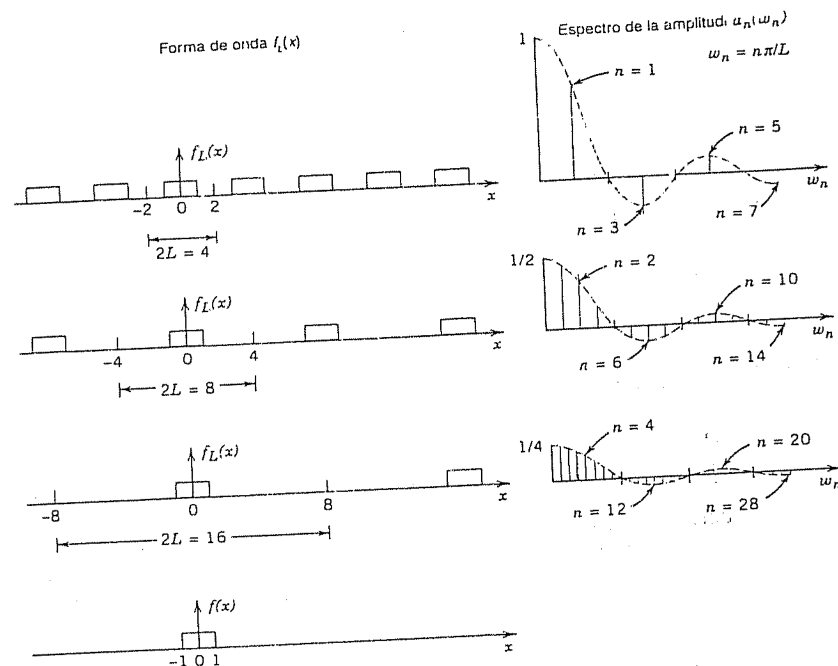


Figura 247. Formas de onda y espectros de amplitud del ejemplo 1.

$2L = 4, 8, 16$. Se observa que para L creciente las amplitudes se hacen cada vez más densas sobre el eje w_n positivo, donde $w_n = n\pi/L$. De hecho, para $2L = 4, 8, 16$ se tienen 1, 3, 7 amplitudes por "media onda" de la función $(2 \operatorname{sen} w_n)/Lw_n$ (línea discontinua en la figura). Por tanto, para $2L = 2^k$ se tienen $2^{k-1} - 1$ amplitudes por media onda, por lo que estas amplitudes serán en última instancia densas sobre todo el eje w_n positivo (y se decrementarán a cero). ∎

Se considera ahora cualquier función periódica $f_L(x)$ de periodo $2L$ que puede representarse por una serie de Fourier

$$f_L(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos w_n x + b_n \operatorname{sen} w_n x), \qquad w_n = \frac{n\pi}{L},$$

y se averigua qué ocurre si se hace que $L \to \infty$. Junto con el ejemplo anterior, el presente cálculo sugerirá que debería esperarse una integral (en lugar de una serie) que incluye $\cos wx$ y $\operatorname{sen} wx$ con w dejando de estar restringida a múltiplos enteros $w = w_n = n\pi/L$ sino asumiendo *todos* los valores, y se verá asimismo qué forma podría tener dicha integral.

Si se introducen a_n y b_n de las fórmulas de Euler (2), sección 10.3, y se denota por v la variable de integración, la serie de Fourier de $f_L(x)$ queda

$$f_L(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(v)\,dv + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos w_n x \int_{-L}^{L} f_L(v)\cos w_n v\,dv + \operatorname{sen} w_n x \int_{-L}^{L} f_L(v) \operatorname{sen} w_n v\,dv\right].$$

Se hace ahora

$$\Delta w = w_{n+1} - w_n = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L}.$$

Entonces $1/L = \Delta w/\pi$ y la serie de Fourier puede escribirse en la forma

$$(1)\qquad f_L(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(v)\,dv + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(\cos w_n x)\,\Delta w \int_{-L}^{L} f_L(v)\cos w_n v\,dv + (\operatorname{sen} w_n x)\,\Delta w \int_{-L}^{L} f_L(v) \operatorname{sen} w_n v\,dv\right].$$

Esta representación es válida para cualquier L fija, arbitrariamente grande, pero finita.

Ahora se hace que $L \to \infty$ y se supone que la función no periódica resultante

$$f(x) = \lim_{L\to\infty} f_L(x)$$

es **absolutamente integrable** sobre el eje x; es decir, que existen los siguientes límites (¡finitos!):

$$(2)\qquad \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 |f(x)|\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^b |f(x)|\,dx \quad \left(\text{denotado } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx\right).$$

Entonces $1/L \to 0$, y el valor del primer término del segundo miembro de (1) tiende a cero. Además, $\Delta w = \pi/L \longrightarrow 0$ y parece ***plausible*** que la serie infinita de (1) se convierta en una integral de 0 a ∞, que representa $f(x)$, a saber,

$$(3)\qquad f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\cos wx \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv\,dv + \operatorname{sen} wx \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\operatorname{sen} wv\,dv\right] dw.$$

Si se introducen las notaciones

$$(4)\quad A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv\, dv, \qquad B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\,\text{sen}\, wv\, dv,$$

esta expresión puede escribirse en la forma

$$(5)\quad f(x) = \int_0^{\infty} [A(w)\cos wx + B(w)\,\text{sen}\, wx]\, dw.$$

Esta es una representación de $f(x)$ por la llamada **integral de Fourier.**

Resulta evidente que el enfoque intuitivo adoptado tan sólo ***sugiere*** la representación (5), pero en modo alguno la establece; de hecho, el límite de la serie en (1) cuando Δw tiende a cero no es la definición de la integral (3). Las condiciones suficientes para la validez de (5) son las siguientes.

Teorema 1 (Integral de Fourier)

Si $f(x)$ es continua por secciones (ver la sección 6.1) *en todo intervalo finito y tiene una derivada por la izquierda y una derivada por la derecha en todo punto* (ver la sección 10.2) *y si la integral* (2) *existe, entonces $f(x)$ puede representarse por una integral de Fourier* (5). *En cualquier punto donde $f(x)$ sea discontinua, el valor de la integral de Fourier es igual al promedio de los límites por la izquierda y por la derecha de $f(x)$ en ese punto* (ver la sección 10.2). (La demostración se presenta en la referencia [C14]; ver el apéndice 1.)

El uso principal de la integral de Fourier es en la solución de ecuaciones diferenciales, como se verá en la sección 11.14. Sin embargo, también puede usarse la integral de Fourier en la integración y discusión de funciones definidas por integrales, como se ilustra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 2 Pulso sencillo, integral de seno

Encontrar la representación por la integral de la función (figura 248)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| < 1, \\ 0 & \text{si} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

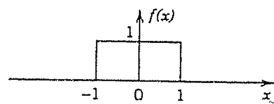


Figura 248. Ejemplo 2.

Solución. Por (4) se obtiene

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv\, dv = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos wv\, dv = \frac{\text{sen}\, wv}{\pi w}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2\,\text{sen}\, w}{\pi w},$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\text{sen}\, wv\, dv = 0,$$

y (5) da la respuesta

$$(6)\quad f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos wx\ \text{sen}\, w}{w}\, dw.$$

El promedio de los límites por la izquierda y por la derecha de $f(x)$ en $x = 1$ es igual a $(1 + 0)/2$, es decir, $1/2$.

Además, por (6) y el teorema 1 se obtiene

$$(7^*)\quad \int_0^{\infty}\frac{\cos wx\ \text{sen}\, w}{w}\, dw = \begin{cases} \pi/2 & \text{si} \quad 0 \leqq x < 1, \\ \pi/4 & \text{si} \quad x = 1, \\ 0 & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

Cabe mencionar que esta integral es el llamado **factor discontinuo de Dirichlet.**[12] Se considera ahora el caso $x = 0$, que es de particular interés. Si $x = 0$, entonces

$$(7)\quad \int_0^{\infty}\frac{\text{sen}\, w}{w}\, dw = \frac{\pi}{2}.$$

Se observa que esta integral es el límite de la llamada **integral de seno**

$$(8)\quad \text{Si}(z) = \int_0^{z}\frac{\text{sen}\, w}{w}\, dw$$

cuando $z \to \infty$ (z real). La gráfica de $\text{Si}(z)$ se muestra en la figura 249.

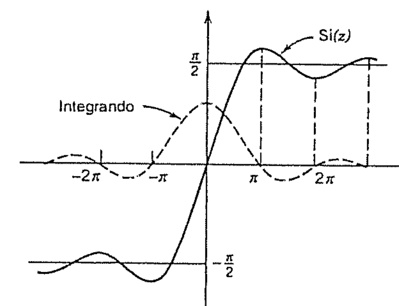


Figura 249. Integral de seno $\text{Si}(z)$

[12] Ver nota de pie de página 16 de la sección 9.8.

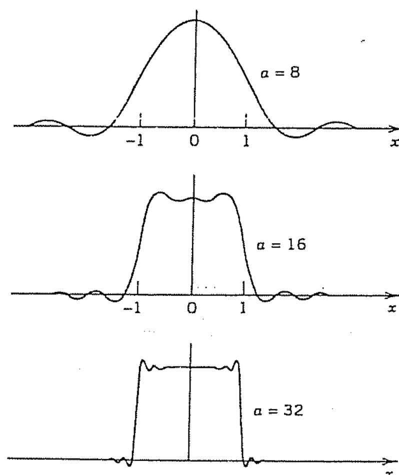


Figura 250. La integral (9) para $a = 8$, 16 y 32.

En el caso de una serie de Fourier, las gráficas de las sumas parciales son curvas de aproximación de la curva de la función periódica representada por la serie. De manera similar, en el caso de la integral de Fourier (5), las aproximaciones se obtienen sustituyendo ∞ por números a. Por tanto, la integral

$$(9) \qquad \int_0^a \frac{\cos wx \, \operatorname{sen} w}{w} \, dw$$

es una aproximación a la integral en (6) y por lo tanto a $f(x)$; ver la figura 250.

La figura 250 muestra las oscilaciones cerca de los puntos de discontinuidad de $f(x)$. Podría esperarse que estas oscilaciones desaparecieran cuando a tiende a infinito, pero no es este el caso; con a creciente éstas cambian acercándose a puntos $x = \pm 1$. Este comportamiento inesperado, que ocurre también en relación con la serie de Fourier, se conoce como el **fenómeno de Gibbs**.[11] Puede explicarse al representar (9) en términos de la integral de seno de la siguiente manera. Usando (11) del apéndice 3, se tiene

$$\frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{\cos wx \, \operatorname{sen} w}{w} \, dw = \frac{1}{\pi}\int_0^a \frac{\operatorname{sen}(w + wx)}{w} \, dw + \frac{1}{\pi}\int_0^a \frac{\operatorname{sen}(w - wx)}{w} \, dw.$$

En la primera integral del segundo miembro se hace $w + wx = t$. Entonces $dw/w = dt/t$ y $0 \leqq w \leqq a$ corresponde a $0 \leqq t \leqq (x + 1)a$. En la ultima integral se hace $w - wx = -t$. Entonces $dw/w = dt/t$ y $0 \leqq w \leqq a$ corresponde a $0 \leqq t \leqq (x - 1)a$. Puesto que $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$, se obtiene

$$\frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{\cos wx \, \operatorname{sen} w}{w} \, dw = \frac{1}{\pi}\int_0^{(x+1)a} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \, dt - \frac{1}{\pi}\int_0^{(x-1)a} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \, dt.$$

[11] JOSIAH WILLARD GIBBS (1839-1903), matemático estadounidense, profesor de física matemática en Yale desde 1897, uno de los fundadores del cálculo vectorial [otro fue O. Heaviside (ver la sección 6.1)], termodinámica matemática y mecánica estadística. Su trabajo fue de gran importancia en el desarrollo de la física matemática.

A partir de esta expresión y de (8) se observa que la integral considerada es igual a

$$\frac{1}{\pi}\operatorname{Si}(a[x + 1]) - \frac{1}{\pi}\operatorname{Si}(a[x - 1]),$$

y las oscilaciones de la figura 250 resultan de las de la figura 249. El incremento de a equivale a una transformación de la escala sobre el eje y ocasiona el cambio de las oscilaciones. ∎

Integrales de Fourier de cosenos y de senos

Para una función par o impar, la integral de Fourier se hace más simple. Como en el caso de la serie de Fourier (sección 10.4), esto es de interés práctico para ahorrar trabajo y evitar errores. Las simplificaciones se siguen inmediatamente de las fórmulas que acaban de obtenerse.

De hecho, si $f(x)$ es una función par, entonces $B(w) = 0$ en (4) y

$$(10) \qquad A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v) \cos wv \, dv,$$

y la integral de Fourier (5) se reduce a la llamada **integral de Fourier de coseno**

$$(11) \qquad f(x) = \int_0^\infty A(w) \cos wx \, dw \qquad (f \text{ par})$$

De manera similar, si $f(x)$ es impar, entonces en (4) se tiene $A(w) = 0$ y

$$(12) \qquad B(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v) \operatorname{sen} wv \, dv,$$

y la integral de Fourier (5) se reduce a la llamada **integral de Fourier de seno**

$$(13) \qquad f(x) = \int_0^\infty B(w) \operatorname{sen} wx \, dw \qquad (f \text{ impar})$$

Evaluación de integrales

Las representaciones en integrales de Fourier también pueden usarse para evaluar integrales. Se ilustra este método con un ejemplo típico.

EJEMPLO 3 Integrales de Laplace

Encontrar las integrales de Fourier de coseno y de seno de

$$f(x) = e^{-kx} \qquad (x > 0, \ k > 0).$$

Solución. (a) Por (10) se tiene

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-kv}\cos wv\,dv.$$

Entonces, al integrar por partes,

$$\int e^{-kv}\cos wv\,dv = -\frac{k}{k^2+w^2}e^{-kv}\left(-\frac{w}{k}\operatorname{sen} wv + \cos wv\right).$$

Si $v = 0$, la expresión del segundo miembro es $-k/(k^2+w^2)$; si v tiende a infinito, dicha expresión tiende a cero debido al factor exponencial. Por tanto,

(14) $$A(w) = \frac{2k/\pi}{k^2+w^2}.$$

Al sustituir este resultado en (11) se obtiene la representación en una integral de Fourier de coseno

$$f(x) = e^{-kx} = \frac{2k}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos wx}{k^2+w^2}\,dw \qquad (x>0,\ k>0).$$

A partir de esta representación se observa que

(15) $$\int_0^\infty \frac{\cos wx}{k^2+w^2}\,dw = \frac{\pi}{2k}e^{-kx} \qquad (x>0,\ k>0).$$

(b) De manera similar, por (12) se tiene

$$B(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-kv}\operatorname{sen} wv\,dv.$$

Al integrar por partes,

$$\int e^{-kv}\operatorname{sen} wv\,dv = -\frac{w}{k^2+w^2}e^{-kv}\left(\frac{k}{w}\operatorname{sen} wv + \cos wv\right).$$

Esto es igual a $-w/(k^2+w^2)$ si $v = 0$, y tiende a 0 cuando $v \to \infty$. Por tanto

(16) $$B(w) = \frac{2w/\pi}{k^2+w^2}.$$

Así, por (13) se obtiene la representación en una integral de seno de Fourier

$$f(x) = e^{-kx} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{w\operatorname{sen} wx}{k^2+w^2}\,dw.$$

A partir de este resultado se observa que

(17) $$\int_0^\infty \frac{w\operatorname{sen} wx}{k^2+w^2}\,dw = \frac{\pi}{2}e^{-kx} \qquad (x>0,\ k>0).$$

Las integrales (15) y (17) son las llamadas **integrales de Laplace**. ■

Problemas de la sección 10.9

Usando la representación en integrales de Fourier, demostrar que

1. $$\int_0^\infty \frac{\cos xw + w\operatorname{sen} xw}{1+w^2}\,dw = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \pi/2 & \text{si } x=0 \\ \pi e^{-x} & \text{si } x>0 \end{cases}$$ [Usar (5).]

2. $$\int_0^\infty \frac{w^3\operatorname{sen} xw}{w^4+4}\,dw = \frac{\pi}{2}e^{-x}\cos x \quad \text{si } x>0$$ [Usar (13).]

3. $$\int_0^\infty \frac{\cos xw}{1+w^2}\,dw = \frac{\pi}{2}e^{-x} \quad \text{si } x>0$$ [Usar (11).]

4. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} w\cos xw}{w}\,dw = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } 0\leqq x<1 \\ \pi/4 & \text{si } x=1 \\ 0 & \text{si } x>1 \end{cases}$$ [Usar (11).]

5. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \pi w\operatorname{sen} xw}{1-w^2}\,dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\operatorname{sen} x & \text{si } 0\leqq x\leqq \pi \\ 0 & \text{si } x>\pi \end{cases}$$ [Usar (13).]

6. $$\int_0^\infty \frac{1-\cos \pi w}{w}\operatorname{sen} xw\,dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } 0<x<\pi \\ 0 & \text{si } x>\pi \end{cases}$$ [Usar (13).]

7. $$\int_0^\infty \frac{\cos(\pi w/2)\cos xw}{1-w^2}\,dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos x & \text{si } |x|<\frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } |x|>\frac{\pi}{2} \end{cases}$$ [Usar (11).]

Representar las siguientes funciones $f(x)$ en la forma (11).

8. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0<x<1 \\ 0 & \text{si } x>1 \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0<x<1 \\ 0 & \text{si } x>1 \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } 0<x<1 \\ 1-x/2 & \text{si } 1<x<2 \\ 0 & \text{si } x>2 \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0<x<a \\ 0 & \text{si } x>a \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} a^2-x^2 & \text{si } 0<x<a \\ 0 & \text{si } x>a \end{cases}$

13. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ [ver (15)]

14. $f(x) = e^{-x} + e^{-2x} \quad (x>0)$

Si $f(x)$ tiene la representación (11), demostrar que

15. $$f(ax) = \frac{1}{a}\int_0^\infty A\left(\frac{w}{a}\right)\cos xw\,dw \quad (a>0)$$

16. $$xf(x) = \int_0^\infty B^*(w)\operatorname{sen} xw\,dw, \quad B^* = -\frac{dA}{dw}, \quad A \text{ como en (10)}$$

17. $$x^2f(x) = \int_0^\infty A^*(w)\cos xw\,dw, \quad A^* = -\frac{d^2A}{dw^2}$$

18. Resolver el problema 9 aplicando la fórmula del problema 17 al resultado del problema 8.
19. Comprobar la fórmula del problema 16 para $f(x) = 1$ si $0 < x < a$ y $f(x) = 0$ si $x > a$.
20. Demostrar que $f(x) = 1$ $(0 < x < \infty)$ no puede representarse con una integral de Fourier.

10.10 TRANSFORMADAS DE FOURIER DE COSENOS Y DE SENOS

Una **transformada integral** es una transformación que a partir de funciones dadas produce nuevas funciones que dependen de una variable diferente y aparecen en la forma de una integral. Estas transformaciones son de interés principalmente como herramientas para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones diferenciales parciales y ecuaciones integrales, y con frecuencia también son de ayuda en el manejo y aplicación de funciones especiales. La **transformada de Laplace** (capítulo 6) es de esta clase y es con mucho la transformada integral más importante en ingeniería. Desde el punto de vista de las aplicaciones, las siguientes en importancia serían quizás las **transformadas de Fourier**, aun cuando su manejo resulta un tanto más difícil que la transformada de Laplace. Se verá que dichas transformadas pueden obtenerse a partir de representaciones en integrales de Fourier de la sección 10.9. En esta sección se consideran dos de ellas, llamadas las *transformadas de Fourier de coseno* y *de seno*, las cuales son reales, y en la siguiente sección se trata una tercera, que es compleja.

Transformadas de Fourier de coseno

Para cualquier función $f(x)$ ***par***, la integral de Fourier es la integral de Fourier de coseno

$$(1)\quad \text{(a)}\ f(x) = \int_0^\infty A(w)\cos wx\,dw, \quad \text{donde} \quad \text{(b)}\ A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\cos wv\,dv$$

[ver (10), (11), sección 10.9]. Se hace ahora $A(w) = \sqrt{2/\pi}\ \hat{f}_c(w)$, donde c sugiere "coseno". Entonces por (1b), al escribir $v = x$, se tiene

$$(2)\qquad \hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos wx\,dx$$

y por (1a),

$$(3)\qquad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_c(w)\cos wx\,dw.$$

¡Atención! En (2) se integra con respecto a x y en (3) con respecto a w. A partir de $f(x)$, la fórmula (2) da una nueva función $\hat{f}_c(w)$, llamada la **transformada de Fourier de coseno** de $f(x)$. La fórmula (3) permite regresar a $f(x)$ a partir de $\hat{f}_c(w)$ y, por lo tanto, a $f(x)$ se le llama la **transformada de coseno inversa de Fourier** de $\hat{f}_c(w)$.

El proceso para obtener la transformada $\hat{f}_c$ a partir de una f dada también se llama la **transformación de Fourier de coseno** o el *método de la transformación de Fourier de coseno*.

Transformadas de Fourier de seno

De manera similar, para una función $f(x)$ ***impar***, la integral de Fourier es la integral de Fourier de seno [ver (12), (13), sección 10.9]

$$(4)\quad \text{(a)}\ f(x) = \int_0^\infty B(w)\,\text{sen}\,wx\,dw, \quad \text{donde} \quad \text{(b)}\ B(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\,\text{sen}\,wv\,dv.$$

Se hace ahora $B(w) = \sqrt{2/\pi}\ \hat{f}_s(w)$, donde s sugiere "seno". Entonces por (4b), al escribir $v = x$, se tiene

$$(5)\qquad \hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\,\text{sen}\,wx\,dx,$$

llamada la **transformada de Fourier de seno** de $f(x)$, y por (4a)

$$(6)\qquad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_s(w)\,\text{sen}\,wx\,dw,$$

llamada la **transformada de seno inversa de Fourier** de $\hat{f}_s(w)$. Al proceso de obtener $\hat{f}_s(w)$ a partir de $f(x)$ también se le llama la **transformación de Fourier de seno** o el *método de la transformación de Fourier de seno*.

Otras notaciones son

$$\mathcal{F}_c(f) = \hat{f}_c, \qquad \mathcal{F}_s(f) = \hat{f}_s$$

y $\mathcal{F}_c^{-1}$ y $\mathcal{F}_s^{-1}$ para las inversas de $\mathcal{F}_c$ y $\mathcal{F}_s$, respectivamente.

EJEMPLO 1 Transformadas de Fourier de coseno y de seno

Encontrar las transformadas de Fourier de coseno y de seno de la función

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{si}\quad 0 < x < a \\ 0 & \text{si}\quad x > a. \end{cases}$$

Solución. A partir de las definiciones (2) y (5) por integración se obtiene

$$\hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,k\int_0^a \cos wx\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,k\left[\frac{\text{sen}\,aw}{w}\right].$$

$$\hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,k\int_0^a \text{sen}\,wx\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,k\left[\frac{1-\cos aw}{w}\right].$$

Este resultado concuerda con las fórmulas 1 de las dos primeras tablas de la sección 10.12 (donde $k = 1$).

Obsérvese que para $f(x) = k = const$ $(0 < x < \infty)$ estas transformadas no existen. (¿Por qué?) ∎

EJEMPLO 2 Transformada de Fourier de coseno de la función exponencial

Encontrar $\mathcal{F}_c(e^{-x})$.

Solución. Por integración por partes y recurrencia.

$$\mathcal{F}_c(e^{-x}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-x}\cos wx\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-x}}{1+w^2}(-\cos wx + w\,\mathrm{sen}\,wx)\Big|_0^{\infty} = \frac{\sqrt{2/\pi}}{1+w^2}.$$

Este resultado concuerda con la fórmula 3 de la tabla I, sección 10.12, con $a = 1$. ∎

¿Qué se ha hecho a fin de introducir las dos transformadas integrales bajo consideración? No mucho en realidad: Se han cambiado las notaciones A y B para obtener una distribución "simétrica" de la constante $2/\pi$ en las fórmulas originales (10)-(13), sección 10.9. Esta redistribución es una convención común, pero no es esencial. También podría hacerse sin ella.

¿Qué se ha ganado? Se demuestra en seguida que estas transformadas tienen propiedades operacionales que les permiten convertir diferenciaciones en operaciones algebraicas (como la transformada de Laplace). Esta es la clave de su aplicación en la solución de ecuaciones diferenciales.

Linealidad, transformadas de derivadas

Si $f(x)$ es absolutamente integrable (ver la sección 10.9) en el eje x positivo y es continua por secciones (ver la sección 6.1) en todo intervalo finito, entonces las transformadas de Fourier de coseno y de seno de f existen.

Además, para una función $af(x) + bg(x)$ se tiene por (2)

$$\mathcal{F}_c(af + bg) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}[af(x) + bg(x)]\cos wx\,dx$$

$$= a\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos wx\,dx + b\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} g(x)\cos wx\,dx.$$

El segundo miembro es $a\mathcal{F}_c(f) + b\mathcal{F}_c(g)$. Por (5) se llega a una expresión análoga para $\mathcal{F}_s$. Se demuestra así que las transformadas de Fourier de coseno y de seno son **operaciones lineales,**

(7)
(a) $\mathcal{F}_c(af + bg) = a\mathcal{F}_c(f) + b\mathcal{F}_c(g)$,
(b) $\mathcal{F}_s(af + bg) = a\mathcal{F}_s(f) + b\mathcal{F}_s(g)$.

Teorema 1 (Transformadas coseno y seno de derivadas)

Sea $f(x)$ continua y absolutamente integrable en el eje x, sea $f'(x)$ continua por secciones en todo intervalo finito y sea que $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. Entonces

(8)
(a) $\mathcal{F}_c\{f'(x)\} = w\mathcal{F}_s\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)$,
(b) $\mathcal{F}_s\{f'(x)\} = -w\mathcal{F}_c\{f(x)\}$.

Demostración. Esto se sigue de las definiciones al integrar por partes, a saber,

$$\mathcal{F}_c\{f'(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f'(x)\cos wx\,dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[f(x)\cos wx\Big|_0^{\infty} + w\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{sen}\,wx\,dx\right]$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0) + w\mathcal{F}_s\{f(x)\};$$

de manera similar,

$$\mathcal{F}_s\{f'(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f'(x)\,\mathrm{sen}\,wx\,dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[f(x)\,\mathrm{sen}\,wx\Big|_0^{\infty} - w\int_0^{\infty} f(x)\cos wx\,dx\right]$$

$$= 0 - w\mathcal{F}_c\{f(x)\}.$$ ∎

La fórmula (8a) con f' en lugar de f da como resultado

$$\mathcal{F}_c\{f''(x)\} = w\mathcal{F}_s\{f'(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0);$$

en consecuencia, por (8b),

(9a) $$\mathcal{F}_c\{f''(x)\} = -w^2\mathcal{F}_c\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0).$$

De manera similar,

(9b) $$\mathcal{F}_s\{f''(x)\} = -w^2\mathcal{F}_s\{f(x)\} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}wf(0).$$

Una aplicación de (9) a ecuaciones diferenciales se presentará en la sección 11.14. Por el momento, se indica cómo puede usarse (9) para derivar transformadas.

EJEMPLO 3 Una aplicación de la fórmula operacional (9)

Encontrar la transformada de Fourier de coseno de $f(x) = e^{-ax}$, donde $a > 0$.

Solución. Por diferenciación, $(e^{-ax})'' = a^2e^{-ax}$; por tanto, $a^2f(x) = f''(x)$. A partir de esta expresión y de (9a),

$$a^2\mathcal{F}_c(f) = \mathcal{F}_c(f'') = -w^2\mathcal{F}_c(f) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0) = -w^2\mathcal{F}_c(f) + a\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Por tanto, $(a^2 + w^2)\mathcal{F}_c(f) = a\sqrt{2/\pi}$. La respuesta es (ver la tabla I, sección 10.12)

$$\mathcal{F}_c(e^{-ax}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{a}{a^2 + w^2}\right) \qquad (a > 0).$$

En la sección 10.12 se incluyen **tablas** de transformadas de Fourier de coseno y de seno. Para tablas más extensas, ver la referencia [C4] en el apéndice 1.

Problemas de la sección 10.10

1. Sea $f(x) = -1$ si $0 < x < 1$, $f(x) = 1$ si $1 < x < 2$. Encontrar $\hat{f}_c(w)$.
2. Deducir $f(x)$ del problema 1 a partir de la respuesta del mismo. *Sugerencia.* Usar el problema 4 de la sección 10.9.
3. Encontrar la transformada de Fourier de coseno de $f(x) = x$ si $0 < x < a$, $f(x) = 0$ si $x > a$.
4. Encontrar $\mathcal{F}_s(e^{-ax})$, $a > 0$, por integración.
5. Deducir la fórmula 3 de la tabla I de la sección 10.12 por integración.
6. Obtener la respuesta del problema 4 a partir de (9b).
7. Obtener $\mathcal{F}_c(1/(1 + x^2))$ a partir del problema 3 de la sección 10.9.
8. Obtener la transformada de coseno inversa de Fourier de e^{-w}.
9. Encontrar la transformada senoidal de Fourier de $f(x) = x^2$ si $0 < x < 1$, $f(x) = 0$ si $x > 1$.
10. Encontrar la transformada de Fourier de coseno de la función del problema 9.
11. Obtener $\mathcal{F}_s(x^{-1} - x^{-1}\cos \pi x)$. *Sugerencia.* Usar el problema 6, sección 10.9, con w y x intercambiadas.
12. Obtener la fórmula 10 de la tabla I de la sección 10.12 con $a = 1$ a partir del ejemplo 2 de la sección 10.9.
13. Encontrar $\mathcal{F}_c\{(\cos \pi x/2)/(1 - x^2)\}$. *Sugerencia.* Usar el problema 7 de la sección 10.9.
14. Usando (8b), obtener $\mathcal{F}_s(xe^{-x^2/2})$ a partir de una fórmula adecuada de la tabla I, sección 10.12.
15. Encontrar $\mathcal{F}_s(e^{-x})$ a partir de (8a) y de la fórmula 3 de la tabla I, sección 10.12.
16. Usando $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, obtener la fórmula 2 de la tabla II, sección 10.12, a partir de la fórmula 4 de dicha tabla.
17. Sea $f(x) = x^3/(x^4 + 4)$. Encontrar $\hat{f}_s(w)$ para $w > 0$. *Sugerencia.* Usar el problema 2 de la sección 10.9.
18. Demostrar que $f(x) = 1$ no tiene transformada de Fourier de coseno ni de seno.
19. ¿Existen las transformadas de coseno y de seno de Fourier de $f(x) = e^x$?
20. ¿Existe la transformada de Fourier de coseno de $(\cos x)/x$? ¿De $(\operatorname{sen} x)/x$?

10.11 TRANSFORMADA DE FOURIER

La sección anterior se ocupó de dos transformadas obtenidas a partir de las integrales de Fourier de coseno y de seno de la sección 10.9. Se considera ahora una tercera transformada, la *transformada de Fourier*, que se obtiene a partir de la forma compleja de la integral de Fourier. (Como motivación de esta transformada, ver el principio de la sección 10.10.) Por lo tanto, se considera primero la forma compleja de la integral de Fourier.

Forma compleja de la integral de Fourier

La integral de Fourier (real) es [ver (4), (5), sección 10.9]

$$f(x) = \int_0^\infty [A(w)\cos wx + B(w)\operatorname{sen} wx]\, dw$$

donde

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv\, dv, \qquad B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\operatorname{sen} wv\, dv.$$

Al sustituir A y B en la integral de f, se tiene

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} f(v)[\cos wv \cos wx + \operatorname{sen} wv \operatorname{sen} wx]\, dv\, dw.$$

Por la fórmula de adición del coseno [(6) en el apéndice 3.1], la expresión entre corchetes [· · ·] es igual a $\cos(wv - wx)$ o, ya que el coseno es par, $\cos(wx - wv)$, de donde se obtiene

$$(1^*) \qquad f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(wx - wv)\, dv\right] dw.$$

La integral entre corchetes es una función *par* de w, denótese $F(w)$, ya que $\cos(wx - wv)$ es una función par de w, la función f no depende de w y se integra con respecto a v (no a w). En consecuencia, la integral de $F(w)$ de $w = 0$ a ∞ es 1/2 vez la integral de $F(w)$ de $-\infty$ a ∞. Por tanto,

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(wx - wv)\, dv\right] dw.$$

Se afirma que la integral de la forma (1) con sen en lugar de cos es cero:

$$(2) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\operatorname{sen}(wx - wv)\, dv\right] dw = 0.$$

Esta igualdad es válida ya que $\operatorname{sen}(wx - wv)$ es una función impar de w, lo que hace que la integral entre corchetes sea una función impar de w, denótese $G(w)$, por lo que la integral de $G(w)$ de $-\infty$ a ∞ es cero, como se afirmó. Se usa ahora la **fórmula de Euler**

$$(3) \qquad e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$$

de la función exponencial compleja [fórmula (8) de la sección 2.3]. Al hacer $t = wx - wv$ y sumando (1) e i veces (2), se obtiene

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{iw(x-v)}\,dv\,dw \qquad (i = \sqrt{-1}). \tag{4}$$

Esta expresión se conoce como la **integral compleja de Fourier**.

Basta un paso para llegar de esta expresión a la transformada de Fourier, el objetivo presente.

Transformadas de Fourier

Al escribir la función exponencial de (4) como un producto de funciones exponenciales, se tiene

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{-iwv}\,dv\right] e^{iwx}\,dw. \tag{5}$$

La expresión entre corchetes es una función de w, se denota por $\hat{f}(w)$ y se llama la **transformada de Fourier** de f; al escribir $v = x$, se tiene

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}\,dx. \tag{6}$$

Con esta expresión, (5) queda

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{iwx}\,dw \tag{7}$$

y se llama la **transformada inversa de Fourier** de $\hat{f}(w)$.

Otra notación es $\mathcal{F}(f) = \hat{f}(w)$ y $\mathcal{F}^{-1}$ para la inversa.

Al proceso de obtener la transformada de Fourier $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ a partir de una f dada también se le llama la **transformación de Fourier** o el *método de transformación de Fourier*.

Existencia. Las dos condiciones siguientes son suficientes para la existencia de la transformada de Fourier (6) de una función $f(x)$ definida sobre el eje x, como se menciona sin demostración.

1. $f(x)$ es continua por secciones en todo intervalo finito.
2. $f(x)$ es absolutamente integrable sobre el eje x.

(Para las definiciones de continuidad por secciones y de integrabilidad absoluta, ver las secciones 6.1 y 10.9, respectivamente.)

EJEMPLO 1 Transformada de Fourier

Encontrar la transformada de Fourier de $f(x) = k$ si $0 < x < a$ y $f(x) = 0$ en caso contrario.

Solución. A partir de (6), por integración,

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^a ke^{-iwx}\,dx = \frac{k}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{-iwa}-1}{-iw}\right) = \frac{k(1-e^{-iaw})}{iw\sqrt{2\pi}}.$$

Se demuestra así que la transformada de Fourier será en general una función con valores complejos. ∎

EJEMPLO 2 Transformada de Fourier

Encontrar la transformada de Fourier de e^{-ax^2}, donde $a > 0$.

Solución. Se usa la definición, se completa el cuadrado en el exponente y se saca el factor exponencial que no contiene términos en x:

$$\mathcal{F}(e^{-ax^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\,[-ax^2 - iwx]\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\left(\sqrt{a}x + \frac{iw}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{iw}{2\sqrt{a}}\right)^2\right]dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{w^2}{4a}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\left(\sqrt{a}x + \frac{iw}{2\sqrt{a}}\right)^2\right]dx.$$

La integral se denota por I y se demuestra que es igual a $\sqrt{\pi/a}$. Para ello se usa $\sqrt{a}x + iw\,2\sqrt{a}$ como nueva variable de integración. Entonces $dx = dv/\sqrt{a}$, de donde

$$I = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2}\,dv.$$

Se llega ahora al resultado mediante el siguiente recurso. Se eleva al cuadrado la integral, se convierte en una integral doble y se usan las coordenadas polares $r = \sqrt{u^2 + v^2}$ y θ. Puesto que $du\,dv = r\,dr\,d\theta$, se obtiene

$$I^2 = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2}\,dv = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u^2+v^2)}\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta = \frac{2\pi}{a}\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{a}.$$

Por tanto, $I = \sqrt{\pi/a}$. A partir de esta expresión y de la primera fórmula de esta solución,

$$\mathcal{F}(e^{-ax^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{w^2}{4a}\right)\sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-w^2/4a}.$$

Este resultado concuerda con la fórmula 9 de la tabla III, sección 10.12. ∎

Interpretación física: Espectro

La naturaleza de la representación (7) de $f(x)$ se pone de manifiesto si se le piensa como una superposición de oscilaciones senoidales de todas las frecuencias posibles,

llamada **representación espectral**. El nombre se origina en la óptica, donde la luz es una superposición de colores (frecuencias). En (7), la **"densidad espectral"** $\hat{f}(w)$ mide la intensidad de $f(x)$ en el intervalo de frecuencias entre w y $w + \Delta w$ (Δw pequeño, fijo). Se afirma que en relación con oscilaciones, la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(w)|^2 \, dw$$

puede interpretarse como la **energía total** del sistema físico; en consecuencia, una integral de $|\hat{f}(w)|^2$ de a a b da la contribución de las frecuencias w entre a y b a la energía total.

A fin de hacer plausible lo anterior, se empieza con un sistema mecánico que da una sola frecuencia, a saber, el oscilador armónico (masa en un resorte, sección 2.5)

$$my'' + ky = 0,$$

denotando el tiempo t por x. Al multipicar por y' e integrar se obtiene

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}ky^2 = E_0 = const,$$

donde $v = y'$ es la velocidad, el primer término es la energía cinética, el segundo la energía potencial y E_0 es la energía total del sistema. Entonces una solución general es [usar (4), (5), sección 10.6]

$$y = a_1 \cos w_0 x + b_1 \operatorname{sen} w_0 x = c_1 e^{iw_0 x} + c_{-1} e^{-iw_0 x}, \quad w_0{}^2 = k/m,$$

donde $c_1 = (a_1 - ib_1)/2$, $c_{-1} = \bar{c}_1 = (a_1 - ib_1)/2$. Puesto que $mw_0{}^2 = k$ e $(iw_0)^2 = -w_0{}^2$, por cálculos directos y simplificando se obtiene

$$\begin{aligned} E_0 &= \tfrac{1}{2}m(c_1 iw_0 e^{iw_0 x} - c_{-1} iw_0 e^{-iw_0 x})^2 + \tfrac{1}{2}k(c_1 e^{iw_0 x} + c_{-1} e^{-iw_0 x})^2 \\ &= 2kc_1 c_{-1} = 2k|c_1|^2. \end{aligned}$$

Por tanto, *la energía es proporcional al cuadrado de la amplitud* $|c_1|$.

Como paso siguiente, si un sistema más complicado lleva a una solución periódica de $y = f(x)$ que puede representarse por una serie de Fourier, entonces en lugar del término de energía $|c_1|^2$ único se obtiene una serie de cuadrados $|c_n|^2$ de coeficientes de Fourier c_n dada por (8), sección 10.6. En este caso se tiene un **"espectro discreto"** (o **"espectro puntual"**) que consta de un conjunto numerable de frecuencias aisladas (una infinidad, en general), siendo las $|c_n|^2$ correspondientes las contribuciones a la energía total.

Por último, un sistema cuya solución puede representarse por una integral de Fourier (7) lleva a la integral anterior para la energía, como es razonable esperar por los casos que acaban de discutirse.

Linealidad. Transformación de Fourier de derivadas

Es posible obtener nuevas transformadas a partir de las que se obtienen por el

Teorema 1 (Linealidad de la transformación de Fourier)

La transformación de Fourier es una operación lineal; es decir, para cualesquiera funciones $f(x)$ y $g(x)$ cuyas transformadas de Fourier existen y para constantes a y b cualesquiera,

(8) $$\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g).$$

Demostración. Esta expresión es válida ya que la integración es una operación lineal, de donde por (6) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{af(x) + bg(x)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [af(x) + bg(x)]e^{-iwx} \, dx \\ &= a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx} \, dx + b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-iwx} \, dx \\ &= a\mathcal{F}\{f(x)\} + b\mathcal{F}\{g(x)\}. \end{aligned}$$ ∎

En la aplicación de la transformada de Fourier a ecuaciones diferenciales, la propiedad clave es que la diferenciación de funciones corresponde a la multiplicación de las transformadas por iw:

Teorema 2 [Transformada de Fourier de la derivada de $f(x)$]

Sea $f(x)$ continua en el eje x y sea que $f(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$. Además, sea $f'(x)$ absolutamente integrable sobre el eje x. Entonces

(9) $$\mathcal{F}\{f'(x)\} = iw\mathcal{F}\{f(x)\}.$$

Demostración. Al integrar por partes y usar $f(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f'(x)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-iwx} \, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x)e^{-iwx} \Big|_{-\infty}^{\infty} - (-iw) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx} \, dx \right] \\ &= 0 + iw\mathcal{F}\{f(x)\}. \end{aligned}$$ ∎

Mediante dos aplicaciones sucesivas de (9) se obtiene

$$\mathcal{F}(f'') = iw\mathcal{F}(f') = (iw)^2\mathcal{F}(f).$$

Puesto que $(iw)^2 = -w^2$, para la transformada de la segunda derivada de f se tiene

(10) $$\mathcal{F}\{f''(x)\} = -w^2\mathcal{F}\{f(x)\}.$$

Se aplica lo mismo para derivadas superiores.

En la sección 11.14 se presentará una aplicación de (10) a las ecuaciones diferenciales. Ente tanto, se muestra cómo puede usarse (9) para derivar transformadas.

EJEMPLO 3 Una aplicación de la fórmula operacional (9)

Encontrar la transformada de Fourier de xe^{-x^2} a partir de la tabla III, sección 10.12.

Solución. Se usa (9). Por la fórmula 9 de la tabla III,

$$\mathcal{F}(xe^{-x^2}) = \mathcal{F}\left\{-\frac{1}{2}(e^{-x^2})'\right\} = -\frac{1}{2}\mathcal{F}\left\{(e^{-x^2})'\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}iw\mathcal{F}(e^{-x^2}) = -\frac{1}{2}iw\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-w^2/4} = -\frac{iw}{2\sqrt{2}}e^{-w^2/4}.$$

Convolución

La **convolución** $f * g$ de las funciones f y g se define por

(11) $$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p)\,dp = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-p)g(p)\,dp.$$

El objetivo es el mismo que en el caso de las transformadas de Laplace (sección 6.6); la convolución de funciones corresponde a la multiplicación de sus transformadas de Fourier (excepto por un factor $\sqrt{2\pi}$):

Teorema 3 (Teorema de convolución)

Suponer que $f(x)$ y $g(x)$ son continuas por secciones, acotadas y absolutamente integrables en el eje x. Entonces

(12) $$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}(g).$$

Demostración. Por la definición y un intercambio del orden de integración

$$\mathcal{F}(f * g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p)e^{-iwx}\,dp\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p)e^{-iwx}\,dx\,dp.$$

En lugar de x se toma ahora $x - p = q$ como nueva variable de integración. Entonces $x = p + q$ y

$$\mathcal{F}(f * g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(q)e^{-iw(p+q)}\,dq\,dp$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)e^{-iwp}\,dp\int_{-\infty}^{\infty} g(q)e^{-iwq}\,dq$$

$$= \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}(g).$$ ∎

Al tomar la transformada inversa de Fourier en ambos miembros de (12), escribiendo $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ y $\hat{g} = \mathcal{F}(g)$ como antes, y observando que $\sqrt{2\pi}$ y $1/\sqrt{2\pi}$ se cancelan entre sí, se obtiene

(13) $$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\hat{g}(w)e^{iwx}\,dw,$$

una fórmula que ayudará a resolver ecuaciones diferenciales parciales (sección 11.14).

En la siguiente sección se incluye una **tabla** de transformadas de Fourier. Para tablas más extensas, ver la referencia [C4] en el apéndice 1.

Concluye así el capítulo 10 sobre series de Fourier, integrales de Fourier y transformadas de Fourier. La introducción de las series de Fourier (y de las integrales de Fourier) fue uno de los mayores avances jamás realizados en la física matemática y en sus aplicaciones en la ingeniería, ya que las series de Fourier (y las integrales de Fourier) son probablemente la herramienta más importante en la solución de problemas con valores en la frontera. Esto se explicará en el capítulo siguiente.

Problemas de la sección 10.11

Encontrar las transformadas de Fourier de las siguientes funciones $f(x)$ (sin usar la tabla III, sección 10.12).

1. $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} e^{2ix} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

9. Deducir la fórmula 1 de la tabla III, sección 10.12.
10. Usando la respuesta $\hat{f}(w)$ del problema 9, obtener $f(x)$ a partir de (7). *Sugerencia.* Usar (7*) de la sección 10.9.
11. Obtener la fórmula 1 de la tabla III, sección 10.12, a partir de la fórmula 2 de la misma tabla.
12. Resolver el problema 6 por (9), usando la respuesta del problema 1.
13. **(Cambio)** Demostrar que si $f(x)$ tiene una transformada de Fourier, también la tiene $f(x-a)$ y que

$$\mathcal{F}\{f(x-a)\} = e^{-iwa}\mathcal{F}\{f(x)\}.$$

14. Resolver el problema 6 por convolución. *Sugerencia.* Demostrar que $xe^{-x} = e^{-x} * e^{-x}$ $(x > 0)$.
15. Usando el problema 13, obtener la fórmula 1 de la tabla III, sección 10.12, a partir de la fórmula 2 (con $c = 3b$).
16. Usando la respuesta del problema 8, escribir la representación en integral de Fourier de $f(x)$ y convertirla a una integral de Fourier de coseno (ver la sección 10.9).
17. **(Cambio sobre el eje w)** Demostrar que si $\hat{f}(w)$ es la transformada de Fourier de $f(x)$, entonces $f(w-a)$ es la transformada de Fourier de $e^{iax}f(x)$.
18. Usando el problema 17, obtener la fórmula 7 de la tabla III, sección 10.12, a partir de la fórmula 1 de la misma tabla.
19. Usando el problema 17, obtener la fórmula 8 de la tabla III, sección 10.12, a partir de la fórmula 2 de la misma tabla.
20. Comprobar la fórmula 3 de la tabla III, sección 10.12, con $a = 1$. *Sugerencia.* Usar (15) de la sección 10.9 y (3) de esta sección.

10.12 TABLAS DE TRANSFORMADAS

Para tablas más extensas, ver la referencia [C4] en el apéndice 1.

Tabla I. Transformada de Fourier de coseno
Ver (2) en la sección 10.10

	$f(x)$	$\hat{f}_c(w) = \mathcal{F}_c(f)$
1	$\begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\text{sen } aw}{w}$
2	x^{a-1} $(0 < a < 1)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Gamma(a)}{w^a}\cos\frac{a\pi}{2}$ ($\Gamma(a)$ ver en el Apéndice 3.1.)
3	e^{-ax} $(a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{a}{a^2+w^2}\right)$
4	$e^{-x^2/2}$	$e^{-w^2/2}$
5	e^{-ax^2} $(a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-w^2/4a}$
6	$x^n e^{-ax}$ $(a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{n!}{(a^2+w^2)^{n+1}}\text{Re}\,(a+iw)^{n+1}$ Re = parte real
7	$\begin{cases} \cos x & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\text{sen } a(1-w)}{1-w} + \frac{\text{sen } a(1+w)}{1+w}\right]$
8	$\cos ax^2$ $(a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}\cos\left(\frac{w^2}{4a} - \frac{\pi}{4}\right)$
9	$\text{sen } ax^2$ $(a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}\cos\left(\frac{w^2}{4a} + \frac{\pi}{4}\right)$
10	$\frac{\text{sen } ax}{x}$ $(a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}u(a-w)$ (Ver sección 6.3)
11	$\frac{e^{-x}\text{sen } x}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\arctan\frac{2}{w^2}$
12	$J_0(ax)$ $(a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{u(a-w)}{\sqrt{a^2-w^2}}$ (Ver secciones 5.5, 6.3)

Tabla II. Transformadas de Fourier de seno.
Ver (5) en la sección 10.10.

	$f(x)$	$\hat{f}_s(w) = \mathcal{F}_s(f)$
1	$\begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left[\dfrac{1 - \cos aw}{w}\right]$
2	$1/\sqrt{x}$	$1/\sqrt{w}$
3	$1/x^{3/2}$	$2\sqrt{w}$
4	$x^{a-1} \quad (0 < a < 1)$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\Gamma(a)}{w^a}\operatorname{sen}\dfrac{a\pi}{2}$ ($\Gamma(a)$ ver en el Apéndice 3.1.)
5	e^{-x}	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left(\dfrac{w}{1 + w^2}\right)$
6	$e^{-ax}/x \quad (a > 0)$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \arctan \dfrac{w}{a}$
7	$x^n e^{-ax} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{n!}{(a^2 + w^2)^{n+1}} \operatorname{Im}(a + iw)^{n+1}$ Im = parte imaginaria
8	$xe^{-x^2/2}$	$we^{-w^2/2}$
9	$xe^{-ax^2} \quad (a > 0)$	$\dfrac{w}{(2a)^{3/2}} e^{-w^2/4a}$
10	$\begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\dfrac{\operatorname{sen} a(1 - w)}{1 - w} - \dfrac{\operatorname{sen} a(1 + w)}{1 + w}\right]$
11	$\dfrac{\cos ax}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\, u(w - a)$ (Ver sección 6.3)
12	$\arctan \dfrac{2a}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{2\pi}\,\dfrac{\operatorname{senh} aw}{w} e^{-aw}$

Tabla III. Transformadas de Fourier.
Ver (6) en la sección 10.11.

	$f(x)$	$\hat{f}(w) = \mathcal{F}(f)$
1	$\begin{cases} 1 & \text{si } -b < x < b \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\operatorname{sen} bw}{w}$
2	$\begin{cases} 1 & \text{si } b < x < c \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\dfrac{e^{-ibw} - e^{-icw}}{iw\sqrt{2\pi}}$
3	$\dfrac{1}{x^2 + a^2} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{e^{-a\lvert w\rvert}}{a}$
4	$\begin{cases} x & \text{si } 0 < x < b \\ 2x - a & \text{if } b < x < 2b \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$	$\dfrac{-1 + 2e^{ibw} - e^{-2ibw}}{\sqrt{2\pi}\, w^2}$
5	$\begin{cases} e^{-ax} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (a > 0)$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}(a + iw)}$
6	$\begin{cases} e^{ax} & \text{si } b < x < c \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$	$\dfrac{e^{(a-iw)c} - e^{(a-iw)b}}{\sqrt{2\pi}(a - iw)}$
7	$\begin{cases} e^{iax} & \text{si } -b < x < b \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\operatorname{sen} b(w - a)}{w - a}$
8	$\begin{cases} e^{iax} & \text{si } b < x < c \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$	$\dfrac{i}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{e^{ib(a-w)} - e^{ic(a-w)}}{a - w}$
9	$e^{-ax^2} \quad (a > 0)$	$\dfrac{1}{\sqrt{2a}} e^{-w^2/4a}$
10	$\dfrac{\operatorname{sen} ax}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ si $\lvert w\rvert < a$; 0 si $\lvert w\rvert > a$

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 10

1. ¿Qué se entiende por serie trigonométrica? ¿Por serie de Fourier?
2. ¿Qué se entiende por ortogonalidad? ¿Qué papel desempeña en la derivación de las fórmulas de Euler?
3. ¿Cómo se consiguió la transición de una función de periodo 2π a una función con un periodo arbitrario?
4. ¿Qué es una función periódica impar? ¿A qué forma se reduce su serie de Fourier?
5. Responder las mismas preguntas del problema 4 para una función periódica par.
6. ¿Qué se entiende por desarrollos de medio rango?
7. ¿Una función discontinua puede tener una serie de Fourier? ¿Una serie de Taylor?
8. Si la serie de Fourier de una función $f(x)$ tiene términos tanto coseno como seno, ¿cuál es la suma de los términos coseno expresada en términos de $f(x)$? ¿La suma de los términos seno?
9. ¿Qué es la continuidad por secciones? ¿En relación con qué se presentó en este capítulo?
10. ¿Qué es un polinomio trigonométrico? ¿Por qué se le consideró?
11. ¿Qué es el error cuadrático medio? ¿Por qué se le consideró?
12. ¿Qué es una serie compleja de Fourier? ¿Cómo se relaciona con la forma real común de una serie de Fourier?
13. ¿Cuál es la diferencia básica en las oscilaciones de un sistema masa–resorte gobernadas por $my'' + cy' + ky = r(t)$ con fuerza impulsora periódica arbitraria en comparación con una fuerza impulsora senoidal pura?
14. ¿Qué es la transformada de Fourier? ¿Cómo se obtuvo a partir de la integral de Fourier?
15. ¿Toda función continua tiene transformada de Fourier de coseno o de seno? ¿Una función discontinua puede tener transformada de Fourier de coseno o de seno?

Encontrar la serie de Fourier de las funciones dadas, las cuales se supone tienen periodo 2π.

16. $f(x) = \begin{cases} k & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ -k & \text{si } \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$

17. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < \pi \\ 1 & \text{si } \pi < x < 2\pi \end{cases}$

18. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\pi < x < -\pi/2 \\ -1 & \text{si } -\pi/2 < x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$

19. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi < x < -\pi/2 \\ 0 & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 1 & \text{si } \pi/2 < x < \pi \end{cases}$

20. $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x) \quad (0 < x < 2\pi)$

21. $f(x) = |x| \quad (-\pi < x < \pi)$

22. $f(x) = \frac{1}{2}kx|x| \quad (-\pi < x < \pi)$

23. $f(x) = -x/2 \quad (-\pi < x < \pi)$

24. $f(x) = x^4 \quad (-\pi < x < \pi)$

25. $f(x) = \pi - 2|x| \quad (-\pi < x < \pi)$

26. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \pi x & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$

27. $f(x) = \begin{cases} x^2/2 & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \pi^2/8 & \text{si } \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$

28. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$

29. $f(x) = \begin{cases} \pi x + x^2 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \pi x - x^2 & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$

30. $f(x) = \begin{cases} x/a & \text{si } -a < x < a \ (< \pi) \\ \dfrac{\pi - x}{\pi - a} & \text{si } a < x < 2\pi - a \end{cases}$

Encontrar la serie de Fourier de las siguientes funciones, las cuales se supone tienen periodo $p = 2L$.

31. $f(x) = 1 \quad (-1 < x < 0), \quad f(x) = -1 \quad (0 < x < 1), \quad p = 2L = 2$
32. $f(x) = 1 \quad (-1 < x < 1), \quad f(x) = 0 \quad (1 < x < 3), \quad p = 2L = 4$
33. $f(x) = x \quad (-2 < x < 2), \quad p = 2L = 4$
34. $f(x) = 0 \quad (-1 < x < 0), \quad f(x) = x \quad (0 < x < 1), \quad p = 2L = 2$
35. $f(x) = -x \quad (-1 < x < 0), \quad f(x) = 0 \quad (0 < x < 1), \quad p = 2L = 2$
36. $f(x) = x \quad (-4 < x < 4), \quad p = 2L = 8$
37. $f(x) = -1 \quad (-1 < x < 0), \quad f(x) = 2x \quad (0 < x < 1), \quad p = 2L = 2$
38. $f(x) = 1 - x^2 \quad (0 < x < 2), \quad p = 2L = 2$
39. $f(x) = x - x^2 \quad (-1 < x < 1), \quad p = 2L = 2$
40. $f(x) = 1 \quad (-2 < x < 0), \quad f(x) = e^{-x} \quad (0 < x < 2), \quad p = 2L = 4$

Encontrar la suma de

41. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots$ (Usar el problema 17.)
42. $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{47} + \cdots$ (Usar el problema 21.)
43. $1 - 3^{-3} + 5^{-3} - 7^{-3} + - \cdots$ (Usar el problema 29.)

Usando la identidad de Parseval, demostrar que

44. $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \cdots = \dfrac{\pi^2}{6}$ (Usar el problema 23.)
45. $1 + \dfrac{1}{3^4} + \dfrac{1}{5^4} + \dfrac{1}{7^4} + \cdots = \dfrac{\pi^4}{96}$ (Usar el problema 25.)
46. $1 + \dfrac{1}{3^6} + \dfrac{1}{5^6} + \dfrac{1}{7^6} + \cdots = \dfrac{\pi^6}{960}$ (Usar el problema 29.)

Calcular los seis primeros errores cuadráticos mínimos E^* correspondientes a las primeras sumas parciales:

47. En el problema 21.
48. En el problema 29.

Encontrar una solución general de $y'' + \omega^2 y = r(t)$, donde

49. $r(t) = t^2/4 \quad (-\pi < t < \pi), \quad r(t + 2\pi) = r(t), \quad |\omega| \neq 0, 1, 2, \cdots$
50. $r(t) = t(\pi^2 - t^2)/12 \quad (-\pi < t < \pi), \quad r(t + 2\pi) = r(t), \quad |\omega| \neq 1, 2, \cdots$

Resumen del capítulo 10

Series, integrales y transformadas de Fourier

Una **serie trigonométrica** (sección 10.1) es una serie de la forma

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx). \qquad (1)$$

La **serie de Fourier** de una función periódica $f(x)$ dada de periodo 2π es una serie trigonométrica (1) cuyos coeficientes son los **coeficientes de Fourier** de $f(x)$ dados por las **fórmulas de Euler** (sección 10.2)

$$(2)\qquad a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx.$$

Para una función $f(x)$ de cualquier periodo $p = 2L$ la **serie de Fourier** es (sección 10.3)

$$(3)\qquad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + b_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{L}x\right)$$

con los coeficientes de Fourier de $f(x)$ dados por las **fórmulas de Euler**

$$(4)\qquad a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Estas series son fundamentales en relación con fenómenos periódicos, en particular en modelos que incluyen ecuaciones diferenciales (sección 10.7 y capítulo 11). Si $f(x)$ es par $[f(-x) = f(x)]$ o impar $[f(-x) = -f(x)]$, puede reducirse a una **serie de Fourier de coseno o de seno**, respectivamente (sección 10.4).

Una función $f(x)$ dada en un intervalo $0 \leq x \leq L$ puede desarrollarse en una serie de Fourier de coseno o de seno de periodo $2L$; estas se llaman **desarrollos de medio rango** de $f(x)$; ver la sección 10.5.

Al conjunto de funciones de coseno y de seno de (3) se le llama **sistema trigonométrico**. Su propiedad más importante es su **ortogonalidad** en un intervalo de longitud $2L$, es decir, para todos los enteros m y $n \neq m$ se tiene

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0, \qquad \int_{-L}^{L}\mathrm{sen}\,\frac{m\pi x}{L}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$$

y para todos los enteros m y n,

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0.$$

Esta ortogonalidad fue crucial para deducir las fórmulas de Euler para los coeficientes de Fourier.

Las sumas parciales de Fourier minimizan el error cuadrático (sección 10.8).

Las ideas y técnicas de las series de Fourier se extienden a funciones $f(x)$ no periódicas definidas en la recta real completa; esto lleva a la **integral de Fourier**

$$(5)\qquad f(x) = \int_0^{\infty}[A(w)\cos wx + B(w)\,\mathrm{sen}\,wx]\,dw$$

(sección 10.9), donde

$$(6)\qquad A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv\,dv, \qquad B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\,\mathrm{sen}\,wv\,dv$$

o, en forma compleja (sección 10.11),

$$(7)\qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(w)e^{iwx}\,dw \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

donde

$$(8)\qquad \hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}\,dx.$$

La fórmula (8) transforma $f(x)$ en su **transformada de Fourier** $\hat{f}(w)$.

Con la expresión anterior se relacionan la **transformada de Fourier de coseno**

$$(9)\qquad \hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos wx\,dx$$

y la **transformada de Fourier de seno** (sección 10.10)

$$(10)\qquad \hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{sen}\,wx\,dx.$$

Capítulo

11

Ecuaciones diferenciales parciales

Las ecuaciones diferenciales parciales surgen en relación con varios problemas físicos y geométricos cuando las funciones que intervienen dependen de dos o más variables independientes. Es justo señalar que sólo los sistemas físicos más sencillos pueden modelarse por ecuaciones diferenciales *ordinarias*, mientras que la mayoría de los problemas de mécanica (dinámica, elasticidad) de fluidos y sólidos, transferencia de calor, teoría electromagnética, mecánica cuántica y otras áreas de la física llevan a ecuaciones diferenciales ***parciales***. De hecho, el rango de aplicación de estas últimas es enorme en comparación con el de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Las variables independientes que intervienen pueden ser el tiempo y una o varias coordenadas en el espacio. El presente capítulo se dedica a algunas de las ecuaciones diferenciales parciales más importantes que se presentan en aplicaciones de ingeniería. Estas ecuaciones se establecen como modelos de sistemas físicos y se consideran métodos para resolver **problemas con valor inicial** y con **valores en la frontera**, es decir, métodos para obtener soluciones de las ecuaciones que corresponden a las situaciones físicas dadas.

En la sección 11.1 se define la noción de solución de una ecuación diferencial parcial. Las secciones 11.2-11.4 tratan la ecuación de onda unidimensional, que gobierna el movimiento de una cuerda vibratoria. La ecuación del calor se considera en las secciones 11.5 y 11.6, la ecuación de onda bidimensional (membranas oscilatorias) en las secciones 11.7-11.10 y la ecuación de Laplace en las secciones 11.11 y 11.12.

En las secciones 11.13 y 11.14 se ve que las ecuaciones diferenciales parciales también pueden resolverse por los métodos de la transformada de Laplace o de la transformada de Fourier.

Los **métodos numéricos** para ecuaciones diferenciales parciales se presentan en las secciones 20.4-20.7.

> *Prerrequisitos para este capítulo:* Ecuaciones diferenciales lineales ordinarias (capítulo 2) y series de Fourier (capítulo 10).
> *Secciones que pueden omitirse en un curso más corto:* 11.6, 11.9, 11.10, 11.13, 11.14
> *Bibliografía:* Apéndice 1, parte C.
> *Respuestas a los problemas:* Apéndice 2.

11.1 CONCEPTOS BÁSICOS

Una ecuación en la que interviene una o más derivadas parciales de una función (desconocida) de dos o más variables independientes se llama **ecuación diferencial parcial**. El orden de la derivada más alta es llamada el **orden** de la ecuación.

Como en el caso de una ecuación diferencial ordinaria, se dice que una ecuación diferencial parcial es **lineal** si es de primer grado en la variable dependiente (la función desconocida) y en sus derivadas parciales. Si cada término de esta ecuación contiene a la variable dependiente o a una de sus derivadas, se dice que la ecuación es **homogénea**; en caso contrario se dice que es **no homogénea**.

EJEMPLO 1 Ecuaciones diferenciales parciales lineales de segundo orden importantes

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ *Ecuación unidimensional de onda*

(2) $$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ *Ecuación unidimensional del calor*

(3) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ *Ecuación bidimensional de Laplace*

(4) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$ *Ecuación bidimensional de Poisson*

(5) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$ *Ecuación tridimensional de Laplace*

Aquí c es una constante, t es el tiempo y x, y, z son coordenadas cartesianas. La ecuación (4) (con $f(x, y) \not\equiv 0$) es no homogénea, mientras que las ecuaciones restantes son homogéneas. ■

Una **solución** *de una ecuación diferencial parcial en alguna región R del espacio de las variables independientes* es una función que tiene todas las derivadas parciales que aparecen en la ecuación en algún dominio que contiene a R y satisface la ecuación en todos los puntos de R. (Con frecuencia se requiere tan sólo que esa función sea continua en la frontera de R, tenga esas derivadas en el interior de R y satisfaga la ecuación en el interior de R.)

En general, la totalidad de las soluciones de una ecuación diferencial parcial es muy grande. Por ejemplo, las funciones

(6) $$u = x^2 - y^2, \qquad u = e^x \cos y, \qquad u = \ln (x^2 + y^2),$$

que son por completo diferentes entre sí, son soluciones de (3), como el estudiante puede comprobar. Se verá más tarde que la única solución de una ecuación diferencial

parcial correspondiente a un problema físico dado se obtendrá mediante el uso de condiciones adicionales que surgen del problema, por ejemplo, la condición de que la solución u asuma valores dados en la frontera de la región considerada (**"condiciones en la frontera"**) o, cuando el tiempo t es una de las variables, que u (o $u_t = \partial u/\partial t$ o ambas) estén prescritas en $t = 0$ (**"condiciones iniciales"**).

Se sabe que si una ecuación diferencial *ordinaria* es lineal y homogénea, entonces, a partir de soluciones conocidas, pueden obtenerse otras soluciones por superposición. Para una ecuación diferencial *parcial* lineal y homogénea la situación es muy parecida. De hecho, el siguiente teorema es válido.

Teorema 1 Teorema fundamental (Principio de superposición o linealidad)

Si u_1 y u_2 son soluciones cualesquiera de una ecuación diferencial parcial lineal y homogénea en alguna región R, entonces

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2,$$

donde c_1 y c_2 son constantes cualesquiera, también es una solución de esa ecuación en R.

La demostración de este importante teorema es sencilla y muy similar a la del teorema 1 de la sección 2.1 y se le deja al estudiante.

La comprobación de las soluciones de los problemas 2-23 se hace como si se tratara de ecuaciones diferenciales ordinarias. Los problemas 24-35 se refieren a ecuaciones diferenciales parciales que pueden resolverse como si fueran ordinarias; a fin de ayudar al estudiante con ellos, se consideran dos ejemplos típicos.

EJEMPLO 2 Encontrar una solución $u(x, y)$ de la ecuación diferencial parcial $u_{xx} - u = 0$

Solución. Puesto que no está presente ninguna derivada en y, esta ecuación puede resolverse como $u'' - u = 0$. En la sección 2.2 se habría obtenido $u = Ae^x + Be^{-x}$ con A y B constantes. Aquí A y B pueden ser funciones de y, por lo que la respuesta es

$$u(x, y) = A(y)e^x + B(y)e^{-x}$$

con funciones arbitrarias A y B, por lo que se tiene una gran variedad de soluciones. Comprobar el resultado por derivación. ■

EJEMPLO 3 Resolver la ecuación diferencial parcial $u_{xy} = -u_x$

Solución. Haciendo $u_x = p$, se tiene $p_y = -p$, $p_y/p = -1$, $\ln p = -y + \tilde{c}(x)$, $p = c(x)e^{-y}$ y por integración con respecto a x,

$$u(x, y) = f(x)e^{-y} + g(y) \qquad \text{donde} \qquad f(x) = \int c(x)\, dx;$$

aquí $f(x)$ y $g(y)$ son arbitrarias ■

Problemas de la sección 11.1

1. Demostrar el teorema fundamental 1 para ecuaciones diferenciales de segundo orden en dos y tres variables independientes.
2. Comprobar que las funciones (6) son soluciones de (3).

Comprobar que las siguientes funciones son soluciones de la ecuación de Laplace.

3. $u = 2xy$ 4. $u = x^3 - 3xy^2$ 5. $u = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$
6. $u = e^x \operatorname{sen} y$ 7. $u = \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$ 8. $u = \arctan (y/x)$

Comprobar que las siguientes funciones son soluciones de la ecuación de onda (1) para un valor adecuado de c.

9. $u = x^2 + 4t^2$ 10. $u = x^3 + 3xt^2$ 11. $u = \operatorname{sen} 2ct \operatorname{sen} 2x$
12. $u = \cos 4t \operatorname{sen} x$ 13. $u = \cos ct \operatorname{sen} x$ 14. $u = \operatorname{sen} \omega ct \operatorname{sen} \omega x$

Comprobar que las siguientes funciones son soluciones de la ecuación del calor (2) para un valor adecuado de c.

15. $u = e^{-t} \cos x$ 16. $u = e^{-2t} \cos x$ 17. $u = e^{-t} \operatorname{sen} 3x$
18. $u = e^{-4t} \cos \omega x$ 19. $u = e^{-16t} \cos 2x$ 20. $u = e^{-\omega^2 c^2 t} \operatorname{sen} \omega x$

21. Demostrar que $u = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ es una solución de la ecuación de Laplace (5).
22. Comprobar que $u(x, y) = a \ln (x^2 + y^2) + b$ satisface la ecuación de Laplace (3) y determinar a y b para que u satisfaga las condiciones en la frontera $u = 0$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y $u = 5$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$.
23. Demostrar que $u(x, t) = v(x + ct) + w(x - ct)$ es una solución de la ecuación de onda (1); aquí. v y w son funciones cualesquiera derivables dos veces.

Ecuaciones diferenciales parciales que pueden resolverse como ecuaciones diferenciales ordinarias

Si una ecuación incluye derivadas con respecto a una sola variable, ésta puede resolverse como una ecuación diferencial ordinaria, tratando la otra variable (o variables) como parámetros. Encontrar las soluciones $u(x, y)$ de

24. $u_x = 0$ 25. $u_y = 0$ 26. $u_{xx} + 4u = 0$
27. $u_{xx} = 0$ 28. $u_y + 2yu = 0$ 29. $u_x = 2xyu$

Haciendo $u_x = p$, resolver

30. $u_{xy} = u_x$ 31. $u_{xy} = 0$ 32. $u_{xyy} + u_x = 0$

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales parciales.

33. $u_x = 0, \quad u_y = 0$ 34. $u_{xx} = 0, \quad u_{yy} = 0$ 35. $u_{xx} = 0, \quad u_{xy} = 0$

11.2 MODELADO: CUERDA VIBRATORIA, ECUACIÓN DE ONDA

Como primera ecuación diferencial parcial importante, se deduce la ecuación que gobierna las pequeñas vibraciones transversales de una cuerda elástica, como las de una cuerda de violín. La cuerda se tensa hasta la longitud L y se fija en los extremos. Después se deforma y en algún instante, por ejemplo, $t = 0$, se suelta dejándola vibrar. El problema es determinar las vibraciones de la cuerda, es decir, encontrar su deflexión $u(x, t)$ en cualquier punto x y en cualquier tiempo $t > 0$; ver la figura 251.

Cuando se establece una ecuación diferencial correspondiente a un problema físico dado, por lo general es necesario hacer supuestos de simplificación para asegurarse de que la ecuación resultante no sea muy complicada. Se sabe este hecho importante por el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias, y para las ecuaciones diferenciales parciales la situación es similar.

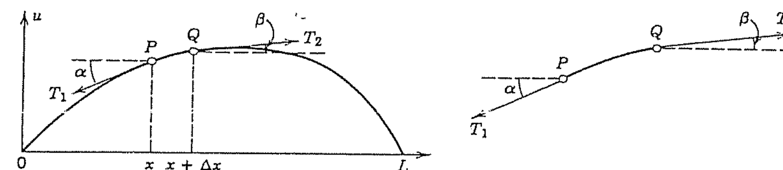


Figura 251. Deflexión de una cuerda en el tiempo fijo t.

Supuestos físicos. Se supone lo siguiente:

1. *La masa de la cuerda por unidad de longitud es constante ("cuerda homogénea"). La cuerda es perfectamente elástica y no ofrece resistencia alguna a la flexión.*
2. *La tensión causada por el estiramiento de la cuerda antes de fijarla en los extremos es tan grande que puede despreciarse la fuerza gravitacional sobre la cuerda.*
3. *La cuerda realiza pequeños movimientos transversales en un plano vertical; es decir, cada partícula de la cuerda se mueve estrictamente en la dirección vertical y de tal modo que la deflexión y la pendiente en cada punto de la cuerda se mantienen siempre con valores absolutos pequeños.*

Bajo estos supuestos puede esperarse que la solución $u(x, t)$ de la ecuación diferencial que va a obtenerse describirá de manera razonable las pequeñas vibraciones de la cuerda física "no idealizada" de masa homogénea reducida sometida a una tensión grande.

Ecuación diferencial a partir de fuerzas. Para obtener la ecuación diferencial se consideran las fuerzas que actúan sobre una porción pequeña de la cuerda (figura 251). Puesto que la cuerda no ofrece resistencia a la flexión, la tensión es tangencial a la curva de la cuerda en cada punto. Sean T_1 y T_2 las tensiones en los puntos extremos P y Q de esa porción. Puesto que no hay movimiento en la dirección horizontal, las componentes horizontales de la tensión deben ser constantes. Entonces, usando la notación de la figura 251, se obtiene

$$T_1 \cos \alpha = T_2 \cos \beta = T = const. \tag{1}$$

En la dirección vertical se tienen dos fuerzas, a saber, las componentes verticales $-T_1 \operatorname{sen} \alpha$ y $T_2 \operatorname{sen} \beta$ de T_1 y T_2; el signo menos aparece aquí porque esa componente en P está dirigida hacia abajo. Por la segunda ley de Newton, la resultante de estas dos fuerzas es igual al producto de la masa $\rho \, \Delta x$ de la porción y la aceleración $\partial^2 u/\partial t^2$, evaluada en algún punto entre x y $x + \Delta x$; aquí ρ es la masa de la cuerda no flexionada

por unidad de longitud y Δx es la longitud de la porción de la cuerda no flexionada. Por tanto,

$$T_2 \operatorname{sen} \beta - T_1 \operatorname{sen} \alpha = \rho \, \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Usando (1), esta expresión puede dividirse entre $T_2 \cos \beta = T_1 \cos \alpha = T$, obteniéndose

$$(2) \qquad \frac{T_2 \operatorname{sen} \beta}{T_2 \cos \beta} - \frac{T_1 \operatorname{sen} \alpha}{T_1 \cos \alpha} = \tan \beta - \tan \alpha = \frac{\rho \, \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Ahora $\tan \alpha$ y $\tan \beta$ son las pendientes de la cuerda en x y $x + \Delta x$:

$$\tan \alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x \qquad \text{y} \qquad \tan \beta = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}.$$

En este caso es necesario escribir derivadas *parciales* porque u también depende de t. Así, al dividir (2) entre Δx se tiene

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x\right] = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Si se hace que Δx tienda a cero, se obtiene la ecuación diferencial parcial lineal

$$(3) \qquad \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \qquad c^2 = \frac{T}{\rho}.$$

Ésta es la llamada **ecuación unidimensional de onda**, que gobierna el problema planteado. Se observa que es homogénea y de segundo orden. Se ha elegido la notación c^2 (en lugar de c) para la constante física T/ρ para indicar que esta constante es positiva. "Unidimensional" indica que en la ecuación sólo interviene una variable espacial, x. Las soluciones se obtendrán en la siguiente sección.

11.3 SEPARACIÓN DE VARIABLES, USO DE SERIES DE FOURIER

En la sección anterior se demostró que las vibraciones de una cuerda elástica, como una de violín, están gobernadas por la **ecuación unidimensional de onda**

$$(1) \qquad \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},}$$

donde $u(x, t)$ es la deflexión de la cuerda. Para determinar cómo se mueve la cuerda, se resuelve esta ecuación; con mayor precisión, se determina una solución u de (1) que satisfaga también las condiciones impuestas por el sistema físico. Puesto que la cuerda está fija en los extremos $x = 0$ y $x = L$, se tienen las dos **condiciones en la frontera**

$$(2) \qquad \boxed{u(0, t) = 0, \qquad u(L, t) = 0 \qquad \text{para toda } t}$$

La forma del movimiento de la cuerda dependerá de la deflexión inicial (deflexión en $t = 0$) y de la velocidad inicial (velocidad en $t = 0$). Al denotar la deflexión inicial por $f(x)$ y la velocidad inicial por $g(x)$; se obtienen las dos **condiciones iniciales**

$$(3) \qquad \boxed{u(x, 0) = f(x)}$$

y

$$(4) \qquad \boxed{\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x).}$$

El problema consiste ahora en encontrar una solución de (1) que satisfaga las condiciones (2)-(4). Se procederá paso a paso, de la manera siguiente.

Primer paso. Al aplicar el llamado **método de separación de variables** o *método del producto*, se obtendrán dos ecuaciones diferenciales *ordinarias*.

Segundo paso. Se determinarán las soluciones de esas dos ecuaciones que satisfagan las condiciones en la frontera.

Tercer paso. Usando **series de Fourier**, se hará la composición de estas soluciones, a fin de llegar a una solución de la ecuación de onda (1) que satisfaga también las condiciones iniciales dadas.

Primer paso. Dos ecuaciones diferenciales ordinarias

En el **método de separación de variables**, o *método del producto*, se determinan las soluciones de la ecuación de onda (1) de la forma

$$(5) \qquad \boxed{u(x, t) = F(x)G(t)}$$

que son un producto de dos funciones, cada una de las cuales depende únicamente de una de las variables x y t. Se verá más adelante que este método tiene muchas otras aplicaciones en las matemáticas para ingeniería. Al derivar (5) se obtiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\ddot{G} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G,$$

donde los puntos denotan derivadas con respecto a t y las primas, derivadas con respecto a x. Al introducir estas expresiones en la ecuación diferencial (1) se tiene

$$F\ddot{G} = c^2 F''G.$$

Al dividir entre c^2FG, se encuentra

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F}.$$

Se afirma ahora que ambos miembros deben ser constantes. De hecho, la expresión del primer miembro depende tan sólo de t y la del segundo depende tan sólo de x, y si fueran variables, entonces al cambiar t o x se afectaría únicamente el primer miembro o el segundo, respectivamente, sin alterar el otro miembro. Por tanto,

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F} = k.$$

Se obtienen así de inmediato dos ecuaciones diferenciales lineales ordinarias, a saber,

(6) $$\boxed{F'' - kF = 0}$$

y

(7) $$\boxed{\ddot{G} - c^2kG = 0.}$$

Aquí, k sigue siendo arbitraria.

Segundo paso. Satisfacción de las condiciones en la frontera

Se determinarán ahora las soluciones F y G de (6) y (7) de tal modo que $u = FG$ satisfaga las condiciones en la frontera (2), es decir,

$$u(0, t) = F(0)G(t) = 0, \qquad u(L, t) = F(L)G(t) = 0 \qquad \text{para toda } t.$$

Resolución de (6). Si $G \equiv 0$, entonces $u \equiv 0$, que no es de interés. Por tanto, $G \not\equiv 0$ y entonces

(8) $$\text{(a)}\quad F(0) = 0, \qquad \text{(b)}\quad F(L) = 0.$$

Para $k = 0$ la solución general de (6) es $F = ax + b$, y por (8) se obtiene $a = b = 0$. Por tanto, $F \equiv 0$, que no es de interés pues en tal caso $u \equiv 0$. Para $k = \mu^2$ positiva la solución general de (6) es

$$F = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x},$$

y por (8) se obtiene $F \equiv 0$, como antes. En consecuencia, sólo queda la posibilidad de elegir k negativa, por ejemplo, $k = -p^2$. Entonces la ecuación (6) asume la forma

$$F'' + p^2F = 0.$$

Su solución general es

$$F(x) = A \cos px + B \operatorname{sen} px.$$

A partir de esta expresión y de (8) se tiene

$$F(0) = A = 0 \qquad \text{y entonces} \qquad F(L) = B \operatorname{sen} pL = 0.$$

Es necesario tomar $B \neq 0$ ya que de otro modo $F \equiv 0$. En consecuencia, $\operatorname{sen} pL = 0$. Por tanto

(9) $$pL = n\pi, \qquad \text{de donde} \qquad p = \frac{n\pi}{L} \qquad (n \text{ entero}).$$

Al hacer $B = 1$, se obtiene una infinidad de soluciones $F(x) = F_n(x)$, donde

(10) $$F_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

Estas soluciones satisfacen (8). [Para un entero negativo n se obtienen en esencia las mismas soluciones, excepto por un signo menos, ya que $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$.]

Resolución de (7). La constante k está restringida ahora a los valores $k = -p^2 = -(n\pi/L)^2$, que resulta de (9). Para estas k, la ecuación (7) queda

$$\ddot{G} + \lambda_n^2 G = 0 \qquad \text{donde} \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}.$$

Una solución general es

$$G_n(t) = B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \operatorname{sen} \lambda_n t.$$

Por consiguiente, las funciones $u_n(x, t) = F_n(x)G_n(t)$, escritas en forma desarrollada

(11) $$\boxed{u_n(x, t) = (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \operatorname{sen} \lambda_n t) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x} \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

son soluciones de (1), las cuales satisfacen las condiciones en la frontera (2). Estas funciones se llaman las **eigenfunciones**, o *funciones características*, y los valores $\lambda_n = cn\pi/L$ se llaman los **eigenvalores**, o *valores característicos*, de la cuerda vibratoria. El conjunto $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\}$ se llama el **espectro**.

Discusión de las eigenfunciones. Se observa que cada u_n representa un movimiento armónico que tiene la frecuencia $\lambda_n/2\pi = cn/2L$ ciclos por unidad de tiempo. Este

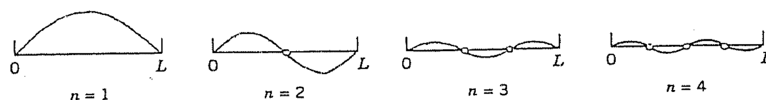


Figura 252. Modos normales de la cuerda vibratoria.

movimiento se llama n-ésimo **modo normal** de la cuerda. El primer modo normal se conoce como el *modo fundamental* ($n = 1$) y los demás se conocen como *armónicos*; en música, dan la octava, la octava más la quinta, etc. Puesto que en (11)

$$\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} = 0 \qquad \text{en} \qquad x = \frac{L}{n}, \frac{2L}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}L,$$

el n-ésimo modo normal tiene $n - 1$ de los llamados **nodos**, es decir, puntos de la cuerda que no se mueven (además de los puntos extremos fijos; ver la figura 252).

En la figura 253 se ilustra el segundo modo normal para varios valores de t. En cualquier instante la cuerda tiene la forma de una onda senoidal. Cuando la parte izquierda de la cuerda se está moviendo hacia abajo la otra mitad se mueve hacia arriba y viceversa. Para los demás modos la situación es similar.

La **afinación** se hace cambiando la tensión T, y la fórmula obtenida para la frecuencia $\lambda_n/2\pi = cn/2L$ de u_n con $c = T/\rho$ [ver (3), sección 11.2] confirma ese efecto pues indica que la frecuencia es proporcional a la tensión. T no puede incrementarse de manera indefinida, pero ¿sabe el estudiante qué hacer para obtener una cuerda con un modo fundamental alto? (Considere tanto L como ρ.)

Tercer paso. Solución del problema completo

Evidentemente, una sola solución $u_n(x, t)$ en general no satisfará las condiciones iniciales (3) y (4). Ahora bien, puesto que la ecuación (1) es lineal y homogénea, por el teorema fundamental 1 de la sección 11.1 se sigue que la suma de un número finito de soluciones u_n es una solución de (1). Para obtener una solución que satisfaga (3) y (4), se considera la serie infinita (con $\lambda_n = cn\pi/L$ como antes)

$$(12) \qquad \boxed{u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \operatorname{sen} \lambda_n t) \operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x.}$$

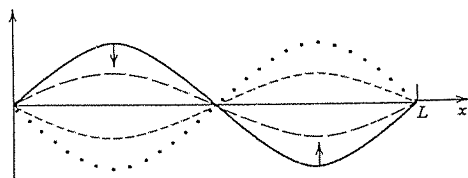


Figura 253. Segundo modo normal para varios valores de t.

Satisfacción de la condición inicial (3) (dado el desplazamiento inicial). Por (12) y (3) se obtiene

$$(13) \qquad u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x = f(x).$$

Por tanto, las B_n deben elegirse de tal modo que $u(x, 0)$ quede como la serie senoidal de Fourier de $f(x)$; así, por (4) de la sección 10.5,

$$(14) \qquad \boxed{B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, dx,} \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

Satisfacción de la condición inicial (4) (dada la velocidad inicial). De manera similar, al derivar (12) con respecto a t y usando (4), se obtiene

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-B_n\lambda_n \operatorname{sen}\lambda_n t + B_n^*\lambda_n \cos \lambda_n t) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right]_{t=0}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} B_n^*\lambda_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} = g(x).$$

Por tanto, las B_n^* deben elegirse de tal modo que para $t = 0$ la derivada $\partial u/\partial t$ quede como la serie senoidal de Fourier de $g(x)$; así, por (4) de la sección 11.5,

$$B_n^*\lambda_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, dx$$

o, como $\lambda_n = cn\pi/L$,

$$(15) \qquad \boxed{B_n^* = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, dx,} \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

Resultado. La discusión anterior indica que $u(x, t)$ dada por (12) con coeficientes (14) y (15) es una solución de (1) que satisface todas las condiciones (2), (3), (4) del problema planteado, siempre que la serie (12) converja y también lo haga la serie obtenida al derivar dos veces término a término (12) con respecto a x y t y que tenga las sumas $\partial^2 u/\partial x^2$ y $\partial^2 u/\partial t^2$, respectivamente, que son continuas.

Solución (12) establecida. De acuerdo con la discusión anterior, la solución (12) es en principio una expresión puramente formal, pero en seguida se establecerá. A fin de simplificar, sólo se considera el caso en que la velocidad inicial $g(x)$ forma una identidad con cero. Entonces las B_n^* son cero y (12) se reduce a

$$(16) \qquad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \lambda_n t \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}, \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}.$$

Es posible *sumar esta serie*, es decir, escribir el resultado en una forma cerrada o finita. Para ello se usa la fórmula [ver (11), apéndice 3.1]

$$\cos \frac{cn\pi}{L}t \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L}x = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\left\{\frac{n\pi}{L}(x - ct)\right\} + \operatorname{sen}\left\{\frac{n\pi}{L}(x + ct)\right\}\right].$$

Por consiguiente, (16) puede escribirse en la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left\{\frac{n\pi}{L}(x - ct)\right\} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left\{\frac{n\pi}{L}(x + ct)\right\}.$$

Estas dos series son las obtenidas al sustituir $x - ct$ y $x + ct$, respectivamente, para la variable x en la serie senoidal de Fourier (13) para $f(x)$. Por tanto,

(17) $$\boxed{u(x, t) = \tfrac{1}{2}[f^*(x - ct) + f^*(x + ct)]}$$

donde f^* es la extensión periódica impar de f con el periodo $2L$ (figura 254). Puesto que la deflexión inicial $f(x)$ es continua en el intervalo $0 \leqq x \leqq L$ y es cero en los puntos extremos, por (17) se sigue que $u(x, t)$ es una función continua de las dos variables x y t para todos los valores de las variables. Al derivar (17) se observa que $u(x, t)$ es una solución de (1), siempre que $f(x)$ sea derivable dos veces en el intervalo $0 < x < L$, y que tenga segundas derivadas laterales en $x = 0$ y $x = L$, que son cero. Bajo estas condiciones, $u(x, t)$ se establece como solución de (1), satisfaciendo (2)-(4). ∎

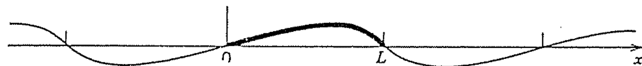


Figura 254. Extensión periódica impar de $f(x)$.

Si $f'(x)$ y $f''(x)$ sólo son continuas por secciones (ver la sección 6.1), o si las derivadas laterales son diferentes de cero, entonces para cada t habrá un número finito de valores de x en los que las segundas derivadas de u que aparecen en (1) no existen. Excepto en estos puntos, la ecuación de onda seguirá satisfaciéndose, y entonces $u(x, t)$ puede considerarse como una **"solución generalizada"**, como se le conoce, es decir, como una solución en un sentido más amplio. Por ejemplo, una deflexión inicial triangular como la del ejemplo 1 (siguiente) lleva a una solución generalizada.

La representación (17) tiene una interesante interpretación física, como sigue. La gráfica de $f^*(x - ct)$ se obtiene a partir de la gráfica de $f^*(x)$ moviendo esta última ct unidades a la derecha (figura 255). Esto significa que $f^*(x - ct)$ $(c > 0)$ representa una

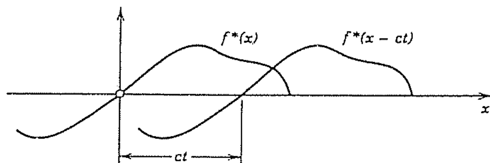


Figura 255. Interpretación de (17).

onda que se desplaza a la derecha cuando t se incrementa. De manera similar, $f^*(x + ct)$ representa una onda que se desplaza a la izquierda, y $u(x, t)$ es la superposición de estas dos ondas.

EJEMPLO 1 Cuerda vibratoria si la deflexión inicial es triangular

Encontrar la solución de la ecuación de onda (1) correspondiente a la deflexión inicial triangular

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2k}{L}x & \text{si } 0 < x < \dfrac{L}{2} \\ \dfrac{2k}{L}(L - x) & \text{si } \dfrac{L}{2} < x < L. \end{cases}$$

y a la velocidad inicial cero. [En la parte superior de la figura 256 se ilustra $f(x) = u(x, 0)$.]

Solución. Puesto que $g(x) \equiv 0$, se tiene $B_n^* = 0$ en (12) y por el ejemplo 1 de la sección 10.5 se observa que los B_n están dados por (5), sección 10.5. Por tanto, (12) asume la forma

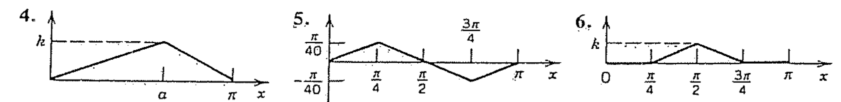
$$u(x, t) = \frac{8k}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{L}x \cos\frac{\pi c}{L}t - \frac{1}{3^2}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{L}x \cos\frac{3\pi c}{L}t + - \cdots\right].$$

Para trazar la gráfica de la solución puede usarse $u(x, 0) = f(x)$ y la interpretación anterior de las dos funciones en la representación (17). Esto lleva a la gráfica ilustrada en la figura 256, en la página siguiente.

Problemas de la sección 11.3

Encontrar la deflexión $u(x, t)$ de la cuerda vibratoria (longitud $L = \pi$, extremos fijos y $c^2 = T/\rho = 1$) correspondiente a la velocidad inicial cero y a la deflexión inicial:

1. $0.02 \operatorname{sen} x$ **2.** $k \operatorname{sen} 3x$ **3.** $k(\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x)$



7. $k(\pi x - x^2)$ **8.** $k(\pi^2 x - x^3)$ **9.** $k[(\frac{1}{2}\pi)^4 - (x - \frac{1}{2}\pi)^4]$

Encontrar la deflexión $u(x, t)$ de la cuerda vibratoria (longitud $L = \pi$, extremos fijos, $c^2 = 1$) si la deflexión inicial $f(x)$ y la velocidad inicial $g(x)$ son

10. $f = 0,\ g(x) = 0.1 \operatorname{sen} 2x$ **11.** $f(x) = 0.1 \operatorname{sen} x,\ g(x) = -0.2 \operatorname{sen} x$

12. $f = 0,\ g(x) = 0.01x$ si $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}\pi$, $g(x) = 0.01(\pi - x)$ si $\frac{1}{2}\pi < x \leqq \pi$

13. ¿De qué manera se afecta la altura del tono fundamental al duplicar la tensión de una cuerda?

14. ¿De qué manera la frecuencia del modo fundamental de la cuerda vibratoria depende de la longitud de la misma, de la tensión y de la masa por unidad de longitud?

15. ¿Cuál es la razón entre las amplitudes del modo fundamental y del segundo armónico en el problema 7? ¿Cuál es la razón $a_1^2/(a_1^2 + a_2^2 + \cdots)$? *Sugerencia.* Usar la identidad de Parseval de la sección 10.8.

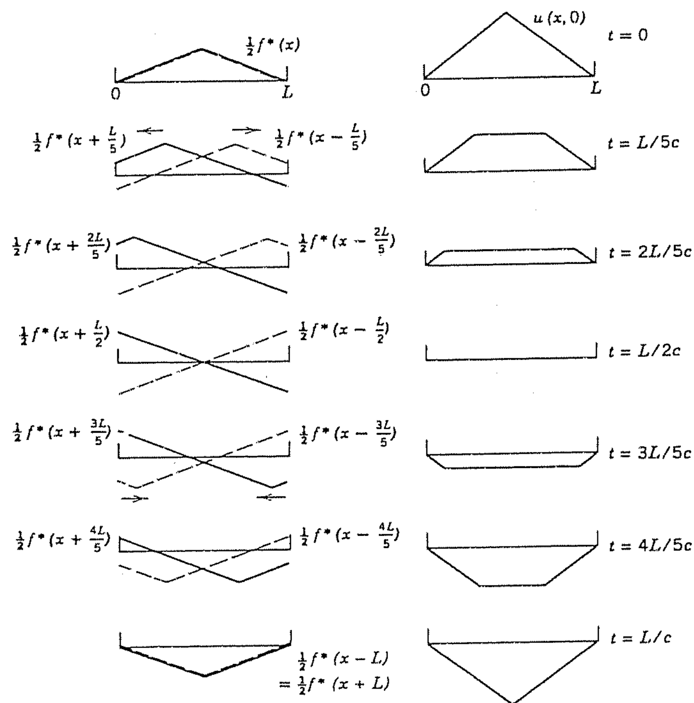


Figura 256. Solución $u(x, t)$ del ejemplo 1 para varios valores de t (parte derecha de la figura) obtenida como la superposición de una onda que se desplaza a la derecha (línea discontinua) y una onda que se desplaza a la izquierda (parte izquierda de la figura).

Encontrar las soluciones $u(x, y)$ de las ecuaciones siguientes por separación de variables.

16. $u_x + u_y = 0$
17. $u_x - u_y = 0$
18. $xu_x - yu_y = 0$
19. $yu_x - xu_y = 0$
20. $u_{xx} + u_{yy} = 0$
21. $u_x - yu_y = 0$
22. $u_x + u_y = 2(x + y)u$
23. $u_{xy} - u = 0$
24. $x^2u_{xy} + 3y^2u = 0$

Vibraciones forzadas de una cuerda elástica

25. Demostrar que las vibraciones forzadas de una cuerda elástica están gobernadas por

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \frac{P}{\rho}, \tag{18}$$

donde $P(x, t)$ es la fuerza externa por unidad de longitud que actúa perpendicular a la cuerda.

26. Suponer que la fuerza externa es senoidal, por ejemplo, $P = A\rho$ sen ωt. Demostrar que

$$P/\rho = A \operatorname{sen} \omega t = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

donde $k_n(t) = (2A/n\pi)(1 - \cos n\pi)$ sen ωt; por consiguiente, $k_n = 0$ (n par) y $k_n = (4A/n\pi)$ sen ωt (n impar). Además, demostrar que la sustitución de

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad \text{en (1) da} \quad \ddot{G}_n + \lambda_n^2 G_n = 0, \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}.$$

27. Demostrar que al sustituir u y P/ρ del problema 26 en (18) se obtiene

$$\ddot{G}_n + \lambda_n^2 G_n = \frac{2A}{n\pi}(1 - \cos n\pi) \operatorname{sen} \omega t, \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}.$$

Demostrar que si $\lambda_n^2 \neq \omega^2$, la solución es

$$G_n(t) = B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \operatorname{sen} \lambda_n t + \frac{2A(1 - \cos n\pi)}{n\pi(\lambda_n^2 - \omega^2)} \operatorname{sen} \omega t.$$

28. Determinar B_n y B_n^* del problema 27 de tal modo que u satisfaga las condiciones iniciales $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = 0$.
29. Demostrar que en el caso de resonancia ($\lambda_n = \omega$),

$$G_n(t) = B_n \cos \omega t + B_n^* \operatorname{sen} \omega t - \frac{A}{n\pi\omega}(1 - \cos n\pi)t \cos \omega t.$$

30. Demostrar que un problema (1)-(4) con condiciones en la frontera más complicadas, por ejemplo, $u(0, t) = 0$, $u(L, t) = h(t)$, puede reducirse a un problema para una nueva función v que satisface las condiciones $v(0, t) = v(L, t) = 0$, $v(x, 0) = f_1(x)$, $v_t(x, 0) = g_1(x)$ pero a una ecuación de onda no homogénea. *Sugerencia.* Hacer $u = v + w$ y determinar w de manera apropiada.

11.4 SOLUCIÓN DE D'ALEMBERT DE LA ECUACIÓN DE ONDA

Es interesante observar que la solución (17), sección 11.3, de la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad c^2 = \frac{T}{\rho}, \tag{1}$$

puede obtenerse de manera inmediata al hacer la transformación adecuada de (1), a saber, introduciendo las nuevas variables independientes[1]

$$v = x + ct, \qquad z = x - ct. \tag{2}$$

[1] Cabe mencionar que la teoría general de las ecuaciones diferenciales parciales proporciona una manera sistemática para encontrar esta transformación que simplificará la ecuación. Ver la referencia [C9] en el apéndice 1.

Entonces u queda como una función de v y z, y las derivadas de (1) pueden expresarse en términos de derivadas con respecto a v y z mediante la aplicación de la regla de la cadena de la sección 8.8. Al denotar las derivadas parciales con subíndices, a partir de (2) se observa que $v_x = 1$ y $z_x = 1$. Para simplificar se denota $u(x, t)$, como función de v y z, con la misma letra u. Entonces

$$u_x = u_v v_x + u_z z_x = u_v + u_z.$$

Al aplicar la regla de la cadena en el segundo miembro y usando $v_x = 1$ y $z_x = 1$ se encuentra

$$u_{xx} = (u_v + u_z)_x = (u_v + u_z)_v v_x + (u_v + u_z)_z z_x = u_{vv} + 2u_{vz} + u_{zz}.$$

La otra derivada de (1) se transforma con el mismo procedimiento, encontrándose

$$u_{tt} = c^2(u_{vv} - 2u_{vz} + u_{zz}).$$

Al incluir estos dos resultados en (1) se obtiene (ver la nota de pie de página 2 del apéndice 3.2)

(3) $$\boxed{u_{vz} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial v} = 0.}$$

Evidentemente, el punto del presente método es que la ecuación resultante (3) puede resolverse con facilidad por dos integraciones sucesivas. De hecho, al integrar con respecto a z se encuentra

$$\frac{\partial u}{\partial v} = h(v)$$

donde h(v) es una función arbitraria de v. La integración con respecto a v da como resultado

$$u = \int h(v)\, dv + \psi(z)$$

donde $\psi(z)$ es una función arbitraria de z. Puesto que la integral es una función de v, por ejemplo, $\phi(v)$, la solución u es de la forma $u = \phi(v) + \psi(z)$. Por (2),

(4) $$u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct).$$

Esta expresión se conoce como la **solución de D'Alembert**[2] de la ecuación de onda (1).

Esta deducción fue mucho más elegante que el método de la sección 11.3, pero el método de D'Alembert es especial, en tanto que el uso de series de Fourier se aplica a varias ecuaciones, como se verá.

[2] JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717-1783), matemático francés, quien es conocido también por sus importantes trabajos en mecánica.

Solución de D'Alembert que satisface las condiciones iniciales. Estas son

(5) $$u(x, 0) = f(x)$$

(6) $$u_t(x, 0) = g(x)$$

como en la sección 11.3. Al derivar (4) se tiene

(7) $$u_t(x, t) = c\phi'(x + ct) - c\psi'(x - ct),$$

donde las primas denotan derivadas con respecto a los argumentos *completos* $x + ct$ y $x - ct$, respectivamente. Por (4)-(7) se tiene

(8) $$u(x, 0) = \phi(x) + \psi(x) = f(x),$$

(9) $$u_t(x, 0) = c\phi'(x) - c\psi'(x) = g(x).$$

Al dividir (9) entre c e integrar con respecto a x, se obtiene

(10) $$\phi(x) - \psi(x) = k(x_0) + \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} g(s)\, ds, \qquad k(x_0) = \phi(x_0) + \psi(x_0).$$

Si se suma esta expresión a (8), entonces ψ se cancela y al dividir entre 2 se obtiene

(11) $$\phi(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(s)\, ds + \frac{1}{2} k(x_0).$$

De manera similar, al restar (10) de (8) y dividir entre 2 se obtiene

(12) $$\psi(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(s)\, ds - \frac{1}{2} k(x_0).$$

En (11) se sustituye x por $x + ct$; se obtiene así una integral de x_0 a $x + ct$. En (12) se sustituye x por $x - ct$ y se obtiene una integral de x_0 a $x - ct$ con signo menos o una integral de $x - ct$ a x_0 con signo más. Al sumar se obtiene justamente la expresión que se necesita en (4); por tanto, el resultado final es

(13) $$\boxed{u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds.}$$

Si la velocidad inicial es cero, se observa que esta expresión se reduce a

(14) $$u(x, t) = \tfrac{1}{2}[f(x + ct) + f(x - ct)],$$

que concuerda con (17) de la sección 11.3. El estudiante puede demostrar que debido a las condiciones en la frontera (2) en esa sección, la función f debe ser impar y debe tener periodo $2L$.

El resultado obtenido indica que las dos condiciones iniciales y las condiciones en la frontera determinan la función de manera única.

La solución de la ecuación de onda por los métodos de la transformada de Laplace y de Fourier se presentará en las secciones 11.13 y 11.14.

Problemas de la sección 11.4

Usando (14), trazar una figura (del tipo de la figura 256, sección 11.3) de la deflexión $u(x, t)$ de una cuerda vibratoria (longitud $L = 1$, extremos fijos, $c = 1$) empezando con una velocidad inicial cero y las siguientes deflexiones iniciales $f(x)$, donde k es pequeña, por ejemplo, $k = 0.01$.

1. $f(x) = kx(1 - x)$ 2. $f(x) = k \operatorname{sen} 2\pi x$ 3. $f(x) = k(x - x^3)$
4. $f(x) = k(x^2 - x^4)$ 5. $f(x) = k \operatorname{sen}^2 \pi x$ 6. $f(x) = k(x^3 - x^5)$
7. Demostrar que c es la rapidez de las dos ondas dadas por (4).
8. Si un alambre de acero de 2 metros de largo pesa 0.8 nt (aproximadamente 0.16 lb) y se estira por una fuerza tensora de 200 nt (unas 45 lb), ¿cuál es la rapidez c correspondiente de las ondas transversales?
9. ¿Cuáles son las frecuencias de las eigenfunciones del problema 8?
10. Resolver la ecuación de una cuerda de longitud L

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - \gamma^2 u$$

que se mueve en un medio elástico ($\gamma^2 = const$, proporcional al coeficiente de elasticidad del medio), que está fija en los extremos y sujeta al desplazamiento inicial $f(x)$ y con velocidad inicial cero.
11. Demostrar que, debido a la condición en la frontera (2) de la sección 11.3, la función f de (14) de la presente sección debe ser impar de periodo $2L$.

Usando las transformaciones indicadas, resolver las siguientes ecuaciones.

12. $u_{xy} - u_{yy} = 0 \quad (v = x,\ z = x + y)$
13. $xu_{xy} = yu_{yy} + u_y \quad (v = x,\ z = xy)$
14. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0 \quad (v = x,\ z = x + y)$
15. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0 \quad (v = x,\ z = x - y)$
16. $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} = 0 \quad (v = x + y,\ z = 2x - y)$
17. $u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} = 0 \quad (v = x + y,\ z = 3x + y)$

Tipos y formas normales de ecuaciones diferenciales parciales lineales. Se dice que una ecuación de la forma

$$(15) \qquad Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

es **elíptica** si $AC - B^2 > 0$, **parabólica** si $AC - B^2 = 0$ e **hiperbólica** si $AC - B^2 < 0$. [Aquí, A, B, C pueden ser funciones de x y y, y el tipo de (15) puede ser diferente en diferentes partes del plano xy.]

18. Demostrar que
La **ecuación de Laplace** $u_{xx} + u_{yy} = 0$ es elíptica,
la **ecuación del calor** $u_t = c^2 u_{xx}$ es parabólica,
la **ecuación de onda** $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ es hiperbólica,
la **ecuación de Tricomi** $yu_{xx} + u_{yy} = 0$ es de tipo mixto (elíptica en el semiplano superior e hiperbólica en el semiplano inferior).
19. Si la ecuación (15) es *hiperbólica*, puede transformarse a la *forma normal* $u_{vz} = F^*(v, z, u, u_v, u_z)$ haciendo $v = \Phi(x, y)$, $z = \Psi(x, y)$, donde $\Phi = const$ y $\Psi = const$ son las soluciones $y = y(x)$ de la ecuación $Ay'^2 - 2By' + C = 0$ (ver la referencia [C9]). Demostrar que en el caso de la ecuación de onda (1),

$$\Phi = x + ct, \qquad \Psi = x - ct.$$

20. Si (15) es *parabólica*, la sustitución $v = x$, $z = \Psi(x, y)$, con Ψ definida como en el problema 19, la reduce a la *forma normal* $u_{vv} = F^*(v, z, u, u_v, u_z)$. Comprobar este resultado para la ecuación $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$.

Vibraciones de una viga. Puede demostrarse que las pequeñas vibraciones libres verticales de una viga uniforme (figura 257) están gobernadas por la ecuación de cuarto orden

$$(16) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \qquad \text{(Ref. [C9].)}$$

donde $c^2 = EI/\rho A$ (E = módulo de elasticidad de Young, I = momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje y en la figura, ρ = densidad, A = área de la sección transversal).

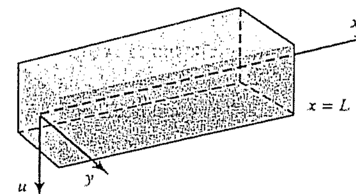


Figura 257. Viga no deformada del problema 21.

21. Sustituyendo $u = F(x)G(y)$ en (16) y separando variables, demostrar que

$$F^{(4)}/F = -\ddot{G}/c^2G = \beta^4 = const,$$

$$F(x) = A \cos \beta x + B \operatorname{sen} \beta x + C \cosh \beta x + D \operatorname{senh} \beta x,$$

$$G(t) = a \cos c\beta^2 t + b \operatorname{sen} c\beta^2 t.$$

22. Encontrar las soluciones $u_n = F_n(x)G_n(t)$ de (16) correspondientes a la velocidad inicial cero y que satisfagan las condiciones en la frontera (ver la figura 258)
$u(0, t) = 0$, $u(L, t) = 0$ (extremos simplemente apoyados para todos los instantes t),
$u_{xx}(0, t) = 0$, $u_{xx}(L, t) = 0$ (momentos cero, por consiguiente curvatura cero, en los extremos).

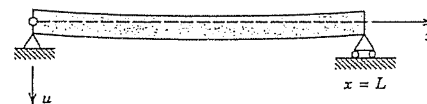


Figura 258. Viga del problema 22.

23. Encontrar la solución de (16) que satisface las condiciones del problema 22 y la condición inicial $u(x, 0) = f(x) = x(L - x)$.
24. Comparar los resultados del problema 23 y del problema 7, sección 11.3. ¿Cuál es la diferencia básica entre las frecuencias de los modos normales de la cuerda vibratoria y la viga vibratoria?
25. ¿Cuáles son las condiciones en la frontera si la viga está empotrada en ambos extremos? (Ver la figura 259.)



Figura 259. Viga del problema 25.

26. Demostrar que $F(x)$ del problema 21 satisface las condiciones del problema 25 si βL es una raíz de la ecuación

(17) $$\cosh \beta L \cos \beta L = 1.$$

27. Determinar las soluciones aproximadas de (17).
28. Si la viga está empotrada a la izquierda y está suelta en el otro extremo (figura 260), las condiciones en la frontera son

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(0, t) = 0, \quad u_{xx}(L, t) = 0, \quad u_{xxx}(L, t) = 0.$$

Demostrar que $F(x)$ del problema 21 satisface estas condiciones si βL es una raíz de la ecuación

(18) $$\cosh \beta L \cos \beta L = -1.$$

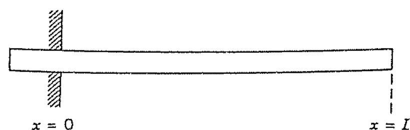


Figura 260. Viga del problema 28.

29. Encontrar las soluciones aproximadas de (18).
30. Las **vibraciones longitudinales de una barra o varilla elástica** en la dirección del eje x están gobernadas por la ecuación de onda $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $c^2 = E/\rho$ (ver Tolstov [C11], p. 275). Si la varilla está sujeta en uno de los extremos, $x = 0$, y está suelta en el otro, $x = L$, se tiene $u(0, t) = 0$ y $u_x(L, t) = 0$ (ya que la fuerza en el extremo suelto es cero). Demostrar que el movimiento correspondiente al desplazamiento inicial $u(x, 0) = f(x)$ y a la velocidad inicial cero es

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{sen} p_n x \cos p_n ct, \quad A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} p_n x \, dx, \quad p_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L}$$

31. **(Ecuación de Airy)** Demostrar que por separación de variables a partir de la **ecuación de Tricomi** (problema 18) puede obtenerse la ecuación de Airy $G'' - yG = 0$. (Para las soluciones, ver la página 446 de la referencia [1] mencionada en el apéndice 1. Ver asimismo el problema de repaso 30 del capítulo 5.)

11.5 ECUACIÓN DEL CALOR: SOLUCIÓN POR SERIES DE FOURIER

De la ecuación de onda se pasa ahora a la siguiente ecuación "grande", la **ecuación del calor**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u, \qquad c^2 = \frac{K}{\sigma \rho},$$

que da la temperatura $u(x, y, z, t)$ de un cuerpo de material homogéneo. Aquí c^2 es la difusividad térmica, K es la conductividad térmica, σ es el calor específico y ρ es la densidad del material del cuerpo. $\nabla^2 u$ es el laplaciano de u, y con respecto a las coordenadas cartesianas x, y, z,

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

(La ecuación del calor se dedujo en la sección 9.8.)

Como importante aplicación, se considera primero la temperatura de una barra o alambre delgados de sección transversal constante y material homogéneo, la cual se orienta a lo largo del eje x (figura 261) y está aislada perfectamente en su superficie lateral, de tal modo que el calor sólo fluye en la dirección x. Entonces u depende únicamente de x y del tiempo t, y la ecuación del calor queda como la **ecuación unidimensional del calor**

(1) $$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Esta expresión parece diferir muy poco de la ecuación de onda, que tiene un término u_{tt} en lugar de u_t, pero se verá que esto hará que el comportamiento de las soluciones de (1) sea por completo diferente al de las soluciones de la ecuación de onda.

Se resolverá (1) para algunos tipos importantes de condiciones en la frontera e iniciales. Se empieza con el caso en que los extremos $x = 0$ y $x = L$ de la barra se mantienen en la temperatura cero, de tal modo que se tienen las **condiciones en la frontera**

(2) $$u(0, t) = 0, \qquad u(L, t) = 0 \qquad \text{para toda } t,$$

y la temperatura inicial de la barra es $f(x)$, por lo que se tiene la **condición inicial**

(3) $$u(x, 0) = f(x) \qquad [f(x) \text{ dada}].$$



Figura 261. Barra bajo consideración.

Se determinará una solución $u(x, t)$ de (1) que satisface (2) y (3) —una condición inicial será suficiente, a diferencia de las dos condiciones iniciales para la ecuación de onda. Técnicamente, el método discutido será un paralelo del de la ecuación de onda de la sección 11.3: una aplicación de la separación de variables, seguida del uso de series de Fourier. El estudiante puede encontrar ilustrativa una comparación paso a paso.

Primer paso. Dos ecuaciones diferenciales ordinarias. Al sustituir

(4) $$u(x, t) = F(x)G(t)$$

en (1) se obtiene $F\dot{G} = c^2F''G$ con $\dot{G} = dG/dt$ y $F'' = d^2F/dx^2$. Para separar las variables, se divide entre c^2FG, obteniéndose

(5) $$\frac{\dot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F}.$$

El primer miembro sólo depende de t y el segundo lo hace sólo de x, por lo que ambos miembros deben ser iguales a una constante k (como en la sección 11.3). El estudiante puede demostrar que para $k \geqq 0$ la solución única $u = FG$ que satisface (2) es $u \equiv 0$. Para $k = -p^2$ negativa se tiene por (5)

$$\frac{\dot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F} = -p^2.$$

Se observa que esta expresión da como resultado las dos ecuaciones diferenciales ordinarias lineales

(6) $$\boxed{F'' + p^2F = 0}$$

y

(7) $$\boxed{\dot{G} + c^2p^2G = 0.}$$

Segundo paso. Satisfacción de las condiciones en la frontera. Se resuelve primero (6). Una solución general es

(8) $$F(x) = A\cos px + B\,\mathrm{sen}\,px.$$

Por las condiciones en la frontera (2) se sigue que

$$u(0, t) = F(0)G(t) = 0 \quad \text{y} \quad u(L, t) = F(L)G(t) = 0.$$

Puesto que $G \equiv 0$ daría como resultado $u \equiv 0$, se requiere que $F(0) = 0$, $F(L) = 0$ y por (8) se obtiene $F(0) = A = 0$ y entonces $F(L) = B$ sen $pL = 0$, con $B \neq 0$ (a fin de evitar $F \equiv 0$); por tanto,

$$\mathrm{sen}\,pL = 0, \quad \text{por tanto} \quad p = \frac{n\pi}{L}, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

Así, al hacer $B = 1$, se obtienen las siguientes soluciones de (6) que satisfacen (2):

$$F_n(x) = \mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

(Como en la sección 11.3, no es necesario considerar valores enteros negativos de n.)

Se resuelve ahora la ecuación diferencial (7), que para $p = n\pi/L$, como acaba de obtenerse, es

$$\dot{G} + \lambda_n^2 G = 0 \qquad \text{donde} \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}.$$

Tiene la solución general

$$G_n(t) = B_n e^{-\lambda_n^2 t}, \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

Donde B_n es una constante. Por tanto las funciones

(9) $$\boxed{u_n(x, t) = F_n(x)G_n(t) = B_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,e^{-\lambda_n^2 t}} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

son soluciones de la ecuación del calor (1), las cuales satisfacen (2). Estas son las **eigenfunciones** del problema, que corresponden a los **eigenvalores** $\lambda_n = cn\pi/L$.

Tercer paso. Solución del problema completo. Hasta este punto se tienen las soluciones (9) de (1) que satisfacen las condiciones en la frontera (2). Para obtener una solución que también satisfaga la condición inicial (3), se considera una serie de estas eigenfunciones,

(10) $$\boxed{u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,e^{-\lambda_n^2 t}} \qquad \left(\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}\right).$$

A partir de esta expresión y de (3) se tiene

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L} = f(x).$$

Así, para que (10) satisfaga (3), las B_n deben ser los coeficientes de la serie senoidal de Fourier, como se dan por (4) de la sección 10.5; por tanto,

(11) $$\boxed{B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,dx} \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

La solución del problema planteado puede establecerse, suponiendo que $f(x)$ es continua por secciones en el intervalo $0 \leqq x \leqq L$ (ver la sección 6.1) y que tiene derivadas laterales[3] en todos los puntos interiores de ese intervalo; es decir, bajo estos su-

[3] Ver la nota de pie de página 7 de la sección 10.2.

puestos la serie (10) con coeficientes (11) es la solución del problema físico planteado. La demostración, que requiere del conocimiento de la convergencia uniforme de series, se dejará para más adelante (problemas 23 y 24 de la sección 14.6).

Debido al factor exponencial, todos los términos de (10) tienden a cero cuando t tiende a infinito. La rapidez del decremento varía con n.

EJEMPLO 1 Temperatura inicial senoidal

Encontrar la temperatura $u(x, t)$ de una barra de cobre con aislamiento lateral de 80 cm de largo si la temperatura inicial es 100 sen ($\pi x/80$) °C y los extremos se mantienen a 0 °C. ¿En cuánto tiempo descenderá a 50 °C la temperatura máxima de la barra? Empezar con una conjetura, para después calcular la respuesta. Datos físicos del cobre: densidad 8.92 g/cm³, calor específico 0.092 cal/g °C, conductividad térmica 0.95 cal/cm s °C.

Solución. Por la condición inicial se obtiene

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{80} = f(x) = 100 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{80}.$$

En consecuencia, por inspección o por (10) se obtiene $B_1 = 100$, $B_2 = B_3 = \cdots = 0$. En (10) se necesita $\lambda_1^2 = c^2\pi^2/L^2$, donde $c^2 = K/\sigma\rho = 0.95/0.092 \cdot 8.92 = 1.158$ [cm²/s]. Se obtiene por tanto $\lambda_1^2 = 1.158 \cdot 9.870/6\,400 = 0.001785$ [s⁻¹]. La solución (10) es

$$u(x, t) = 100 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{80} e^{-0.001785t}.$$

Además, $100e^{-0.001785t} = 50$ cuando $t = (\ln 0.5)/(-0.001785) = 388$ [segundos] ≈ 6.5 [minutos]. ∎

EJEMPLO 2 Rapidez del descenso de la temperatura

Resolver el problema del ejemplo 1 cuando la temperatura inicial es 100 sen ($3\pi x/80$) °C y los datos restantes son los mismos.

Solución. En (10), en lugar de $n = 1$ se tiene ahora $n = 3$, y $\lambda_3^2 = 3^2\lambda_1^2 = 9 \cdot 0.001785 = 0.01607$, por lo que ahora la solución es

$$u(x, t) = 100 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{80} e^{-0.01607t}.$$

En consecuencia, la temperatura máxima desciende a 50 °C en $t = (\ln 0.5)/(-0.01607) = 43$ [segundos], que es mucho más rápido (9 veces más rápido que en el problema 1).

Si se hubiera escogido una n más grande, el descenso habría sido aún más rápido, y en una suma o serie de los términos, cada uno de ellos tiene su propia rapidez de descenso y los términos con n grande son prácticamente 0 después de un tiempo muy corto. El ejemplo siguiente es de este tipo, y la curva de la figura 262 correspondiente a $t = 0.5$ se parece a una curva senoidal; es decir, es prácticamente la gráfica del primer término de la solución. ∎

EJEMPLO 3 Temperatura inicial "triangular" de una barra

Encontrar la temperatura de la barra con aislamiento lateral de longitud L cuyos extremos se conservan a la temperatura 0, suponiendo que la temperatura inicial es

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 < x < L/2, \\ L - x & \text{si} \quad L/2 < x < L. \end{cases}$$

(En la parte superior de la figura 262 se ilustra esta función para el caso especial en que $L = \pi$.)

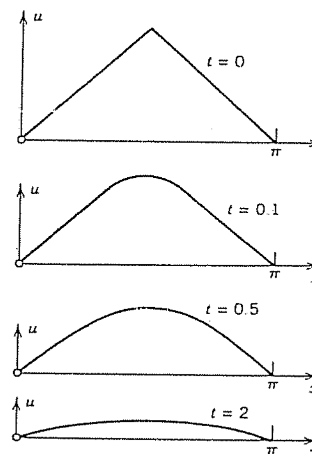


Figura 262. Solución del ejemplo 3 para $L = \pi$, $c = 1$ y varios valores de t.

Solución. Por (11) se obtiene

$$B_n = \frac{2}{L}\left(\int_0^{L/2} x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\,dx + \int_{L/2}^{L} (L - x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\,dx\right). \qquad (11^*)$$

Por integración se obtiene $B_n = 0$ si n es par y

$$B_n = \frac{4L}{n^2\pi^2} \qquad (n = 1, 5, 9, \cdots),$$

$$B_n = -\frac{4L}{n^2\pi^2} \qquad (n = 3, 7, 11, \cdots)$$

(ver también el ejemplo 1 de la sección 10.5 con $k = L/2$). Por tanto, la solución es

$$u(x, t) = \frac{4L}{\pi^2}\left[\operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \exp\left[-\left(\frac{c\pi}{L}\right)^2 t\right] - \frac{1}{9} \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L} \exp\left[-\left(\frac{3c\pi}{L}\right)^2 t\right] + - \cdots\right].$$

La figura 262 indica que la temperatura desciende cuando t se incrementa, como consecuencia de la pérdida de calor debida al enfriamiento de los extremos.

El estudiante puede comparar la figura 262 con la figura 256 de la sección 11.3 y comentar. ∎

EJEMPLO 4 Barra con extremos aislados. Eigenvalor 0

Encontrar una fórmula de las soluciones de (1), (3) con (2) reemplazada por la condición de que ambos extremos de la barra están aislados.

Solución. Experimentos físicos indican que la rapidez del flujo de calor es proporcional al gradiente de la temperatura. Por tanto, si los extremos $x = 0$ y $x = L$ de la barra están aislados, de tal modo que no es posible el flujo del calor por los extremos, se tienen las condiciones en la frontera

$$u_x(0, t) = 0, \qquad u_x(L, t) = 0 \qquad \text{para toda } t. \qquad (2^*)$$

Puesto que $u(x, t) = F(x)G(t)$, se obtiene

$$u_x(0, t) = F'(0)G(t) = 0, \qquad u_x(L, t) = F'(L)G(t) = 0.$$

Al derivar (8) se tiene $F'(x) = -Ap \operatorname{sen} px + Bp \cos px$, de donde

$$F'(0) = Bp = 0 \qquad \text{y entonces} \qquad F'(L) = -Ap \operatorname{sen} pL = 0.$$

Por la segunda de estas condiciones se obtiene

$$p = p_n = \frac{n\pi}{L}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Por esta expresión y (8) con $A = 1$ y $B = 0$ se obtiene

$$F_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Con G_n como antes a partir de esta expresión se obtienen las eigenfunciones

(12) $$u_n(x, t) = F_n(x)G_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda_n^2 t} \qquad (n = 0, 1, \cdots)$$

correspondientes a los eigenvalores $\lambda_n = cn\pi/L$. Estos ultimos son como antes, pero ahora se tienen el eigenvalor $\lambda_0 = 0$ y la eigenfunción $u_0 = const$ adicionales, que es la solución del problema si la temperatura inicial $f(x)$ es constante. Se demuestra así el notable hecho de que una constante de separación bien puede ser cero y que cero puede ser un eigenvalor.

Además, mientras que (9) dio una serie senoidal de Fourier, por (12) se obtiene ahora una serie cosenoidal de Fourier

(13) $$\boxed{u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda_n^2 t}} \qquad \left(\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}\right)$$

con coeficientes resultantes de la condición inicial (3),

$$u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} = f(x),$$

en la forma [ver (2), sección 10.5]

(14) $$A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx, \qquad A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$ ∎

EJEMPLO 5 Temperatura inicial "triangular" de una barra con extremos aislados

Encontrar la temperatura de la barra del ejemplo 3, suponiendo que los extremos están aislados (en lugar de conservarse a la temperatura cero).

Solución. Para la temperatura inicial triangular, por (14) se obtiene $A_0 = L/4$ y (ver también el ejemplo 1 de la sección 10.5 con $k = L/2$)

$$A_n = \frac{2}{L}\left[\int_0^{L/2} x \cos \frac{n\pi x}{L}\,dx + \int_{L/2}^{L} (L - x) \cos \frac{n\pi x}{L}\,dx\right]$$

$$= \frac{2L}{n^2\pi^2}\left(2 \cos \frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1\right).$$

Por tanto la solución (13) es

$$u(x, t) = \frac{L}{4} - \frac{8L}{\pi^2}\left\{\frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{L} \exp\left[-\left(\frac{2c\pi}{L}\right)^2 t\right] + \frac{1}{6^2}\cos\frac{6\pi x}{L} \exp\left[-\left(\frac{6c\pi}{L}\right)^2 t\right] + \cdots\right\}.$$

Se observa que los términos se decrementan cuando t se incrementa y que $u \to L/4$, el valor medio de la temperatura inicial. Esto es plausible porque no es posible que escape calor de esta barra totalmente aislada. En contraste, el enfriamiento de los extremos en el ejemplo 3 llevó a una pérdida de calor y $u \to 0$, la temperatura a la que se conservan los extremos ∎

Flujo de calor bidimensional de estado estacionario

La ecuación bidimensional del calor es (ver el principio de esta sección)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\nabla^2 u = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

Si el flujo de calor es **estacionario** (es decir, independiente del tiempo), entonces $\partial u/\partial t = 0$ y la ecuación del calor se reduce a la **ecuación de Laplace**[4]

(15) $$\boxed{\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.}$$

Un problema de calor consiste entonces en esta ecuación que debe considerarse en alguna región R del plano xy y con una condición en la frontera dada sobre la curva frontera de R. A éste se le llama **problema con valor en la frontera**. Se le llama:

> **problema de Dirichlet** si u se prescribe en C,
> **problema de Neumann** si la derivada normal $u_n = \partial u/\partial n$ se prescribe en C,
> **problema mixto** si u se prescribe en una porción de C y u_n se prescribe en el resto de C.

Problema de Dirichlet en un rectángulo R (figura 263). Se considera un problema de Dirichlet para (15) en un rectángulo R, suponiendo que la temperatura $u(x, y)$ es

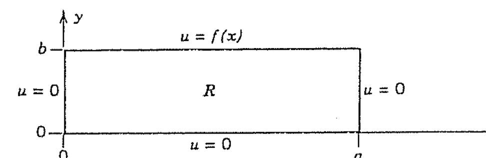


Figura 263. El rectángulo R y los valores en la frontera dados.

[4] Esta ecuación, que es muy importante, apareció en la sección 9.8 y se discutirá con mayor detalle en las secciones 11.9, 11.11, 11.12, 12.5 y en el capítulo 17.

igual a una función $f(x)$ dada en el lado superior y que es igual a 0 en los otros tres lados del rectángulo.

Este problema se resuelve por separación de variables. Al sustituir

$$u(x, y) = F(x)G(y)$$

en (15) y dividir entre FG se obtiene

$$\frac{1}{F} \cdot \frac{d^2F}{dx^2} = -\frac{1}{G} \cdot \frac{d^2G}{dy^2} = -k.$$

A partir de esta expresión y de las condiciones en la frontera izquierda y derecha,

$$\frac{d^2F}{dx^2} + kF = 0, \qquad F(0) = 0, \quad F(a) = 0.$$

De esta expresión se obtiene $k = (n\pi/a)^2$ y las soluciones diferentes de cero correspondientes

(16) $$F(x) = F_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} x, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

Entonces la ecuación para G queda como

$$\frac{d^2G}{dy^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 G = 0.$$

Las soluciones son

$$G(y) = G_n(y) = A_n e^{n\pi y/a} + B_n e^{-n\pi y/a}.$$

Ahora la condición en la frontera $u = 0$ en el lado inferior de R implica que $G_n(0) = 0$; es decir, $G_n(0) = A_n + B_n = 0$ o bien $B_n = -A_n$. Se obtiene así

$$G_n(y) = A_n(e^{n\pi y/a} - e^{-n\pi y/a}) = 2A_n \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{a}.$$

Por esta expresión y (16), escribiendo $2A_n = A_n^*$, se obtienen como **eigenfunciones** del problema en cuestión

(17) $$u_n(x, y) = F_n(x)G_n(y) = A_n^* \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{a}.$$

Éstas satisfacen la condición en la frontera $u = 0$ en los lados izquierdo, derecho e inferior.

Para llegar a una solución que satisfaga también la condición en la frontera

(18) $$u(x, b) = f(x)$$

en el lado superior, se considera la serie infinita

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y).$$

A partir de esta expresión, de (18) y de (17) con $y = b$, se obtiene

$$u(x, b) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi b}{a}.$$

Esta expresión puede escribirse en la forma

$$u(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n^* \operatorname{senh} \frac{n\pi b}{a}\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}.$$

Esto indica que las expresiones entre paréntesis deben ser los coeficientes de Fourier b_n de $f(x)$; es decir, por (4) de la sección 10.5,

$$b_n = A_n^* \operatorname{senh} \frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}\, dx.$$

Por esta expresión y (17) se observa que la solución del problema planteado es

(19) $$\boxed{u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{a}}$$

donde

(20) $$\boxed{A_n^* = \frac{2}{a \operatorname{senh}(n\pi b/a)} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}\, dx.}$$

Esta solución, obtenida formalmente haciendo caso omiso de la convergencia y de las sumas de las series para u, u_{xx} y u_{yy}, puede establecerse cuando f y f' son continuas y f'' es continua por secciones en el intervalo $0 \leqq x \leqq a$. La demostración es un tanto complicada y se apoya en la convergencia uniforme; puede encontrarse en la referencia [C2] del apéndice 1.

Potencial electrostático. Membrana elástica

La ecuación de Laplace (15) también gobierna el potencial electrostático de cargas eléctricas en cualquier región que esté libre de estas cargas. Así, el problema del calor de estado estacionario anterior también puede interpretarse como un problema de

potencial electrostático, de tal modo que (19), (20) es el potencial en el rectángulo R cuando el lado superior de R está en el potencial $f(x)$ y los otros tres lados están conectados a tierra.

En realidad, en el caso de estado estacionario, la ecuación bidimensional de onda (que se considerará en las secciones 11.7, 11.8) también se reduce a (15), y (19), (20) es entonces el desplazamiento de una membrana elástica rectangular (hoja de caucho, el parche de un tambor) que está fija a lo largo de su frontera, con tres lados en el plano xy y el cuarto dando el desplazamiento $f(x)$.

Es esta otra demostración impresionante del ***poder unificador*** de las matemáticas, la cual ilustra que sistemas físicos por completo diferentes pueden tener el mismo modelo matemático y, en consecuencia, pueden tratarse con los mismos métodos matemáticos.

Problemas de la sección 11.5

1. Trazar u_1, u_2, u_3 [ver (9), con $B_n = 1$, $c = 1$, $L = \pi$] como funciones de x para los valores $t = 0, 1, 2, 3$. Comparar el comportamiento de estas funciones.
2. ¿De qué manera la rapidez de descenso de (9) para n fija depende del calor específico, la densidad y la conductividad térmica del material?
3. Si la primera eigenfunción (9) de la barra se decrementa hasta la mitad de su valor en 10 segundos, ¿cuál es el valor de la difusividad?

Encontrar la temperatura $u(x, t)$ de una barra de plata (10 cm de longitud, sección transversal constante de área 1 cm², 10.6 g/cm³ de densidad, 1.04 cal/cm s °C de conductividad térmica, calor específico 0.056 cal/g °C) que está perfectamente aislada por los lados, cuyos extremos se mantienen a una temperatura de 0 °C y cuya temperatura inicial (en ° C) es $f(x)$, donde

4. $f(x) = \text{sen}\, 0.4\pi x$
5. $f(x) = k\ \text{sen}\, 0.1\pi x$
6. $f(x) = x$ si $0 < x < 5$ y 0 en caso contrario
7. $f(x) = 5 - |x - 5|$
8. $f(x) = 0.1x(100 - x^2)$
9. $f(x) = 0.01x(10 - x)$
10. $f(x) = x$ si $0 < x < 2.5$, $f(x) = 2.5$ si $2.5 < x < 7.5$, $f(x) = 10 - x$ si $7.5 < x < 10$
11. Suponer que una barra satisface los supuestos del texto y que sus extremos se mantienen a diferentes temperaturas constantes $u(0, t) = U_1$ y $u(L, t) = U_2$. Encontrar la temperatura $u_I(x)$ de la barra después de un tiempo prolongado (en teoría: cuando $t \to \infty$).
12. En el problema 11, sea la temperatura inicial $u(x, 0) = f(x)$. Demostrar que la temperatura para cualquier tiempo $t > 0$ es $u(x, t) = u_I(x) + u_{II}(x, t)$ con u_I como antes y

$$u_{II} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \,\text{sen}\, \frac{n\pi x}{L}\, e^{-(cn\pi/L)^2 t},$$

donde

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L [f(x) - u_I(x)]\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,dx + \frac{2}{n\pi}[(-1)^n U_2 - U_1].$$

13. **(Extremos aislados, condiciones en la frontera adiabáticas)** Encontrar la temperatura $u(x, t)$ de una barra de longitud L que está aislada perfectamente, también en los extremos en $x = 0$ y $x = L$, suponiendo que $u(x, 0) = f(x)$. *Información física*: El flujo de calor por las caras en los extremos es proporcional a los valores de $\partial u/\partial x$ ahí. Demostrar que esta situación corresponde a las condiciones

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x).$$

Demostrar que el método de separación de variables da la solución

$$u(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L}\, e^{-(cn\pi/L)^2 t}$$

donde, por (2) de la sección 10.5,

$$A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx, \qquad A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

Obsérvese que $u \to A_0$ cuando $t \to \infty$. ¿Concuerda este hecho con la intuición física del estudiante?

14. Encontrar la temperatura de la barra del problema 13 si el extremo izquierdo se mantiene a la temperatura cero, el derecho está aislado perfectamente y la temperatura inicial es U_0 = *const*.

Encontrar la temperatura de la barra del problema 13 si $L = \pi$, $c = 1$ y

15. $f(x) = 1$
16. $f(x) = x$
17. $f(x) = 0.5 \cos 2x$
18. $f(x) = x^2$
19. $f(x) = x$ si $0 < x < \frac{1}{2}\pi$, $f(x) = \pi - x$ si $\frac{1}{2}\pi < x < \pi$
20. $f(x) = 1$ si $0 < x < \frac{1}{2}\pi$, $f(x) = 0$ si $\frac{1}{2}\pi < x < \pi$
21. $f(x) = x$ si $0 < x < \frac{1}{2}\pi$, $f(x) = 0$ si $\frac{1}{2}\pi < x < \pi$
22. Considerar la barra de los problemas 4-10. Suponer que los extremos se mantienen a 100 °C durante un tiempo prolongado. Después, en algún instante, por ejemplo, en $t = 0$, la temperatura en $x = L$ cambia repentinamente a 0 °C y se mantiene en este valor, en tanto que la temperatura en $x = 0$ se mantiene a 100 °C. ¿Cuáles son las temperaturas a la mitad de la barra en $t = 1, 2, 3, 10, 50$ segundos?
23. **(Radiación en el extremo de la barra)** Considérese una barra de longitud π con aislamiento lateral y tal que $c = 1$ en (1), cuyo extremo izquierdo se mantiene a 0 °C y cuyo extremo derecho irradia libremente hacia aire de temperatura constante 0 °C. *Información física*: La **"condición en la frontera de radiación"** es

$$-u_x(\pi, t) = k[u(\pi, t) - u_0],$$

donde $u_0 = 0$ es la temperatura del aire circundante y k es una constante, por ejemplo, $k = 1$ para simplificar. Demostrar que una solución que satisface estas condiciones en la frontera es $u(x, t) = \text{sen}\, px\, e^{-p^2 t}$, donde p es una solución de $\tan p\pi = -p$. Demostrar gráficamente que esta ecuación tiene una infinidad de soluciones positivas $p_1, p_2, p_3, \cdots$, donde $p_n > n - \frac{1}{2}$ y $\lim_{n\to\infty} (p_n - n + \frac{1}{2}) = 0$.

24. **(Ecuación no homogénea del calor)** Considerar el problema que consta de

$$u_t - c^2 u_{xx} = Ne^{-\alpha x}$$

y las condiciones (2), (3). Aquí el término del segundo miembro puede representar pérdida de calor debida a la desintegración radiactiva de la barra. Demostrar que este problema puede reducirse a un problema de la ecuación homogénea al hacer $u(x, t) = v(x, t) + w(x)$ y determinando $w(x)$ de tal modo que v satisfaga la ecuación homogénea y las condiciones $v(0, t) = v(L, t) = 0$, $v(x, 0) = f(x) - w(x)$.

25. **(Radiación)** Si la barra del texto tiene la libertad de irradiar en el medio circundante mantenido a una temperatura cero, la ecuación queda

$$v_t = c^2 v_{xx} - \beta v.$$

Demostrar que esta ecuación puede reducirse a la forma (1) al hacer $v(x, t) = u(x, t)w(t)$.

26. Considérese $v_t = c^2 v_{xx} - v$ $(0 < x < L, t > 0)$, $v(0, t) = 0$, $v(L, t) = 0$, $v(x, 0) = f(x)$, donde el término $-v$ corresponde a la transferencia de calor al medio circundante mantenido a temperatura cero. Reducir la ecuación haciendo $v(x, t) = u(x, t)w(t)$ con w tal que u esté dada por (10), (11).

27. **(Flujo de calor)** ¿Cuál es el flujo de calor $\phi(t) = -Ku_x(0, t)$ a través de $x = 0$ para la solución (10)? Obsérvese que $\phi(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. ¿Puede entenderse físicamente este hecho?

28. Resolver (1), (2), (3) con $L = \pi$ y $f(x) = U_0 = const$ si $0 < x < \pi/2$ y $f(x) = 0$ si $\pi/2 < x < \pi$.

29. Si la barra del problema 28 se compone de dos partes de hierro ($c^2 = 0.16$ unidades cgs) de temperaturas iniciales 20 °C y 0 °C que se ponen en contacto perfecto en $t = 0$, ¿cuál es la temperatura aproximada en su superficie de contacto en $t = 10, 20, 30$ segundos? (Usar sólo el primer término de la solución.)

30. **(Barra con generación de calor)** Si se genera calor a una razón constante en una barra de longitud $L = \pi$ con temperatura inicial $f(x)$ y los extremos en $x = 0$ y $x = \pi$ se mantienen a temperatura cero, la ecuación del calor es $u_t = c^2 u_{xx} + H$ con $H > 0$ constante. Resolver este problema. *Sugerencia.* Hacer $u = v - Hx(x - \pi)/2c^2$.

Problemas bidimensionales

31. **(Ecuación de Laplace)** Encontrar el potencial en el cuadrado $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$ si el lado superior se mantiene en el potencial sen $\frac{1}{2}\pi x$ y los otros lados se mantienen en cero.

32. Encontrar el potencial en el rectángulo $0 \leq x \leq 20$, $0 \leq y \leq 40$ cuyo lado superior se mantiene en el potencial 220 V y cuyos lados restantes están conectados a tierra.

33. **(Flujo de calor en una placa)** Las caras de una placa cuadrada delgada (figura 264, donde $a = 24$) están aisladas perfectamente. El lado superior se mantiene a una temperatura de 20 °C y los lados restantes se mantienen a 0 °C. Encontrar la temperatura de estado estacionario $u(x, y)$ de la placa.

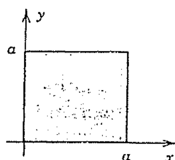


Figura 264. Placa cuadrada.

34. Encontrar las soluciones u de la ecuación bidimensional del calor

$$u_t = c^2(u_{xx} + u_{yy})$$

en la placa delgada de la figura 264 con $a = \pi$ tal que $u = 0$ en los lados verticales, suponiendo que las caras y los lados horizontales de la placa están aislados perfectamente.

35. Encontrar fórmulas similares a (19), (20) para la distribución de temperatura en el rectángulo R considerado en el texto cuando el lado inferior de R se mantiene a una temperatura $f(x)$ y los tres lados restantes se mantienen en 0.

36. Encontrar la temperatura de estado estacionario de la placa del problema 33 si el lado inferior se mantiene a U_0 °C, el superior a U_1 °C y los otros dos lados a 0 °C. *Sugerencia.* Partir el problema en dos problemas en los que la temperatura en la frontera es cero en tres lados para cada problema.

37. **(Problema con valor frontera mixto)** Encontrar la temperatura de estado estacionario de la placa del problema 33 con los lados superior e inferior perfectamente aislados, el lado izquierdo mantenido a 0 °C y el lado derecho a $f(y)$ °C.

38. **(Radiación)** Encontrar las temperaturas de estado estacionario en el rectángulo de la figura 263 con los lados superior e izquierdo perfectamente aislados y el lado derecho irradiando hacia un medio de temperatura cero de acuerdo con $u_x(a, y) + hu(a, y) = 0$, $h > 0$ constante. (Se encontrarán muchas soluciones debido a que no se da ninguna condición para el lado inferior.)

39. **(Región infinita)** Encontrar la temperatura de estado estacionario $u(x, y)$ en la franja $0 < x < \pi$, $y > 0$ con los lados verticales perfectamente aislados y el lado inferior mantenido a la temperatura $f(x)$. (Suponer que $|u|$ está acotado.)

40. **(Problema de Neumann)** Resolver $\nabla^2 u = 0$ en el rectángulo de la figura 263 sujeto a las condiciones de Neumann $u_y(x, 0) = f(x)$ y $u_n = 0$ en los otros lados.

11.6 ECUACIÓN DEL CALOR: SOLUCIÓN POR INTEGRALES DE FOURIER

La discusión de la sección anterior se generaliza a barras infinitas, con las series de Fourier reemplazadas por integrales de Fourier (sección 10.9); estas barras son buenos modelos de barras o alambres muy largos (como un alambre de 100 m de largo). Específicamente, se encontrarán soluciones de la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

de una barra que se extiende hasta el infinito por ambos lados (y está aislada lateralmente, como antes). En este caso no se tienen condiciones en la frontera, sino únicamente la condición inicial

$$u(x, 0) = f(x) \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{2}$$

donde $f(x)$ es la temperatura inicial dada de la barra.

Para resolver este problema, se empieza como en la sección anterior, sustituyendo $u(x, t) = F(x)G(t)$ en (1). Se obtienen así las dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$F'' + p^2 F = 0 \qquad \text{[ver (6), sección 11.5]} \tag{3}$$

y

(4) $$\dot{G} + c^2p^2G = 0 \qquad \text{[ver (7), sección 11.5].}$$

Las soluciones son

$$F(x) = A \cos px + B \operatorname{sen} px \qquad \text{y} \qquad G(t) = e^{-c^2p^2t},$$

respectivamente; aquí A y B son constantes cualesquiera. Por tanto, una solución de (1) es

(5) $$u(x, t; p) = FG = (A \cos px + B \operatorname{sen} px)e^{-c^2p^2t}.$$

[Como en la sección anterior, tuvo que escogerse la constante de separación k negativa, $k = -p^2$, debido a que valores positivos de k hubieran llevado a una función exponencial creciente en (5), lo cual no tiene ningún significado físico.]

Cualquier serie de funciones (5), encontrada de la manera usual al tomar p como múltiplos de un número fijo, llevaría a una función que es periódica en x cuando $t = 0$. Sin embargo, como no se supone que $f(x)$ en (2) sea periódica, resulta natural usar **integrales de Fourier** en lugar de series de Fourier. Además, A y B en (5) son arbitrarios y pueden considerarse como funciones de p, escribiéndose $A = A(p)$ y $B = B(p)$. Ahora bien, puesto que la ecuación del calor (1) es lineal y homogénea, entonces la función

(6) $$u(x, t) = \int_0^\infty u(x, t; p)\, dp = \int_0^\infty [A(p) \cos px + B(p) \operatorname{sen} px]e^{-c^2p^2t}\, dp$$

es una solución de (1), siempre que esta integral exista y pueda derivarse dos veces con respecto a x y una con respecto a t.

Determinación de $A(p)$ y $B(p)$ a partir de la condición inicial. Por (6) y (2) se obtiene

(7) $$u(x, 0) = \int_0^\infty [A(p) \cos px + B(p) \operatorname{sen} px]\, dp = f(x).$$

Por esta expresión $A(p)$ y $B(p)$ se obtienen en términos de $f(x)$; de hecho, por (4) y (5) de la sección 10.9 se tiene

(8) $$A(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(v) \cos pv\, dv, \qquad B(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(v) \operatorname{sen} pv\, dv.$$

Y por (1*), sección 10.11, la integral de Fourier (7) con estas $A(p)$ y $B(p)$ puede escribirse

$$u(x, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(v) \cos (px - pv)\, dv\right] dp.$$

A partir de esta $u(x, 0)$ se obtiene $u(x, t)$ escribiendo la función exponencial dentro de la integral [comparar (7) y (6)]:

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(v) \cos (px - pv)\, e^{-c^2p^2t}\, dv\right] dp.$$

Suponiendo que puede invertirse el orden de integración, se obtiene

(9) $$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(v) \left[\int_0^\infty e^{-c^2p^2t} \cos (px - pv)\, dp\right] dv.$$

Entonces la integral interior puede evaluarse por la fórmula

(10) $$\int_0^\infty e^{-s^2} \cos 2bs\, ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-b^2}.$$

[En los problemas de la sección 15.4 (problema 14) se da una deducción de (10).] Esta expresión asume la forma de la integral interior si se elige $p = s/(c\sqrt{t})$ como nueva variable de integración y se hace

$$b = \frac{x - v}{2c\sqrt{t}}.$$

Entonces $2bs = (x - v)p$ y $ds = c\sqrt{t}\, dp$, por lo que (10) queda como

$$\int_0^\infty e^{-c^2p^2t} \cos (px - pv)\, dp = \frac{\sqrt{\pi}}{2c\sqrt{t}} \exp\left\{-\frac{(x - v)^2}{4c^2t}\right\}.$$

Al introducir este resultado en (9) se obtiene la representación

(11) $$u(x, t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^\infty f(v) \exp\left\{-\frac{(x - v)^2}{4c^2t}\right\} dv.$$

Tomando $z = (v - x)/(2c\sqrt{t})$ como variable de integración, se obtiene la forma alternativa

(12) $$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x + 2cz\sqrt{t})\, e^{-z^2}\, dz.$$

Si $f(x)$ está acotada para todos los valores de x y es integrable en todo intervalo finito, puede demostrarse (ver la referencia [C12]) que la función (11) o (12) satisface (1) y (2). Por tanto esta función es la solución requerida en el presente caso.

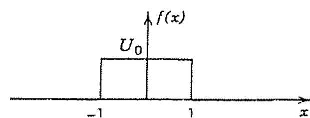


Figura 265. Temperatura inicial en el ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Temperatura en una barra infinita

Encontrar la temperatura en la barra infinita si la temperatura inicial es (figura 265)

$$f(x) = \begin{cases} U_0 = const & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Solución. Por (11) se tiene

$$u(x, t) = \frac{U_0}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-1}^{1} \exp\left\{-\frac{(x-v)^2}{4c^2 t}\right\} dv.$$

Si se introduce la variable de integración z anterior, entonces la integración respecto a v de -1 a 1 corresponde a la integración respecto a z de $(-1-x)/2c\sqrt{t}$ a $(1-x)/2c\sqrt{t}$ y

$$u(x, t) = \frac{U_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-(1+x)/2c\sqrt{t}}^{(1-x)/2c\sqrt{t}} e^{-z^2}\, dz \qquad (t > 0). \tag{13}$$

Cabe mencionar que esta integral no es una función elemental, aunque puede expresarse con facilidad en términos de la función error, cuyos valores se han tabulado. (La tabla A4 del apéndice 5 contiene algunos valores; tablas más amplias se enlistan en la referencia [1] del apéndice 1. Ver asimismo los problemas 16–25 siguientes.) La figura 266 ilustra $u(x, t)$ para $U_0 = 100$ °C, $c^2 = 1$ cm²/s y varios valores de t. ■

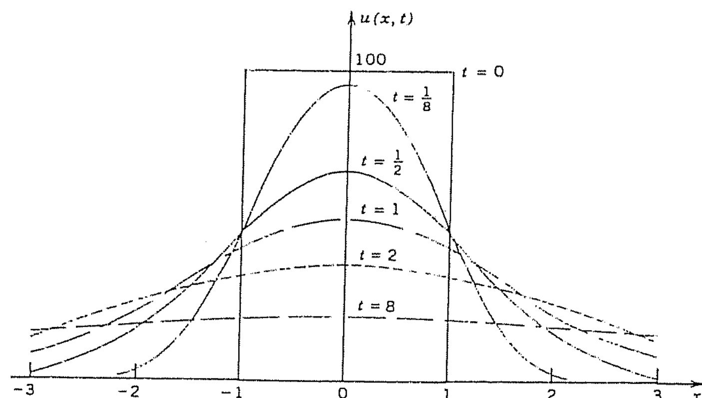


Figura 266. Solución $u(x, t)$ del ejemplo 1 para $U_0 = 100$ °C, $c^2 = 1$ cm²/s y varios valores de t.

Problemas de la sección 11.6

1. Trazar las temperaturas del ejemplo 1 (con $U_0 = 100$ °C y $c^2 = 1$ cm²/s) en los puntos $x = 0.5$, 1 y 1.5 como funciones de t. ¿Estos resultados concuerdan con la intuición física del lector?
2. Si $f(x) = 1$ cuando $x > 0$ y $f(x) = 0$ cuando $x < 0$, demostrar que (12) queda como

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/2c\sqrt{t}}^{\infty} e^{-z^2}\, dz \qquad (t > 0).$$

3. Demostrar que para $x = 0$ la solución del problema 2 es independiente de t. ¿Puede esperarse este resultado por razones físicas?
4. Si la barra es semiinfinita, extendiéndose de 0 a ∞, el extremo en $x = 0$ se mantiene a temperatura 0 y la temperatura inicial es $f(x)$, demostrar que la temperatura de la barra es

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{-x/\tau}^{\infty} f(x + \tau w)e^{-w^2}\, dw - \int_{x/\tau}^{\infty} f(-x + \tau w)e^{-w^2}\, dw\right], \tag{14}$$

donde $\tau = 2c\sqrt{t}$.

5. Obtener (14) a partir de (11) suponiendo que $f(v)$ de (11) es impar.
6. Si $f(x) = 1$ en el problema 4, demostrar que

$$u(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x/\tau} e^{-w^2}\, dw \qquad (t > 0).$$

7. ¿Qué forma asume (14) si $f(x) = 1$ cuando $a < x < b$ (donde $a > 0$) y $f(x) = 0$ en caso contrario?
8. Demostrar que el resultado del problema 6 puede obtenerse a partir de (11) o (12) usando $f(x) = 1$ si $x > 0$ y $f(x) = -1$ si $x < 0$. ¿Cuál es la razón?
9. Demostrar que en el problema 6 los tiempos requeridos para que dos puntos cualesquiera alcancen la misma temperatura son proporcionales a los cuadrados de sus distancias a la frontera en $x = 0$.
10. **(Distribución normal)** Introduciendo $w = z\sqrt{2}$ como nueva variable de integración, demostrar que (12) queda

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + cw\sqrt{2t})e^{-w^2/2}\, dw.$$

Los estudiantes familiarizados con la teoría de la probabilidad notarán que esta expresión incluye la densidad $e^{-w^2/2}/\sqrt{2\pi}$ de la distribución normal (ver la sección 23.7).

Usando (6), obtener la solución de (1) (en forma de integral) sujeta a la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$, donde

11. $f(x) = e^{-|x|}$. [Usar el ejemplo 3, sección 10.9.]
12. $f(x) = 1/(1 + x^2)$. [Usar (15), sección 10.9.]
13. $f(x) = 1$ si $|x| < 1$ y 0 en caso contrario. [Usar el ejemplo 2, sección 10.9.]
14. $f(x) = (\text{sen } x)/x$. [Usar el problema 4, sección 10.9.]
15. Comprobar por integración que en el problema 14 u satisface la condición inicial.

Función de error. La función de error se define por la integral

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-w^2}\, dw,$$

que es importante en las matemáticas para ingeniería. A fin de familiarizarse con esta función, el estudiante puede resolver los problemas siguientes. [En el apéndice 3.1 se incluyen algunas fórmulas; ver (35)-(37).]

16. Trazar el integrando de erf x (la llamada **curva acampanada**).
17. Demostrar que erf x es impar.
18. Demostrar que (13) puede escribirse

$$u(x, t) = \frac{U_0}{2}\left[\operatorname{erf}\frac{1-x}{2c\sqrt{t}} + \operatorname{erf}\frac{1+x}{2c\sqrt{t}}\right] \qquad (t > 0).$$

19. Demostrar que en el problema 6 se tiene $u(x, t) = \operatorname{erf}(x/2c\sqrt{t})$.
20. Puede demostrarse que erf(∞) = 1. Usando este hecho, demostrar que en problema 2,

$$u(x, t) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\operatorname{erf}(x/2c\sqrt{t}).$$

21. Demostrar que $\displaystyle\int_a^b e^{-w^2}\, dw = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(\operatorname{erf} b - \operatorname{erf} a), \qquad \int_{-b}^b e^{-w^2}\, dw = \sqrt{\pi}\operatorname{erf} b.$
22. Obtener la serie de Maclaurin de erf x integrando término a término la serie del integrando.
23. Calcular erf x para x = 0(0.1)0.5 usando el problema 22 y comparar el resultado con los valores tridimensionales 0.000, 0.112, 0.223, 0.329, 0. 428, 0.520.
24. Demostrar que $\displaystyle\operatorname{erf} x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{x\sqrt{2}} e^{-s^2/2}\, ds.$
25. **(Cuadrante del plano)** Concluir por el problema 19 que la temperatura en el cuadrante $x > 0, y > 0$ con temperatura inicial 1, aislamiento lateral y frontera mantenida a temperatura cero es $u(x, y, t) = \operatorname{erf}(x/2c\sqrt{t})\operatorname{erf}(y/2c\sqrt{t})$.

11.7 MODELADO: MEMBRANA, ECUACIÓN BIDIMENSIONAL DE ONDA

Como otro problema básico de vibraciones, se considera el movimiento de una membrana elástica tensada, como el parche de un tambor. Se trata del análogo bidimensional del problema de la cuerda vibratoria; de hecho, el modelado será similar al de la sección 11.2.

Supuestos físicos. Se supone lo siguiente:

1. *La masa de la membrana por unidad de área es constante ("membrana homogénea). La membrana tiene flexibilidad perfecta y no ofrece resistencia a la flexión.*
2. *La membrana se tensa y luego se fija a lo largo de toda su frontera en el plano xy. La tensión T por unidad de longitud, causada por el estiramiento de la membrana, es la misma en todos los puntos y en todas las direcciones, y no cambia durante el movimiento.*
3. *La deflexión u(x, y, t) de la membrana durante el movimiento es pequeña en comparación con el tamaño de la membrana y todos los ángulos de inclinación son pequeños.*

Aun cuando estos supuestos no pueden ponerse en práctica exactamente, se cumplirán con relativa precisión para las vibraciones transversales pequeñas de una membrana elástica delgada, de tal modo que se obtiene un buen modelo, por ejemplo, para el parche de un tambor, como se verá.

Deducción de la ecuación. La ecuación diferencial que gobierna el movimiento de la membrana se obtiene considerando las fuerzas que actúan sobre una porción pequeña de la membrana de la figura 267. Puesto que las deflexiones de la membrana y los ángulos de inclinación son pequeños, los lados de la porción son iguales aproximadamente a Δx y Δy. La tensión T es la fuerza por unidad de longitud. En consecuencia, las fuerzas que actúan sobre los lados de la porción son aproximadamente $T\Delta x$ y $T\Delta y$. Puesto que la membrana tiene flexibilidad perfecta, estas fuerzas son tangentes a la membrana.

Componentes horizontales de las fuerzas. Se consideran primero las componentes horizontales de las fuerzas, las cuales se obtienen al multiplicar las fuerzas por los cosenos de los ángulos de inclinación. Puesto que estos ángulos son pequeños, sus cosenos están cerca de 1. En consecuencia, las componentes horizontales de las fuerzas en lados opuestos son aproximadamente iguales. Por lo tanto, el movimiento de

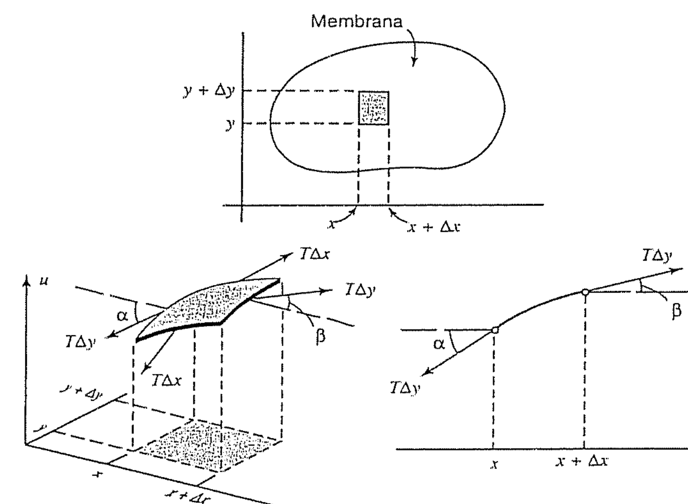


Figura 267. Membrana vibratoria.

las partículas de la membrana en una dirección horizontal será prácticamente despreciable. Por lo anterior puede concluirse que es posible considerar el movimiento de la membrana como transversal; es decir, que cada partícula se mueve verticalmente.

Componentes verticales de las fuerzas. Estas componentes a lo largo del lado derecho y del lado izquierdo son[5] (figura 267)

$$T\,\Delta y \operatorname{sen}\beta \qquad \text{y} \qquad -T\,\Delta y \operatorname{sen}\alpha,$$

respectivamente; aquí el signo menos aparece porque la fuerza sobre el lado izquierdo está dirigida hacia abajo. Puesto que los ángulos son pequeños, sus senos pueden sustituirse con sus tangentes. Por tanto, la resultante de esas dos componentes verticales es

$$\begin{aligned}(1)\qquad T\,\Delta y(\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\alpha) &\approx T\,\Delta y(\tan\beta - \tan\alpha)\\ &= T\,\Delta y\,[u_x(x+\Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)]\end{aligned}$$

donde los subíndices x denotan derivadas parciales y y_1 y y_2 son valores entre y y $y + \Delta y$. De manera similar, la resultante de las componentes verticales de las fuerzas que actúan sobre los otros dos lados de la porción es

$$(2)\qquad T\,\Delta x\,[u_y(x_1, y+\Delta y) - u_y(x_2, y)]$$

donde x_1 y x_2 son valores entre x y $x + \Delta x$.

La segunda ley de Newton da la ecuación. Por la segunda ley de Newton (ver la sección 2.5), la suma de las fuerzas dadas por (1) y (2) es igual al producto de la masa $\rho\,\Delta A$ de esa porción pequeña y la aceleración $\partial^2 u/\partial t^2$; aquí ρ es la masa de la membrana no flexionada por unidad de área y $\Delta A = \Delta x\,\Delta y$ es el área de esa porción cuando no está flexionada. Por tanto,

$$\begin{aligned}\rho\,\Delta x\,\Delta y\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= T\,\Delta y\,[u_x(x+\Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)]\\ &\quad + T\,\Delta x\,[u_y(x_1, y+\Delta y) - u_y(x_2, y)]\end{aligned}$$

donde la derivada del primer miembro se evalúa en algún punto adecuado $(\tilde{x}, \tilde{y})$ correspondiente a esa porción. La división entre $\rho\,\Delta x\,\Delta y$ da como resultado

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\left[\frac{u_x(x+\Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)}{\Delta x} + \frac{u_y(x_1, y+\Delta y) - u_y(x_2, y)}{\Delta y}\right].$$

[5] Obsérvese que el ángulo de inclinación varía a lo largo de los lados, y que α y β representan valores de ese ángulo en un punto adecuado de los lados bajo consideración.

Si se hace que Δx y Δy tiendan a cero, se obtiene la ecuación diferencial parcial

$$(3)\qquad \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),} \qquad c^2 = \frac{T}{\rho}.$$

Esta ecuación se llama la **ecuación bidimensional de onda**. La expresión entre paréntesis es el laplaciano $\nabla^2 u$ de u (sección 11.5), y (3) puede escribirse

$$(3')\qquad \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\nabla^2 u.}$$

En la siguiente sección se obtendrán y discutirán las soluciones.

11.8 MEMBRANA RECTANGULAR. USO DE SERIES DOBLES DE FOURIER

Para resolver el problema de una membrana vibratoria, es necesario determinar una solución $u(x, y, t)$ de la ecuación bidimensional de onda

$$(1)\qquad \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)}$$

que satisfaga la condición en la frontera

$$(2)\qquad u = 0 \qquad \text{en la frontera de la membrana para toda } t \geq 0$$

y las dos condiciones iniciales

$$(3)\qquad u(x, y, 0) = f(x, y) \qquad [\text{dado el desplazamiento inicial } f(x, y)]$$

y

$$(4)\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x, y) \qquad [\text{dada la velocidad inicial } g(x, y)].$$

$u(x, y, t)$ da el desplazamiento del punto (x, y) de la membrana desde el reposo ($u = 0$) en el tiempo t. Se observa que las condiciones (2)-(4) son similares a las de la cuerda vibratoria.

Como primer caso importante, se considera la membrana rectangular R ilustrada en la figura 268.

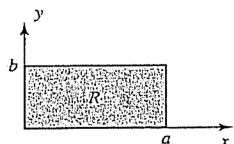


Figura 268. Membrana rectangular.

Primer paso. Tres ecuaciones diferenciales ordinarias

Al aplicar el método de separación de variables se determinan primero las soluciones de (1) que satisfacen la condición en la frontera (2). Se empieza con

$$u(x, y, t) = F(x, y)G(t). \tag{5}$$

Al sustituir esta expresión en la ecuación de onda (1) se tiene

$$F\ddot{G} = c^2(F_{xx}G + F_{yy}G)$$

donde los subíndices denotan derivadas parciales y los puntos denotan derivadas con respecto a t. Para separar las variables, se dividen ambos miembros entre c^2FG:

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{1}{F}(F_{xx} + F_{yy}).$$

Puesto que el primer miembro sólo depende de t, en tanto que el segundo es independiente de t, ambos miembros deben ser iguales a una constante. Investigando un poco se observa que sólo valores negativos de esa constante llevarán a soluciones que satisfagan (2) sin formar una identidad con cero; esto es similar a la sección 11.3. Al denotar esa constante negativa por $-\nu^2$, se tiene

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{1}{F}(F_{xx} + F_{yy}) = -\nu^2.$$

De esta expresión se obtienen dos ecuaciones: para la **"función del tiempo"** $G(t)$ se tiene la ecuación diferencial ordinaria

$$\boxed{\ddot{G} + \lambda^2 G = 0} \qquad \text{donde } \lambda = c\nu, \tag{6}$$

y para la **"función de la amplitud"** $F(x, y)$ se tiene la ecuación diferencial parcial

$$F_{xx} + F_{yy} + \nu^2 F = 0, \tag{7}$$

conocida como la **ecuación bidimensional de Helmholtz**[6].

[6] HERMANN VON HELMHOLTZ (1821-1894), físico alemán, conocido por su trabajo fundamental en termodinámica, dinámica de fluidos y acústica

La **separación de la ecuación de Helmholtz** se consigue si se hace

$$F(x, y) = H(x)Q(y). \tag{8}$$

Al sustituir esta expresión en (7) se obtiene

$$\frac{d^2H}{dx^2}Q = -\left(H\frac{d^2Q}{dy^2} + \nu^2 HQ\right).$$

Para separar las variables, ambos miembros se dividen entre HQ, encontrándose

$$\frac{1}{H}\frac{d^2H}{dx^2} = -\frac{1}{Q}\left(\frac{d^2Q}{dy^2} + \nu^2 Q\right).$$

Ambos miembros deben ser iguales a una constante, por las consideraciones anteriores. Esta constante debe ser negativa, por ejemplo, $-k^2$, ya que sólo valores negativos llevarán a soluciones que satisfagan (2) sin formar identidades con cero. Por tanto,

$$\frac{1}{H}\frac{d^2H}{dx^2} = -\frac{1}{Q}\left(\frac{d^2Q}{dy^2} + \nu^2 Q\right) = -k^2.$$

De esta expresión se obtienen dos ecuaciones diferenciales lineales ordinarias para H y Q:

$$\boxed{\frac{d^2H}{dx^2} + k^2H = 0} \tag{9}$$

y

$$\boxed{\frac{d^2Q}{dy^2} + p^2Q = 0} \qquad \text{donde } p^2 = \nu^2 - k^2. \tag{10}$$

Segundo paso. Satisfacción de las condiciones en la frontera

Las soluciones generales de (9) y (10) son

$$H(x) = A\cos kx + B \operatorname{sen} kx \qquad \text{y} \qquad Q(y) = C\cos py + D\operatorname{sen} py$$

donde A, B, C y D son constantes. Por (5) y (2) se sigue que la función $F = HQ$ debe ser cero en la frontera, que corresponde a $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ y $y = b$; ver la figura 268. Se obtienen así las condiciones

$$H(0) = 0, \qquad H(a) = 0, \qquad Q(0) = 0, \qquad Q(b) = 0.$$

Por lo tanto, $H(0) = A = 0$ y entonces

$$H(a) = B \operatorname{sen} ka = 0.$$

Debe tomarse $B \neq 0$, pues de otro modo $H \equiv 0$ y $F \equiv 0$. Por tanto, sen $ka = 0$ o $ka = m\pi$, es decir,

$$k = \frac{m\pi}{a} \qquad (m \text{ entera}).$$

Justamente del mismo modo se concluye que $C = 0$ y p debe restringirse a los valores $p = n\pi/b$ donde n es un entero. Se obtienen así las soluciones

$$H_m(x) = \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \quad \text{y} \quad Q_n(y) = \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}, \quad \begin{array}{l} m = 1, 2, \cdots, \\ n = 1, 2, \cdots. \end{array}$$

(Como en el caso de la cuerda vibratoria, no es necesario considerar $m, n = -1, -2, \cdots$, ya que las soluciones correspondientes son esencialmente las mismas que para m y n positivas, excepto por un factor -1.) Por tanto las funciones

$$(11) \qquad F_{mn}(x, y) = H_m(x)Q_n(y) = \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}, \quad \begin{array}{l} m = 1, 2, \cdots, \\ n = 1, 2, \cdots, \end{array}$$

son soluciones de (7) que son cero en la frontera de la membrana en cuestión.

Eigenfunciones y eigenvalores. Una vez que se ha analizado (7), se considera (6). Puesto que $p^2 = \nu^2 - k^2$ en (10) y $\lambda = c\nu$ en (6), se tiene

$$\lambda = c\sqrt{k^2 + p^2}.$$

Por tanto, a $k = m\pi/a$ y $p = n\pi/b$ les corresponde el valor

$$(12) \qquad \boxed{\lambda = \lambda_{mn} = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}},} \qquad \begin{array}{l} m = 1, 2, \cdots, \\ n = 1, 2, \cdots, \end{array}$$

en la ecuación diferencial (6). La solución general de (6) correspondiente es

$$G_{mn}(t) = B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B^*_{mn}\operatorname{sen}\lambda_{mn}t.$$

Se sigue que las funciones $u_{mn}(x, y, t) = F_{mn}(x, y)G_{mn}(t)$, desarrolladas

$$(13) \qquad \boxed{u_{mn}(x, y, t) = (B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B^*_{mn}\operatorname{sen}\lambda_{mn}t)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}}$$

con λ_{mn} de acuerdo con (12), son soluciones de la ecuación de onda (1) que son cero en la frontera de la membrana rectangular de la figura 268. Estas funciones se llaman las **eigenfunciones** o *funciones características* y los números λ_{mn} se llaman los **eigenvalores** o *valores característicos* de la membrana vibratoria. La frecuencia de u_{mn} es $\lambda_{mn}/2\pi$.

Discusión de las eigenfunciones. Resulta interesante observar que, dependiendo de a y b, varias funciones F_{mn} pueden corresponder al mismo eigenvalor. Físicamente,

esto significa que pueden existir vibraciones que tienen la misma frecuencia pero **líneas nodales** (curvas de puntos sobre la membrana que no se mueven) por completo diferentes. Este hecho se ilustra con el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1 Eigenvalores y eigenfunciones de la membrana cuadrada

Considérese la membrana cuadrada para la que $a = b = 1$. Por (12) se obtienen los eigenvalores

$$(14) \qquad \lambda_{mn} = c\pi\sqrt{m^2 + n^2}.$$

De donde

$$\lambda_{mn} = \lambda_{nm}$$

pero para $m \neq n$ las funciones correspondientes

$$F_{mn} = \operatorname{sen} m\pi x \operatorname{sen} n\pi y \qquad \text{y} \qquad F_{nm} = \operatorname{sen} n\pi x \operatorname{sen} m\pi y$$

sin lugar a dudas son diferentes. Por ejemplo, a $\lambda_{12} = \lambda_{21} = c\pi\sqrt{5}$ le corresponden las dos funciones

$$F_{12} = \operatorname{sen}\pi x \operatorname{sen} 2\pi y \qquad \text{y} \qquad F_{21} = \operatorname{sen} 2\pi x \operatorname{sen}\pi y.$$

Por tanto, las soluciones correspondientes

$$u_{12} = (B_{12}\cos c\pi\sqrt{5}t + B^*_{12}\operatorname{sen} c\pi\sqrt{5}t)F_{12}$$

y

$$u_{21} = (B_{21}\cos c\pi\sqrt{5}t + B^*_{21}\operatorname{sen} c\pi\sqrt{5}t)F_{21}$$

tienen las líneas nodales $y = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{1}{2}$, respectivamente (ver la figura 269). Al tomar $B_{12} = 1$ y $B_{12}^* = B_{21}^* = 0$, se obtiene

$$(15) \qquad u_{12} + u_{21} = \cos c\pi\sqrt{5}t\,(F_{12} + B_{21}F_{21})$$

que representa otra vibración correspondiente al eigenvalor $c\pi\sqrt{5}$. La línea nodal de esta función es la solución de la ecuación

$$F_{12} + B_{21}F_{21} = \operatorname{sen}\pi x \operatorname{sen} 2\pi y + B_{21}\operatorname{sen} 2\pi x \operatorname{sen}\pi y = 0$$

o, como sen $2\alpha = 2$ sen α cos α,

$$(16) \qquad \operatorname{sen}\pi x \operatorname{sen}\pi y\,(\cos\pi y + B_{21}\cos\pi x) = 0.$$

Esta solución depende del valor de B_{21} (ver la figura 270).

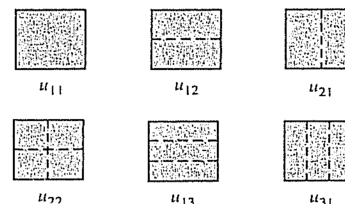


Figura 269. Líneas nodales de las soluciones u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}, u_{13}, u_{31}, en el caso de la membrana cuadrada.

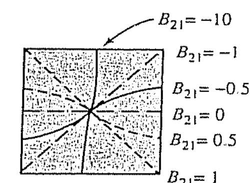


Figura 270. Líneas nodales de la solución (15) para algunos valores de B_{21}.



Por (14) se observa que incluso más de dos funciones pueden corresponder al mismo valor numérico de λ_{mn}. Por ejemplo, las cuatro funciones F_{18}, F_{81}, F_{47} y F_{74} corresponden al valor $\lambda_{18} = \lambda_{81} = \lambda_{47} = \lambda_{74} = c\pi\sqrt{65}$, ya que

$$1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2 = 65.$$

Esto ocurre porque 65 puede expresarse de varias maneras como la suma de dos cuadrados de enteros positivos. De acuerdo con un teorema de Gauss, este es el caso para cualquier suma de dos cuadrados entre cuyos factores primos hay al menos dos diferentes cuya forma es $4n + 1$, donde n es un entero positivo. En el caso presente, $65 = 5 \cdot 13 = (4 + 1)(12 + 1)$. ∎

Tercer paso. Solución del problema completo

Para obtener la solución que también satisface las condiciones iniciales (3) y (4), se procede como en la sección 11.3. Se consideran las series dobles[7]

$$(17)\qquad \begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(x, y, t) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} (B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B_{mn}^{*}\operatorname{sen}\lambda_{mn}t)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}. \end{aligned}$$

A partir de esta expresión y de (3) se obtiene

$$(18)\qquad u(x, y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b} = f(x, y).$$

Esta serie se llama **serie doble de Fourier**. Supóngase que $f(x, y)$ puede desarrollarse en una serie como ésta.[8] Entonces los coeficientes de Fourier B_{mn} de $f(x, y)$ en (18) pueden determinarse de la siguiente manera. Al hacer

$$(19)\qquad K_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}$$

(18) puede escribirse en la forma

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(y)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}.$$

Para y fija esta es la serie senoidal de Fourier de $f(x, y)$ considerada como una función de x. Por (4) de la sección 10.5 se observa que los coeficientes de este desarrollo son

$$(20)\qquad K_m(y) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x, y)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\,dx.$$

[7] No se considerarán los problemas de convergencia y unicidad.
[8] Condiciones suficientes: f, $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial^2 f/\partial x\,\partial y$ continuas en el rectángulo R bajo consideración.

Además, (19) es la serie senoidal de Fourier de $K_m(y)$ y por (4) de la sección 10.5 se sigue que los coeficientes son

$$B_{mn} = \frac{2}{b}\int_0^b K_m(y)\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}\,dy.$$

Por esta expresión y (20) se obtiene la **fórmula generalizada de Euler**

$$(21)\qquad B_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x, y)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy \qquad \begin{aligned} m &= 1, 2, \cdots, \\ n &= 1, 2, \cdots. \end{aligned}$$

para los coeficientes de Fourier de $f(x, y)$ en la serie doble de Fourier (18).

Los B_{mn} de (17) se determinan ahora en términos de $f(x, y)$. Para determinar los B_{mn}^* se deriva (17) término a término con respecto a t; usando (4), se obtiene

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}^{*}\lambda_{mn}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b} = g(x, y).$$

Suponer que $g(x, y)$ puede desarrollarse en esta serie doble de Fourier. Entonces, procediendo como antes, se encuentra

$$(22)\qquad B_{mn}^{*} = \frac{4}{ab\lambda_{mn}}\int_0^b\int_0^a g(x, y)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy \qquad \begin{aligned} m &= 1, 2, \cdots, \\ n &= 1, 2, \cdots. \end{aligned}$$

El resultado es que, para que (17) satisfaga las condiciones iniciales, los coeficientes B_{mn} y B_{mn}^* deben elegirse de acuerdo con (21) y (22).

EJEMPLO 2 Vibraciones de una membrana rectangular

Encontrar las vibraciones de una membrana rectangular de lados $a = 4$ ft y $b = 2$ ft (figura 271) si la tensión es de 12.5 lb/ft, la densidad es 2.5 slugs/ft² (como la del caucho ligero), la velocidad inicial es 0 y el desplazamiento inicial es

$$(23)\qquad f(x, y) = 0.1(4x - x^2)(2y - y^2)\ \text{ft}.$$

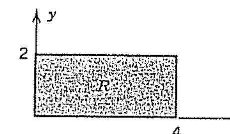


Figura 271. Membrana del ejemplo 2.

Solución. $c^2 = T/\rho = 12.5/2.5 = 5$ [ft²/s²]. Además, $B_{mn}^* = 0$ por (22). Por (21) y (23),

$$B_{mn} = \frac{4}{4 \cdot 2} \int_0^2 \int_0^4 0.1(4x - x^2)(2y - y^2) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{4} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2}\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{20} \int_0^4 (4x - x^2) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{4}\, dx \int_0^2 (2y - y^2) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2}\, dy.$$

Al integrar por partes dos veces se obtiene para la primera integral del segundo miembro

$$\frac{128}{m^3\pi^3}[1 - (-1)^m] = \frac{256}{m^3\pi^3} \qquad (m \text{ impar})$$

y para la segunda integral

$$\frac{16}{n^3\pi^3}[1 - (-1)^n] = \frac{32}{n^3\pi^3} \qquad (n \text{ impar}).$$

Para m o n pares se obtiene 0. Junto con el factor 1/20 se tiene $B_{mn} = 0$ si m o n es par y

$$B_{mn} = \frac{256 \cdot 32}{20m^3n^3\pi^6} \approx \frac{0.426\,050}{m^3n^3} \qquad (m, n \text{ son ambas impares}).$$

A partir de esta expresión y de (17) se obtiene la respuesta

$$u(x, y, t) = 0.426\,050 \sum_{m,\, n \text{ impares}} \sum \frac{1}{m^3n^3} \cos\left(\frac{5\pi}{4}\sqrt{m^2 + 4n^2}\right)t \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{4} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2}$$

(24)
$$= 0.426\,050 \left(\cos \frac{5\pi\sqrt{5}}{4}t \operatorname{sen} \frac{\pi x}{4} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{2} + \frac{1}{27} \cos \frac{5\pi\sqrt{37}}{4}t \operatorname{sen} \frac{\pi x}{4} \operatorname{sen} \frac{3\pi y}{2} + \frac{1}{27} \cos \frac{5\pi\sqrt{13}}{4}t \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{4} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{2} + \frac{1}{729} \cos \frac{5\pi\sqrt{45}}{4}t \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{4} \operatorname{sen} \frac{3\pi y}{2} + \cdots\right).$$

Para discutir esta solución, se observa que el primer término es muy similar a la forma inicial de la membrana, no tiene líneas nodales y es por mucho el término dominante ya que los coeficientes de los términos siguientes son mucho más pequeños. El segundo término tiene dos líneas nodales horizontales ($y = 2/3, 4/3$), el tercer término tiene dos líneas nodales verticales ($x = 4/3, 8/3$), el cuarto tiene dos horizontales y dos verticales, y así sucesivamente. ∎

Problemas de la sección 11.8

1. ¿Cómo cambia la frecuencia de una solución (13) si la tensión de la membrana se incrementa?
2. Determinar y trazar las líneas nodales de las soluciones (13) con $m = 1, 2, 3, 4$ y $n = 1, 2, 3, 4$ en el caso $a = b = 1$.
3. Repetir el problema 2 cuando $a = 3$ y $b = 1$.
4. Encontrar otros eigenvalores de la membrana cuadrada de lado 1 de tal modo que cuatro eigenfunciones diferentes correspondan a cada eigenvalor encontrado.
5. Encontrar eigenvalores de la membrana rectangular de lados $a = 2$, $b = 1$ de tal modo que dos o más eigenfunciones diferentes correspondan a cada eigenvalor encontrado.
6. Demostrar que, entre todas las membranas rectangulares con la misma área $A = ab$ y la misma c, la membrana cuadrada es aquella para la que u_{11} [ver (13)] tiene la frecuencia más baja.
7. Encontrar un resultado similar al del problema 6 para la frecuencia de una solución (13) con m y n arbitrarias pero fijas.

8. Usando integración por partes, comprobar los cálculos de B_{mn} del ejemplo 2.
9. B_{mn} del ejemplo 2 es un producto de dos integrales. Determinar a qué funciones corresponden estas integrales y comprobar sus valores.

Serie doble de Fourier. Representar $f(x, y)$ por una serie doble de Fourier de la forma (18), donde $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$.

10. $f(x, y) = 1$
11. $f(x, y) = x$
12. $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < x < \pi/2 \\ 0 & \text{si} \quad \pi/2 < x < \pi \end{cases}$
13. $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi/2 < x, y < \pi \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$

Representar las siguientes funciones $f(x, y)$ ($0 < x < a$, $0 < y < b$) por una serie doble de Fourier de la forma (18).

14. $f = k$
15. $f = 0.25\,xy$
16. $f = 0.125(x + y)$
17. $f = (x + 1)(y + 1)$
18. $f = xy(a - x)(b - y)$
19. $f = xy(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)$

Encontrar la deflexión $u(x, y, t)$ de la membrana cuadrada con $a = b = 1$ y $c = 1$ si la velocidad inicial es cero y la deflexión inicial es $f(x, y)$, donde

20. $f(x, y) = 0.1 \operatorname{sen} \pi x \operatorname{sen} \pi y$
21. $f(x, y) = k \operatorname{sen} \pi x \operatorname{sen} 2\pi y$
22. $f(x, y) = 0.01xy(1 - x)(1 - y)$
23. $f(x, y) = k \operatorname{sen} 3\pi x \operatorname{sen} 4\pi y$
24. $f(x, y) = k \operatorname{sen}^2 \pi x \operatorname{sen}^2 \pi y$
25. **(Vibraciones forzadas de una membrana)** Demostrar que las vibraciones forzadas de una membrana están gobernadas por la ecuación

$$u_{tt} = c^2\nabla^2 u + P/\rho$$

donde $P(x, y, t)$ es la fuerza externa por unidad de área que actúa normal al plano xy.

11.9 LAPLACIANO EN COORDENADAS POLARES

En relación con los problemas con valores en la frontera para ecuaciones diferenciales parciales, es un principio general usar coordenadas con respecto a las cuales la frontera de la región bajo consideración se da por fórmulas simples. En la siguiente sección se discutirán las membranas circulares (parches de tambor). Entonces las coordenadas polares comunes r y θ, definidas por

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta,$$

resultarán apropiadas, ya que dan la frontera de la membrana mediante la ecuación simple $r = const.$ Su uso requiere la transformación del laplaciano

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

de la ecuación de onda en estas nuevas coordenadas. A continuación se hace esto de una vez por todas.

Las transformaciones de expresiones diferenciales de un sistema de coordenadas a otro se requieren con frecuencia en la práctica y el estudiante deberá seguir la presente discusión con gran atención.

Las derivadas parciales se denotan por subíndices y $u(x, y, t)$ como función de r, θ, t por la misma letra u, para simplificar. Como en la sección 11.4, se usa la regla de la cadena (sección 8.8), para obtener

$$u_x = u_r r_x + u_\theta \theta_x.$$

Al derivar otra vez con respecto a x y aplicar la regla del producto se obtiene

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} u_{xx} &= (u_r r_x)_x + (u_\theta \theta_x)_x \\ &= (u_r)_x r_x + u_r r_{xx} + (u_\theta)_x \theta_x + u_\theta \theta_{xx}. \end{aligned}$$

Ahora bien, al aplicar de nuevo la regla de la cadena se encuentra

$$(u_r)_x = u_{rr} r_x + u_{r\theta}\theta_x \qquad \text{y} \qquad (u_\theta)_x = u_{\theta r} r_x + u_{\theta\theta}\theta_x.$$

Para determinar las derivadas parciales r_x y θ_x, es necesario derivar

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{y} \qquad \theta = \arctan \frac{y}{x},$$

encontrándose

$$r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}, \qquad \theta_x = \frac{1}{1 + (y/x)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{r^2}.$$

Al derivar de nuevo estas dos fórmulas se obtiene

$$r_{xx} = \frac{r - x r_x}{r^2} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} = \frac{y^2}{r^3}, \qquad \theta_{xx} = -y\left(-\frac{2}{r^3}\right) r_x = \frac{2xy}{r^4}.$$

Todas estas expresiones se sustituyen en (1). Suponiendo la continuidad de las derivadas parciales primera y segunda, se tiene $u_{r\theta} = u_{\theta r}$ y al simplificar,

$$\text{(2)} \qquad u_{xx} = \frac{x^2}{r^2} u_{rr} - 2\frac{xy}{r^3} u_{r\theta} + \frac{y^2}{r^4} u_{\theta\theta} + \frac{y^2}{r^3} u_r + 2\frac{xy}{r^4} u_\theta.$$

De manera similar se sigue que

$$\text{(3)} \qquad u_{yy} = \frac{y^2}{r^2} u_{rr} + 2\frac{xy}{r^3} u_{r\theta} + \frac{x^2}{r^4} u_{\theta\theta} + \frac{x^2}{r^3} u_r - 2\frac{xy}{r^4} u_\theta.$$

Al sumar (2) y (3) se observa que el laplaciano de u en coordenadas polares es

$$\text{(4)} \qquad \boxed{\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.}$$

En la siguiente sección se aplicará esta fórmula para estudiar las vibraciones de un parche de tambor (membrana circular).

Problemas de la sección 11.9

1. Efectuar los detalles de los cálculos que llevan de (2) a (3).
2. Transformar (4) de nuevo a coordenadas cartesianas.
3. Demostrar que (4) puede escribirse

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

4. Si u es independiente de θ, entonces (4) se reduce a $\nabla^2 u = u_{rr} + u_r/r$. Deducir este resultado directamente del laplaciano en coordenadas cartesianas suponiendo que u es independiente de θ.
5. Demostrar que la única solución de $\nabla^2 u = 0$ que sólo depende de $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es $u = a \ln r + b$.
6. Demostrar que $u_n = r^n \cos n\theta$, $u_n = r^n \operatorname{sen} n\theta$, $n = 0, 1, \cdots$, son soluciones de $\nabla^2 u = 0$ con $\nabla^2 u$ dado por (4).
7. Suponiendo que es posible la derivación término a término, demostrar que una solución de la ecuación de Laplace en el disco $R < 1$ que satisface la condición en la frontera $u(R, \theta) = f(\theta)$ (f dada) es

$$\boxed{u(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n\theta + b_n\left(\frac{r}{R}\right)^n \operatorname{sen} n\theta\right]}$$

donde a_n, b_n son los coeficientes de Fourier de f (ver la sección 10.3).

Potencial electrostático. Problemas de calor de estado estacionario. El potencial electrostático u satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2 u = 0$ en cualquier región libre de cargas. Además, la ecuación del calor $u_t = c^2\nabla^2 u$ (ver la sección 11.5) se reduce a la ecuación de Laplace si la temperatura u es independiente del tiempo t (**"caso de estado estacionario"**). Encontrar el potencial electrostático (equivalente: la distribución de la temperatura de estado estacionario) en el disco $r < 1$ que corresponde a los siguientes valores en la frontera.

8. $u(\theta) = 10\cos^2\theta$
9. $u(\theta) = 40\operatorname{sen}^3\theta$
10. $u(\theta) = \begin{cases} 110 & \text{si } -\pi/2 < \theta < \pi/2 \\ 0 & \text{si } \pi/2 < \theta < 3\pi/2 \end{cases}$
11. $u(\theta) = \begin{cases} -100 & \text{si } -\pi < \theta < 0 \\ 100 & \text{si } 0 < \theta < \pi \end{cases}$
12. $u(\theta) = \begin{cases} \theta & \text{si } -\pi/2 < \theta < \pi/2 \\ \pi - \theta & \text{si } \pi/2 < \theta < 3\pi/2 \end{cases}$
13. $u(\theta) = \begin{cases} \theta & \text{si } -\pi/2 < \theta < \pi/2 \\ 0 & \text{si } \pi/2 < \theta < 3\pi/2 \end{cases}$
14. $u(\theta) = \theta^2 \quad (-\pi < \theta < \pi)$
15. $u(\theta) = |\theta| \quad (-\pi < \theta < \pi)$
16. Encontrar una fórmula para el potencial u sobre el eje x en el problema 15. Usar los cuatro primeros términos de esta serie para calcular u en $x = -0.75, -0.5, -0.25, 0, 0.25, 0.5, 0.75$ (dos decimales).
17. Encontrar una fórmula para el potencial u sobre el eje y en el problema 15.
18. Encontrar el potencial electrostático en el semidisco $r < 1$, $0 < \theta < \pi$, que es igual a $110\theta(\pi - \theta)$ en la semicircunferencia $r = 1$ y 0 sobre el segmento $-1 < x < 1$.
19. Encontrar la temperatura de estado estacionario u de una placa semicircular delgada $r < a$, $0 < \theta < \pi$, si la semicircunferencia $r = a$ se mantiene a una temperatura constante u_0 y el segmento frontera $-a < x < a$ se mantiene a $u = 0$. (Usar separación de variables.)

20. **(Laplaciano en coordenadas cilíndricas)** Demostrar que el laplaciano en coordenadas cilíndricas r, θ, z definidas por $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$, $z = z$ es

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_{zz}.$$

Expresar $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy}$ en términos de las coordenadas x^*, y^* dadas por

21. $x^* = ax + b, \quad y^* = cy + d$
22. $x^* = x + y, \quad y^* = x - y$
23. $x^* = x^2, \quad y^* = y^2$
24. $x^* = 1/x, \quad y^* = 1/y$
25. $x^* = x\cos\alpha - y\operatorname{sen}\alpha, \quad y^* = x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha$ ("*rotación* a través de α")
26. **(Problema de Neumann)** Demostrar que la solución del problema de Neumann $\nabla^2 u = 0$ si $r < R$, $u_n(R, \theta) = f(\theta)$ (n la normal exterior) es

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(A_n\cos n\theta + B_n\operatorname{sen} n\theta)$$

con A_0 arbitraria y

$$A_n = \frac{2}{\pi n R^{n-1}}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta, \qquad B_n = \frac{2}{\pi n R^{n-1}}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\operatorname{sen} n\theta\, d\theta.$$

27. Demostrar que (9), sección 9.4, impone sobre $f(\theta)$ del problema 26 la condición

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta = 0,$$

denominada generalmente "*condición de compatibilidad*".

28. **(Problema de Neumann)** Resolver $\nabla^2 u = 0$ en la corona $1 < r < 3$ si $u_r(1, \theta) = \operatorname{sen}\theta$, $u_r(3, \theta) = 0$.

11.10 MEMBRANA CIRCULAR. USO DE LA SERIE DE FOURIER-BESSEL

Las membranas circulares se presentan en tambores, bombas, micrófonos, teléfonos, etc., lo cual explica el porqué de su gran importancia en la ingeniería. Siempre que una membrana circular es plana y su material es elástico, pero sin ofrecer resistencia alguna a la flexión (¡se excluyen así las membranas metálicas delgadas!), sus vibraciones están gobernadas por la ecuación bidimensional de onda (3'), sección 11.7, que se escribe ahora en las coordenadas polares definidas por $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ en la forma [ver (4) en la sección anterior]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right).$$

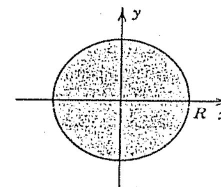


Figura 272. Membrana circular.

En la figura 272 se ilustra la membrana de radio R para la que se determinarán las soluciones $u(r, t)$ que son radialmente simétricas,[9] es decir, que no dependen de θ. Entonces la ecuación de onda se reduce a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right). \tag{1}$$

Condiciones en la frontera e iniciales. Puesto que la membrana está fija a lo largo de su frontera $r = R$, se tiene la condición en la frontera

(2) $$u(R, t) = 0 \qquad \text{para toda } t \geqq 0.$$

Habrá soluciones que no dependen de θ si las condiciones iniciales no dependen de θ, es decir, si son de la forma

(3) $$u(r, 0) = f(r) \qquad [\text{deflexión inicial } f(r)]$$

y

(4) $$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(r) \qquad [\text{velocidad inicial } g(r)].$$

Primer paso. Ecuaciones diferenciales ordinarias. Ecuación de Bessel

Por separación de variables, se determinan primero las soluciones

(5) $$u(r, t) = W(r)G(t)$$

que satisfacen la condición en la frontera (2). Al sustituir (5) y sus derivadas en (1) y dividiendo el resultado entre c^2WG se obtiene

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{1}{W}\left(W'' + \frac{1}{r}W'\right)$$

[9] Para las soluciones que dependen de θ, ver los problemas de esta sección.

donde los puntos denotan derivadas con respecto a t y las primas denotan derivadas con respecto a r. Las expresiones de ambos miembros deben ser iguales a una constante, la cual debe ser negativa, por ejemplo, $-k^2$, a fin de obtener soluciones que satisfagan la condición en la frontera sin formar una identidad con cero. Por tanto,

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{1}{W}\left(W'' + \frac{1}{r}W'\right) = -k^2.$$

Se obtienen así las dos ecuaciones diferenciales linales ordinarias

(6) $$\boxed{\ddot{G} + \lambda^2 G = 0} \qquad \text{donde } \lambda = ck$$

y

(7) $$\boxed{W'' + \frac{1}{r}W' + k^2W = 0.}$$

La expresión (7) puede reducirse a la ecuación de Bessel (sección 5.5) si se hace $s = kr$. Entonces $1/r = k/s$ y por la regla de la cadena se obtiene

$$W' = \frac{dW}{dr} = \frac{dW}{ds}\frac{ds}{dr} = \frac{dW}{ds}k \qquad \text{y} \qquad W'' = \frac{d^2W}{ds^2}k^2.$$

Al sustituir esta expresión en (7) y omitiendo el factor común k^2 se obtiene

(7*) $$\boxed{\frac{d^2W}{ds^2} + \frac{1}{s}\frac{dW}{ds} + W = 0.}$$

Ésta es la **ecuación de Bessel** (1), sección 5.5, con parámetro $\nu = 0$.

Segundo paso. Satisfacción de la condición en la frontera

Las soluciones de (7*) son las funciones de Bessel J_0 y Y_0 la primera y segunda clase (ver las secciones, 5.5, 5.7), pero Y_0 se hace infinita en 0 y no puede usarse ya que la deflexión de la membrana debe conservarse siempre finita. Queda entonces

(8) $$W(r) = J_0(s) = J_0(kr) \qquad (s = kr).$$

Ahora en la frontera $r = R$ se obtiene $W(R) = J_0(kR) = 0$ por (2) (ya que $G \equiv 0$ implicaría $u \equiv 0$). Esta condición puede satisfacerse porque J_0 tiene (una infinidad de) ceros positivos, $s = \alpha_1, \alpha_2, \cdots$ (ver la figura 273), con valores numéricos

$$\alpha_1 = 2.4048, \ \alpha_2 = 5.5201, \ \alpha_3 = 8.6537, \ \alpha_4 = 11.7915, \ \alpha_5 = 14.9309,$$

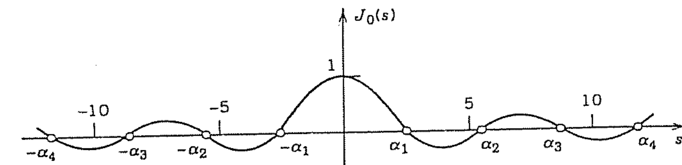


Figura 273. Función de Bessel $J_0(s)$.

y así sucesivamente (ver la referencia [1], apéndice 1, para tablas más extensas). Como puede verse, estos valores tienen un espaciamiento irregular. La ecuación (8) implica ahora

(9) $$kR = \alpha_m \quad \text{por tanto} \quad k = k_m = \frac{\alpha_m}{R}, \qquad m = 1, 2, \cdots.$$

En consecuencia, las funciones

(10) $$W_m(r) = J_0(k_m r) = J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right), \qquad m = 1, 2, \cdots,$$

son soluciones de (7) que se hacen cero en $r = R$.

Eigenfunciones y eigenvalores. Para W_m en (10), una solución general de (6) correspondiente con $\lambda = \lambda_m = ck_m$ es

$$G_m(t) = a_m \cos \lambda_m t + b_m \operatorname{sen} \lambda_m t.$$

Por tanto las funciones

(11) $$\boxed{u_m(r, t) = W_m(r)G_m(t) = (a_m \cos \lambda_m t + b_m \operatorname{sen} \lambda_m t)J_0(k_m r)}$$

donde $m = 1, 2, \cdots$, son soluciones de la ecuación de onda (1), las cuales satisfacen la condición en la frontera (2). Estas son las **eigenfunciones** del problema planteado y los **eigenvalores** correspondientes son λ_m.

A la vibración de la membrana que corresponde a u_m se le llama el m-ésimo **modo normal**; tiene la frecuencia $\lambda_m/2\pi$ ciclos por unidad de tiempo. Puesto que los ceros de la función de Bessel J_0 no están espaciados regularmente en el eje (en contraste con los ceros de las funciones senoidales que aparecen en el caso de la cuerda vibratoria), el sonido de un tambor es totalmente diferente al de un violín. Las formas de los modos normales pueden obtenerse con facilidad de la figura 273 y se ilustran en la figura 274. Para $m = 1$, todos los puntos de la membrana se mueven hacia arriba (o hacia abajo) al mismo tiempo. Para $m = 2$ la situación es la siguiente. La función

$$W_2(r) = J_0\left(\frac{\alpha_2}{R}r\right)$$

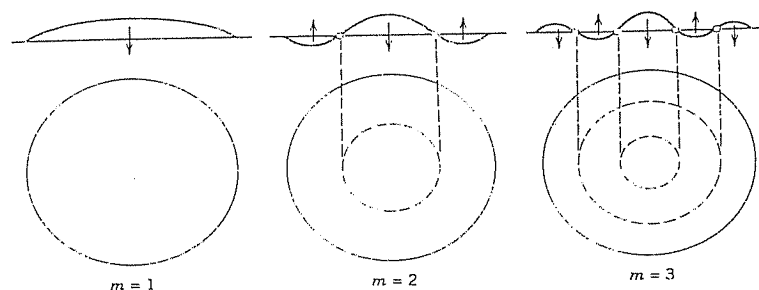


Figura 274. Modos normales de la membrana circular en el caso de vibraciones independientes del ángulo.

es cero para $\alpha_2 r/R = \alpha_1$, por tanto $r = \alpha_1 R/\alpha_2$. El círculo $r = \alpha_1 R/\alpha_2$ es, por lo tanto, una línea nodal y cuando en algún instante la parte central de la membrana se mueve hacia arriba, la parte externa ($r > \alpha_1 R/\alpha_2$) se mueve hacia abajo y viceversa. La solución $u_m(r, t)$ tiene $m - 1$ líneas nodales, que son círculos (figura 274).

Tercer paso. Solución del problema completo

Para obtener una solución que satisfaga también las condiciones iniciales (3) y (4), puede procederse como en el caso de la cuerda, es decir, se considera la serie[10]

$$(12) \qquad u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(r) G_m(t) = \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos \lambda_m t + b_m \operatorname{sen} \lambda_m t) J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right).$$

Al hacer $t = 0$ y usar (3), se obtiene

$$(13) \qquad u(r, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right) = f(r).$$

Por tanto, para que (12) satisfaga (3), las constantes a_m deben ser los coeficientes de la **serie de Fourier-Bessel** (13) que representa a $f(r)$ en términos de $J_0(\alpha_m r/R)$; es decir [ver (9) de la sección 5.9 con $n = 0$],

$$(14) \qquad \boxed{a_m = \frac{2}{R^2 J_1^{\,2}(\alpha_m)} \int_0^R r f(r) J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right) dr} \qquad (m = 1, 2, \cdots).$$

La derivabilidad de $f(r)$ en el intervalo $0 \leqq r \leqq R$ es suficiente para la existencia del desarrollo (13); ver la referencia [A9]. Los coeficientes b_m de (12) pueden determi-

[10] No se considerarán los problemas de convergencia y unicidad.

narse a partir de (4) en una forma similar. Para obtener valores numéricos de a_m y b_m puede aplicarse uno de los métodos comunes de integración aproximada, usando tablas de J_0 y J_1. En ocasiones es posible evitar la integración numérica, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1 Vibraciones de una membrana circular

Encontrar las vibraciones de un parche de tambor circular de 1 ft de radio y 2 slugs/ft² de densidad si la tensión es de 8 lb/ft, la velocidad inicial es 0 y el desplazamiento inicial es

$$f(r) = 1 - r^2 \text{ [ft]}.$$

Solución. $c^2 = T/\rho = 8/2 = 4$ [ft²/s²]. Además, $b_m = 0$, ya que la velocidad inicial es 0. Por (14) y el problema 29 de la sección 5.9, dado que $R = 1$, se obtiene

$$a_m = \frac{2}{J_1^{\,2}(\alpha_m)} \int_0^1 r(1 - r^2) J_0(\alpha_m r)\, dr = \frac{4 J_2(\alpha_m)}{\alpha_m^{\,2} J_1^{\,2}(\alpha_m)} = \frac{8}{\alpha_m^{\,3} J_1(\alpha_m)},$$

donde la última igualdad se sigue de (3), sección 5.6, con $\nu = 1$, es decir,

$$J_2(\alpha_m) = \frac{2}{\alpha_m} J_1(\alpha_m) - J_0(\alpha_m) = \frac{2}{\alpha_m} J_1(\alpha_m).$$

En la tabla 9.5 de [1] se dan α_m y $J_0'(\alpha_m)$. A partir de esto se obtiene $J_1(\alpha_m) = -J_0'(\alpha_m)$ por (2), sección 5.6, con $\nu = 0$, y se calculan las a_m:

m	α_m	$J_1(\alpha_m)$	$J_2(\alpha_m)$	a_m
1	2.40483	0.51915	0.43176	1.10801
2	5.52008	−0.34026	−0.12328	−0.13978
3	8.65373	0.27145	0.06274	0.04548
4	11.79153	−0.23246	−0.03943	−0.02099
5	14.93092	0.20655	0.02767	0.01164
6	18.07106	−0.18773	−0.02078	−0.00722
7	21.21164	0.17327	0.01634	0.00484
8	24.35247	−0.16170	−0.01328	−0.00343
9	27.49348	0.15218	0.01107	0.00253
10	30.63461	−0.14417	−0.00941	−0.00193

Por tanto

$$f(r) = 1.108 J_0(2.4048r) - 0.140 J_0(5.5201r) + 0.045 J_0(8.6537r) - \cdots.$$

Se observa que los coeficientes se decrementan con relativa lentitud. La suma de los coeficientes dados explícitamente en la tabla es 0.99915. La suma de *todos* los coeficientes debería ser 1. (¿Por qué?) Así, por el criterio de Leibniz del apéndice 3.3, la suma parcial de esos términos da la amplitud $f(r)$ con tres cifras decimales de precisión.

Puesto que

$$\lambda_m = c k_m = c\alpha_m/R = 2\alpha_m,$$

por (12) se obtiene la solución (con r medida en pies y t en segundos)

$$u(r, t) = 1.108J_0(2.4048r)\cos 4.8097t - 0.140J_0(5.5201r)\cos 11.0402t$$
$$+ 0.045J_0(8.6537r)\cos 17.3075t - \cdots.$$

En la figura 274, $m = 1$ da una idea del movimiento del primer término de la serie obtenida, $m = 2$ del segundo término y $m = 3$ del tercero, por lo que el resultado obtenido puede "verse" casi tan bien como el de la cuerda vibratoria de la sección 11.3. ∎

Problemas de la sección 11.10

1. ¿Cuál es la razón para usar coordenadas polares en la presente sección?
2. Si la tensión de la membrana se incrementa, ¿de qué manera cambia la frecuencia de cada modo normal (11)?
3. Un tambor pequeño debería tener un modo fundamental más alto que el de un tambor grande, siendo la tensión y la densidad las mismas. ¿Cómo puede concluirse esto a partir de las fórmulas estudiadas?
4. Usando el valor numérico de α_1, encontrar una fórmula para la frecuencia fundamental de un tambor circular.
5. Encontrar una fórmula para la tensión T necesaria para producir una nota fundamental deseada en un tambor circular.
6. Determinar los valores numéricos de los radios de las líneas nodales de u_2 y u_3 [ver (11)] cuando $R = 1$.
7. Trazar una figura similar a la figura 274 para u_4, u_5, u_6.
8. Repetir el problema 6 para u_4, u_5, u_6.
9. ¿Es posible que, para c y R fijas, dos o más funciones u_m [ver (11)] que tienen líneas nodales diferentes correspondan al mismo eigenvalor?
10. ¿Por qué es $a_1 + a_2 + \cdots = 1$ en el ejemplo 1? Calcular las cinco primeras sumas parciales de esta serie.
11. Comprobar los cálculos de las a_m en el ejemplo 1.
12. Usando los valores del texto, comprobar que $\alpha_m \approx (m - \frac{1}{4})\pi$ para $m = 1, \cdots, 5$.
13. Demostrar que para que (12) satisfaga (4),

$$(15) \qquad \boxed{b_m = \frac{2}{c\alpha_m R J_1^2(\alpha_m)} \int_0^R rg(r)J_0(\alpha_m r/R)\,dr,} \qquad m = 1, 2, \cdots.$$

14. Encontrar la deflexión $u(r, t)$ de la membrana circular de radio $R = 1$ si $c = 1$, la velocidad inicial es cero y la deflexión inicial es $f(r) = k(1 - r^4)$. *Sugerencia.* Recordar los problemas 25–32, sección 5.9.
15. Resolver el problema 14 cuando $f(r) = k(1 - r^2)$, con los datos restantes como antes.

Vibraciones de una membrana circular que dependen de r y θ

16. Demostrar que al sustituir $u = F(r, \theta)G(t)$ en la ecuación de onda

$$(16) \qquad u_{tt} = c^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\right)$$

lleva a

$$(17) \qquad \ddot{G} + \lambda^2 G = 0, \qquad \text{donde } \lambda = ck,$$

$$(18) \qquad F_{rr} + \frac{1}{r}F_r + \frac{1}{r^2}F_{\theta\theta} + k^2F = 0.$$

17. Demostrar que al sustituir $F = W(r)Q(\theta)$ en (18) se obtiene

$$(19) \qquad Q'' + n^2Q = 0,$$

$$(20) \qquad r^2W'' + rW' + (k^2r^2 - n^2)W = 0.$$

18. Demostrar que $Q(\theta)$ debe ser periódica con periodo 2π y que, por lo tanto, $n = 0, 1, \cdots$ en (19) y (20). Demostrar que esto da las soluciones $Q_n = \cos n\theta$, $Q_n^* = \operatorname{sen} n\theta$, $W_n = J_n(kr)$, $n = 0, 1, \cdots$.
19. Demostrar que la condición en la frontera

$$(21) \qquad u(R, \theta, t) = 0$$

lleva a $k = k_{mn} = \alpha_{mn}/R$, donde $s = \alpha_{mn}$ es el m-ésimo cero positivo de $J_n(s)$.

20. Demostrar que las soluciones de (16) que satisfacen (21) son (figura 275)

$$(22) \qquad \begin{aligned} u_{mn} &= (A_{mn}\cos ck_{mn}t + B_{mn}\operatorname{sen} ck_{mn}t)J_n(k_{mn}r)\cos n\theta, \\ u^*_{mn} &= (A^*_{mn}\cos ck_{mn}t + B^*_{mn}\operatorname{sen} ck_{mn}t)J_n(k_{mn}r)\operatorname{sen} n\theta. \end{aligned}$$

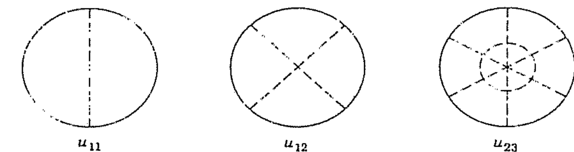


Figura 275. Líneas nodales de algunas de las soluciones (22).

21. Demostrar que la condición inicial $u_t(r, \theta, 0) = 0$ lleva a $B_{mn} = 0$, $B_{mn}^* = 0$ en (22).
22. Demostrar que $u_{m0}^* \equiv 0$ y u_{m0} es idéntica a (11) en la presente sección.
23. Demostrar que u_{11} representa el modo fundamental de una membrana semicircular y encontrar la frecuencia correspondiente cuando $c^2 = 1$ y $R = 1$.

11.11 ECUACIÓN DE LAPLACE. POTENCIAL

Una de las ecuaciones diferenciales parciales más importantes de la física es la **ecuación de Laplace**

$$(1) \qquad \boxed{\nabla^2 u = 0.}$$

Aquí $\nabla^2 u$ es el laplaciano de u. En coordenadas cartesianas x, y, z en el espacio

$$(2) \qquad \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

La teoría de las soluciones de la ecuación de Laplace se llama la **teoría del potencial**. Las soluciones de (1) que tienen segundas derivadas parciales ***continuas*** se llaman **funciones armónicas**.

Se ha encontrado esta ecuación antes, en tres dimensiones (secciones 8.9, 9.8) así como en dos dimensiones (sección 11.5) y se considerará ahora en coordenadas cilíndricas y esféricas, junto con problemas típicos con valores en la frontera. Se dirán antes algunas palabras acerca de su importancia al mencionar algunas de las áreas principales donde desempeña un papel fundamental.

Áreas de aplicación

La **gravitación** está gobernada por la ecuación de Laplace, como se explica a continuación. En el ejemplo 3, sección 8.9, se vio que si una partícula A de masa M está fija en un punto (X, Y, Z) y otra partícula B de masa m está en un punto (x, y, z), entonces A atrae a B, siendo la fuerza gravitacional el gradiente de la función escalar

$$u(x, y, z) = \frac{c}{r}, \qquad c = GMm = const,$$

$$r = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2} \qquad (> 0).$$

Esta función de x, y, z se llama el **potencial** del campo gravitacional y satisface la ecuación de Laplace.

La generalización al potencial y a la fuerza debida a una distribución continua de masa es bastante directa. Si una masa de densidad $\rho(X, Y, Z)$ está distribuida en una región T del espacio, entonces el potencial u correspondiente en un punto (x, y, z) no ocupado por masa se define como

$$(3) \qquad u(x, y, z) = k \iiint_T \frac{\rho(X, Y, Z)}{r}\, dX\, dY\, dZ \qquad (k > 0),$$

con r como está dada por la fórmula anterior. Puesto que $1/r$ $(r > 0)$ es una solución de (1), es decir, $\nabla^2(1/r) = 0$ y ρ no depende de x, y, z, se obtiene

$$\nabla^2 u = k \iiint_T \rho\, \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) dX\, dY\, dZ = 0;$$

es decir, el potencial gravitacional definido por (3) satisface la ecuación de Laplace en cualquier punto que no esté ocupado por materia.

Electrostática. La fuerza eléctrica de atracción o repulsión entre partículas cargadas está gobernada por la *ley de Coulomb* (ver la sección 8.9), cuya forma matemática es igual a la ley de la gravitación de Newton. A partir de este hecho se sigue qué el campo creado por una distribución de cargas eléctricas puede describirse matemáticamente por una función de potencial que satisface la ecuación de Laplace en cualquier punto no ocupado por cargas.

El **flujo de calor** está gobernado por la ecuación del calor

$$u_t = c^2 \nabla^2 u,$$

que en el caso de estado estacionario ($u_t = 0$) se reduce a la ecuación de Laplace, como se sabe por la sección 11.5 para problemas bidimensionales, y en tres dimensiones esto es similar.

Hidrodinámica. La ecuación de Laplace también aparece en relación con el flujo de fluidos incompresibles de estado estacionario, como se demostrará en el capítulo 17 (donde también se verá que los problemas ***bidimensionales*** pueden resolverse por métodos del análisis complejo).

El laplaciano en coordenadas cilíndricas y esféricas

En la mayoría de las aplicaciones que llevan a la ecuación de Laplace, es necesario resolver un **problema con valores en la frontera**, es decir, determinar la solución de (1) que satisface las condiciones en la frontera dadas sobre la superficie frontera S de la región T en la que se considera la ecuación. A este se le llama:

(I) **Primer problema con valores en la frontera** o **problema de Dirichlet** si u se prescribe en S.
(II) **Segundo problema con valores en la frontera** o **problema de Neumann** si la derivada normal $u_n = \partial u/\partial n$ se prescribe en S.
(III) **Tercer problema, o problema mixto, con valores en la frontera** si u se prescribe en una porción de S y u_n se prescribe en el resto de la porción de S.

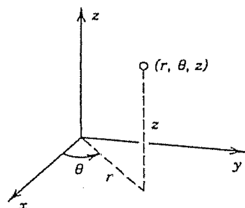
Entonces es necesario introducir coordenadas en el espacio tales que S esté dada por fórmulas simples. Para ello debe transformarse el laplaciano a otras coordenadas. Se trata de lo mismo en principio que para dos dimensiones en la sección 11.9.

De hecho, para las **coordenadas cilíndricas** r, θ, z, relacionadas con las coordenadas cartesianas por (ver la figura 276 en la página 147)

$$(4) \qquad x = r\cos\theta, \qquad y = r \operatorname{sen}\theta, \qquad z = z,$$

se obtiene de inmediato $\nabla^2 u$ sumando u_{zz} a (4), sección 11.9, obteniéndose

$$(5) \qquad \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$



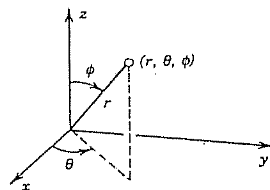


Figura 276. Coordenadas cilíndricas. Figura 277. Coordenadas esféricas.

De igual importancia en la práctica son las **coordenadas esféricas** r, θ, ϕ, relacionadas con las coordenadas cartesianas por (ver la figura 277)[11]

$$(6) \qquad x = r\cos\theta\,\operatorname{sen}\phi, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\phi, \qquad z = r\cos\phi.$$

El laplaciano de una función u en coordenadas esféricas es

$$(7) \qquad \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\cot\phi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

Esta expresión también puede escribirse

$$(7') \qquad \nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\operatorname{sen}\phi\frac{\partial u}{\partial \phi}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right].$$

Esta fórmula puede deducirse de una manera similar a la de la sección 11.9; los detalles se dejan como ejercicio al estudiante.

En la sección siguiente se demuestra que la separación de variables en coordenadas esféricas lleva a la *ecuación de Legendre*, la cual se discutió en la sección 5.3.

Problemas de la sección 11.11

1. Comprobar que $u = c/r$ satisface la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas.
2. Demostrar que la única solución de la ecuación de Laplace que sólo depende de $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ es $u = c/r + k$; aquí c y k son constantes.
3. Determinar c y k en el problema 2 de modo que u represente el potencial electrostático entre dos esferas concéntricas de radios $r_1 = 2$ cm y $r_2 = 4$ cm mantenidas en los potenciales $U_1 = 110$ volts y $U_2 = 70$ volts, respectivamente.
4. Demostrar que la única solución de la ecuación bidimensional de Laplace que sólo depende de $r = \sqrt{x^2+y^2}$ es $u = c\ln r + k$.

[11] La ecuación (6) se usa en cálculo elemental y generaliza la conocida notación para coordenadas polares. Desafortunadamente, en algunos libros se usan θ y ϕ intercambiadas, una extensión de la notación $x = r\cos\phi$, $y = r\operatorname{sen}\phi$ (usada en algunos países europeos)

5. Encontrar el potencial electrostático entre dos cilindros coaxiales de radios $r_1 = 2$ cm y $r_2 = 4$ cm mantenidos en los potenciales $U_1 = 110$ volts y $U_2 = 70$ volts, respectivamente. Trazar y comparar las líneas equipotenciales en los problemas 3 y 5. Comentar.
6. Al sustituir $u(r)$, r como en el problema 2, en $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$, comprobar que $u'' + 2u'/r = 0$, en concordancia con (7).
7. Deducir (7) a partir de $\nabla^2 u$ en coordenadas cartesianas.
8. Comprobar (5) transformando $\nabla^2 u$ de nuevo a coordenadas cartesianas.

Demostrar que las siguientes funciones $u = f(x, y)$ satisfacen la ecuación de Laplace y trazar algunas de las líneas equipotenciales $u = const.$

9. xy
10. $x^2 - y^2$
11. $x^3 - 3xy^2$
12. $x/(x^2 + y^2)$
13. $y/(x^2 + y^2)$
14. $(x + 1)(y - 1)$
15. $(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$

Encontrar la distribución de temperatura de estado estacionario (independiente del tiempo):

16. Entre dos placas paralelas $x = x_0$ y $x = x_1$ mantenidas a las temperaturas u_0 y u_1, respectivamente.
17. Entre dos cilindros circulares coaxiales de radios r_0 y r_1 mantenidos a las temperaturas u_0 y u_1, respectivamente.
18. Entre dos esferas concéntricas de radios r_0 y r_1 mantenidas a las temperaturas u_0 y u_1, respectivamente.
19. Si las superficie de la bola $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leqq R^2$ se mantiene a temperatura cero y la temperatura inicial de la bola es $f(r)$, demostrar que la temperatura $u(r, t)$ de la bola es la solución de $u_t = c^2\left(u_{rr} + \frac{2}{r}u_r\right)$, la cual satisface las condiciones $u(R, t) = 0$, $u(r, 0) = f(r)$.
20. Demostrar que haciendo $v = ru$, las fórmulas del problema 19 asumen la forma $v_t = c^2 v_{rr}$, $v(R, t) = 0$, $v(r, 0) = rf(r)$. Incluir la condición $v(0, t) = 0$ (la cual se cumple porque u debe estar acotada en $r = 0$) y resolver el problema resultante por separación de variables.
21. **(Ecuación de Helmholtz)** Demostrar que la sustitución de $u = U(x, y, z)e^{-i\omega t}$ ($i = \sqrt{-1}$) en la ecuación tridimensional de onda $u_{tt} = c^2\nabla^2 u$ da como resultado la llamada *ecuación tridimensional de Helmholtz* (ver también la sección 11.8)
$$\nabla^2 U + k^2 U = 0, \qquad k = \omega/c.$$
22. Sean r, θ, ϕ coordenadas esféricas. Si $u(r, \theta, \phi)$ satisface $\nabla^2 u = 0$, demostrar que $v(r, \theta, \phi) = r^{-1}u(r^{-1}, \theta, \phi)$ satisface $\nabla^2 v = 0$.
23. Si $u(r, \theta)$ satisface $u = 0$, demostrar que $v(r, \theta) = u(r^{-1}, \theta)$ satisface $\nabla^2 v = 0$. (r y θ son coordenadas polares.)
24. Resolver el problema con valores en la frontera $\nabla^2 u = 0$ ($0 < x < \pi$, $y > 0$), $u(0, y) = 0$, $u(\pi, y) = 0$, $u(x, 0) = 1$, $|u(x, y)|$ acotado. (Usar separación de variables.)
25. Es posible demostrar que la solución del problema 24 puede escribirse en la forma $u = (2/\pi)$ arc tan (sen x/senh y). Comprobar directamente que esta u satisface todas las condiciones del problema 24.

11.12 LAPLACIANO EN COORDENADAS ESFÉRICAS. ECUACIÓN DE LEGENDRE

Se considera ahora un problema típico con valores en la frontera que incluye la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas. Suponer que una esfera S de radio R se mantiene en una distribución fija de potencial eléctrico

$$(1) \qquad u(R, \theta, \phi) = f(\phi)$$

donde r, θ, ϕ son las coordenadas esféricas definidas en la sección anterior, con el origen en el centro de S, y donde $f(\phi)$ es una función dada. (En la figura 278 de la página 689 se ilustra un ejemplo especial.) Quiere encontrarse el potencial u en todos los puntos del espacio, el cual se supone libre de otras cargas. Puesto que el potencial en S es independiente de θ, también lo es el potencial en el espacio. Por lo tanto, $\partial^2 u/\partial\theta^2 = 0$ en (7') de la sección anterior, por lo que la ecuación de Laplace se reduce a

$$\text{(2)} \qquad \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\operatorname{sen}\phi \frac{\partial u}{\partial \phi}\right) = 0.$$

Además, en el infinito el potencial será cero; es decir, debe tenerse

$$\text{(3)} \qquad \lim_{r\to\infty} u(r, \phi) = 0.$$

Así, debe resolverse el problema con valores en la frontera para (2) con la condición en la frontera (1) y condición en el infinito (3). Al sustituir

$$u(r, \phi) = G(r)H(\phi)$$

en (2) y dividiendo la ecuación resultante entre la función GH, se obtiene

$$\frac{1}{G}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dG}{dr}\right) = -\frac{1}{H \operatorname{sen}\phi}\frac{d}{d\phi}\left(\operatorname{sen}\phi \frac{dH}{d\phi}\right)$$

y se tienen las variables separadas. Por el razonamiento usual, los dos miembros de esta ecuación deben ser iguales a una constante, por ejemplo, k, de tal modo que

$$\text{(4)} \qquad \frac{1}{\operatorname{sen}\phi}\frac{d}{d\phi}\left(\operatorname{sen}\phi \frac{dH}{d\phi}\right) + kH = 0$$

y

$$\frac{1}{G}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dG}{dr}\right) = k.$$

La última ecuación puede escribirse $(r^2G')' = kG$ o

$$r^2G'' + 2rG' - kG = 0.$$

Esta es una ecuación de Euler–Cauchy. Por la sección 2.6 se sabe que tiene soluciones $G = r^\alpha$. Éstas tendrán una forma particularmente simple si se cambia la notación y se escribe $n(n + 1)$ en lugar de k. Entonces

$$\text{(5)} \qquad \boxed{r^2G'' + 2rG' - n(n+1)G = 0}$$

donde n sigue siendo arbitraria. Al sustituir $G = r^\alpha$ en (5) se tiene

$$[\alpha(\alpha - 1) + 2\alpha - n(n+1)]r^\alpha = 0.$$

Los ceros de la expresión entre corchetes son $\alpha = n$ y $\alpha = -n - 1$. Por tanto, se obtienen las soluciones

$$\text{(6)} \qquad G_n(r) = r^n \qquad \text{y} \qquad G_n^*(r) = \frac{1}{r^{n+1}}.$$

Transformación de la ecuación (4). Al hacer $\cos\phi = w$, se obtiene $\operatorname{sen}^2\phi = 1 - w^2$ y

$$\frac{d}{d\phi} = \frac{d}{dw}\frac{dw}{d\phi} = -\operatorname{sen}\phi \frac{d}{dw}.$$

Por consiguiente, (4) con $k = n(n + 1)$ asume la forma

$$\text{(7)} \qquad \frac{d}{dw}\left[(1 - w^2)\frac{dH}{dw}\right] + n(n+1)H = 0.$$

Esta es la **ecuación de Legendre** (ver la sección 5.3), que desarrollada queda

$$\text{(7')} \qquad \boxed{(1 - w^2)\frac{d^2H}{dw^2} - 2w\frac{dH}{dw} + n(n+1)H = 0.}$$

Solución usando una serie de Fourier-Legendre

Para el entero[12] $n = 0, 1, \cdots$, los polinomios de Legendre

$$H = P_n(w) = P_n(\cos\phi), \qquad n = 0, 1, \cdots,$$

son soluciones de la ecuación de Legendre (7). Se obtienen así las dos sucesiones de soluciones siguientes $u = GH$ de la ecuación de Laplace (2):

$$\text{(8*)} \qquad u_n(r, \phi) = A_n r^n P_n(\cos\phi), \qquad u_n^*(r, \phi) = \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\phi)$$

donde $n = 0, 1, \cdots$, y A_n y B_n son constantes.

Solución del problema interior. Esto significa una solución de (2) *dentro* de la esfera y que satisfaga (1). Para ello se considera la serie[13]

$$\text{(8)} \qquad \boxed{u(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\phi).}$$

---

[12] Hasta este punto, n era arbitraria ya que k también lo era. Puede demostrarse que la restricción de n a enteros es necesaria para hacer continua la solución de (7), junto con su derivada de primer orden, en el intervalo $-1 \leqq w \leqq 1$ o $0 \leqq \phi \leqq \pi$

[13] No se considerará la convergencia. Puede demostrarse que si $f(\phi)$ y $f'(\phi)$ son continuas por secciones en el intervalo $0 \leqq \phi \leqq \pi$, la serie (8) con coeficientes (10) puede derivarse dos veces término a término con respecto a r y con respecto a ϕ y que la serie resultante converge y representa a $\partial^2 u/\partial r^2$ y $\partial^2 u/\partial \phi^2$, respectivamente. En consecuencia, la serie (8) con coeficientes (10) es la solución del problema planteado en el interior de la esfera.

Para que (8) satisfaga (1) debe tenerse

$$(9) \qquad u(R, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos \phi) = f(\phi);$$

es decir, (9) debe ser la **serie de Fourier-Legendre** de $f(\phi)$. Por (7) de la sección 5.9 se obtienen los coeficientes

$$A_n R^n = \frac{2n + 1}{2} \int_{-1}^{1} \bar{f}(w) P_n(w)\, dw$$

donde $\bar{f}(w)$ denota $f(\phi)$ como una función de $w = \cos \phi$. Puesto que se tiene $dw = -\text{sen}\, \phi\, d\phi$ y los límites de integración -1 y 1 corresponden a $\phi = \pi$ y $\phi = 0$, respectivamente, se obtiene también

$$(10) \qquad \boxed{A_n = \frac{2n + 1}{2R^n} \int_{0}^{\pi} f(\phi) P_n(\cos \phi)\, \text{sen}\, \phi\, d\phi,} \qquad n = 0, 1, \cdots.$$

Por tanto, la serie (8) con coeficientes (10) es la solución del problema planteado para puntos interiores de la esfera.

Solución del problema exterior. Fuera de la esfera no es posible usar las funciones $u_n(r, \phi)$ porque estas funciones no satisfacen (3), pero pueden usarse las funciones $u_n^*(r, \phi)$, las cuales satisfacen (3), y proceder como antes. Esto lleva a la solución

$$(11) \qquad \boxed{u(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \phi)} \qquad (r \geqq R)$$

con coeficientes

$$(12) \qquad \boxed{B_n = \frac{2n + 1}{2} R^{n+1} \int_{0}^{\pi} f(\phi) P_n(\cos \phi)\, \text{sen}\, \phi\, d\phi.}$$

EJEMPLO 1 Capacitor esférico

Encontrar el potencial dentro y fuera de un capacitor esférico compuesto por dos semiesferas metálicas de 1 ft de radio separadas por una pequeña hendedura por razones de aislamiento, si la semiesfera superior se mantiene a 110 volts y la inferior está conectada a tierra (figura 278).

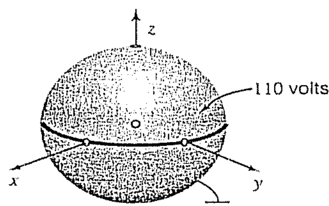


Figura 278. Capacitor esférico del ejemplo 1.

Solución. La condición en la frontera dada es (recuérdese la figura 277 de la sección 11.11)

$$f(\phi) = \begin{cases} 110 & \text{si} \quad 0 \leqq \phi < \pi/2 \\ 0 & \text{si} \quad \pi/2 < \phi \leqq \pi. \end{cases}$$

Puesto que $R = 1$, por (10) se obtiene

$$A_n = \frac{2n + 1}{2} \cdot 110 \int_{0}^{\pi/2} P_n(\cos \phi)\, \text{sen}\, \phi\, d\phi.$$

Se hace $w = \cos \phi$. Entonces $P_n(\cos \phi)\, \text{sen}\, \phi\, d\phi = -P_n(w)\, dw$ y se integra de 1 a 0. El signo menos se elimina integrando de 0 a 1. Entonces por (11) de la sección 5.3,

$$A_n = 55(2n + 1) \sum_{m=0}^{M} (-1)^m \frac{(2n - 2m)!}{2^n m!(n - m)!(n - 2m)!} \int_0^1 w^{n-2m}\, dw$$

donde $M = n/2$ para n par y $M = (n - 1)/2$ para n impar. La integral es igual a $1/(n - 2m + 1)$. Por tanto,

$$(13) \qquad A_n = \frac{55(2n + 1)}{2^n} \sum_{m=0}^{M} (-1)^m \frac{(2n - 2m)!}{m!(n - m)!(n - 2m + 1)!}.$$

Al tomar $n = 0$ se obtiene $A_0 = 55$ (ya que $0! = 1$). Para $n = 1, 2, 3, \cdots$ se obtiene

$$A_1 = \frac{165}{2} \cdot \frac{2!}{0!1!2!} = \frac{165}{2},$$

$$A_2 = \frac{275}{4}\left(\frac{4!}{0!2!3!} - \frac{2!}{1!1!1!}\right) = 0,$$

$$A_3 = \frac{385}{8}\left(\frac{6!}{0!3!4!} - \frac{4!}{1!2!2!}\right) = -\frac{385}{8},$$

y así sucesivamente. Por tanto el potencial (8) dentro de la esfera es (ya que $P_0 = 1$)

$$u(r, \phi) = 55 + \frac{165}{2} r P_1(\cos \phi) - \frac{385}{8} r^3 P_3(\cos \phi) + \cdots$$

con $P_1, P_3, \cdots$ dadas por (11'), sección 5.3. Puesto que $R = 1$, por (10) y (12) de la presente sección se observa que $B_n = A_n$ y por (11) se obtiene el potencial fuera de la esfera

$$u(r, \phi) = \frac{55}{r} + \frac{165}{2r^2} P_1(\cos \phi) - \frac{385}{8r^4} P_3(\cos \phi) + \cdots.$$

Es posible ahora usar sumas parciales de estas series para calcular los valores aproximados del potencial. Además, resulta interesante observar que lejos de la esfera el potencial es aproximadamente el de una carga puntual, a saber, $55/r$. (Comparar este resultado con el ejemplo 3 de la sección 8.9.) ∎

Problemas de la sección 11.12

1. Comprobar por sustitución que $u_n(r, \phi)$ y $u_n^*(r, \phi)$, $n = 0, 1, 2$ en (8*) son soluciones de (2).
2. Encontrar las superficies en las que las funciones u_1, u_2, u_3 son cero.
3. Trazar las funciones $P_n(\cos \phi)$ para $n = 0, 1, 2$ [ver (11'), sección 5.3].
4. Trazar las funciones $P_3(\cos \phi)$ y $P_4(\cos \phi)$.

Sean r, θ, ϕ las coordenadas esféricas usadas en el texto. Encontrar el potencial en el interior de la esfera $R = 1$, suponiendo que no hay cargas en el interior y que el potencial en la superficie es $f(\phi)$, donde

5. $f(\phi) = 1$
6. $f(\phi) = \cos \phi$
7. $f(\phi) = \cos 2\phi$
8. $f(\phi) = 1 - \cos^2 \phi$
9. $f(\phi) = \cos^3 \phi$
10. $f(\phi) = \cos 3\phi + 3 \cos \phi$
11. $f(\phi) = 10 \cos^3 \phi - 3 \cos^2 \phi - 5 \cos \phi - 1$
12. Demostrar que en el problema 5 el potencial exterior de la esfera es el mismo que el de una carga puntual en el origen.
13. Trazar las intersecciones de las superficies equipotenciales del problema 6 con el plano xz.
14. Encontrar el potencial exterior de la esfera de los problemas 5-11.
15. Deducir los valores de A_0, A_1, A_2, A_3 del ejemplo 1 a partir de (13).
16. En el ejemplo 1, trazar la suma de los tres términos dados explícitamente para $r = 1$ y ver qué tan buena aproximación de la función frontera dada es esta suma.
17. Encontrar la temperatura de una esfera homogénea de radio 1 si su semiesfera frontera inferior se mantiene a 0 °C y la superior a 20 °C.
18. Demostrar que $P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n + 1)\, P_n(x)$. (Usar el problema 8, sección 5.3.)
19. Demostrar que $\int_0^1 P_n(x)\, dx = [P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0)]/(2n + 1)$. (Usar el problema 18 y el problema 12, sección 5.3.) Usando esta igualdad, comprobar A_1, A_2, A_3 del ejemplo 1 y calcular A_5.
20. **(Ecuaciones de la línea de transmisión)** Considérese un cable largo o un alambre telefónico (figura 279) cuyo aislamiento no es perfecto, de tal modo que ocurren fugas a lo largo de todo el cable. La fuente S de la corriente $i(x, t)$ del cable está en $x = 0$, el extremo receptor T está en $x = l$. La corriente fluye de S a T, a través de la carga, y regresa a tierra. Sean las constantes R, L, C y G que denotan la resistencia, la inductancia, la capacitancia a tierra y la conductancia a tierra, respectivamente, del cable por unidad de longitud. Demostrar que

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t} \qquad \textbf{(Primera ecuación de la línea de transmisión)}$$

donde $u(x, t)$ es el potencial del cable. *Sugerencia.* Aplicar la ley de las tensiones de Kirchhoff a una porción pequeña del cable entre x y $x + \Delta x$ (diferencia de los potenciales en x y $x + \Delta x$ = caída resistiva + caída inductiva).

21. Demostrar que para el cable del problema 20,

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = Gu + C\frac{\partial u}{\partial t} \qquad \textbf{(Segunda ecuación de la línea de transmisión)}$$

Sugerencia. Usar la ley de las corrientes de Kirchhoff (diferencia de las corrientes en x y $x + \Delta x$ = pérdida debida a las fugas a tierra + pérdida capacitiva).

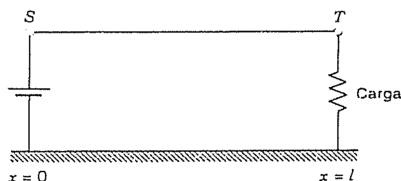


Figura 279. Línea de transmisión.

22. Demostrar que la eliminación de i o u de las ecuaciones de la línea de transmisión lleva a

$$u_{xx} = LCu_{tt} + (RC + GL)u_t + RGu,$$
$$i_{xx} = LCi_{tt} + (RC + GL)i_t + RGi.$$

23. **(Ecuaciones del telégrafo)** Para un cable submarino, G es despreciable y las frecuencias son bajas. Demostrar que esto lleva a las llamadas *ecuaciones del cable submarino* o **ecuaciones del telégrafo**

$$u_{xx} = RCu_t, \qquad i_{xx} = RCi_t.$$

24. Encontrar el potencial de un cable submarino con extremos ($x = 0$ y $x = l$) conectados a tierra y distribución del voltaje inicial $U_0 = const.$
25. **(Ecuaciones de la línea de alta frecuencia)** Demostrar que en el caso de corrientes alternas de frecuencias altas las ecuaciones del problema 22 pueden aproximarse por las llamadas **ecuaciones de línea de alta frecuencia**

$$u_{xx} = LCu_{tt}, \qquad i_{xx} = LCi_{tt}.$$

Resolver la primera, suponiendo que el potencial inicial es U_0 sen $(\pi x/l)$, $u_t(x, 0) = 0$ y $u = 0$ en los extremos $x = 0$ y $x = l$ para toda t.

11.13 SOLUCIÓN POR TRANSFORMADAS DE LAPLACE

Los lectores familiarizados con el capítulo 6 quizás se pregunten si las transformadas de Laplace pueden usarse también para resolver ecuaciones diferenciales *parciales*. La respuesta es sí, en particular si una de las variables independientes varía sobre el eje positivo. Los pasos para llegar a la solución son similares a los del capítulo 6. Para una ecuación en dos variables se procede como sigue.

1. Se toma la transformada de Laplace con respecto a una de las dos variables, por lo general t. Se obtiene así una *ecuación diferencial ordinaria* para la transformada de la función desconocida. Esto es así porque las derivadas de esta función con respecto a la otra variable pasan a la ecuación transformada. Esta última también incorpora las condiciones en la frontera e iniciales dadas.
2. Al resolver la ecuación diferencial ordinaria se obtiene la transformada de la función desconocida.
3. Al tomar la transformada inversa se obtiene la solución del problema dado

Si los coeficientes de la ecuación dada no dependen de t, el uso de transformadas de Laplace simplificará el problema.

El método se explica en términos de dos ejemplos típicos.

EJEMPLO 1 Una ecuación de primer orden

Resolver el problema

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial w}{\partial x} + x\frac{\partial w}{\partial t} = 0, \qquad w(x, 0) = 0, \quad w(0, t) = t \qquad (t \geqq 0).$$

Se escribe w porque u se necesita para denotar la función escalón unitario (sección 6.3).

Solución. Se toma la transformada de Laplace de (1) *con respecto a t*. Por (1) de la sección 6.2,

(2) $$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial w}{\partial x}\right\} + x[s\mathcal{L}\{w\} - w(x, 0)] = 0.$$

Aquí $w(x, 0) = 0$. En el primer término se supone que es posible intercambiar la integración y la derivación:

(3) $$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial w}{\partial x}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial w}{\partial x}\,dt = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty e^{-st}w(x, t)\,dt = \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}\{w(x, t)\}.$$

Escribiendo $W(x, s) = \mathcal{L}\{w(x, t)\}$, por (2) se obtiene

$$\frac{\partial W}{\partial x} + xsW = 0.$$

Esta expresión puede considerarse como una ecuación diferencial *ordinaria* con x como la variable independiente, ya que en la ecuación no están presentes derivadas con respecto a s. La solución general es

$$W(x, s) = c(s)e^{-sx^2/2} \qquad \text{(Sección 1.7).}$$

Puesto que $\mathcal{L}\{t\} = 1/s^2$, por la condición $w(0, t) = t$ se obtiene $W(0, s) = 1/s^2$, es decir,

$$W(0, s) = c(s) = 1/s^2.$$

Por tanto

$$W(x, s) = \frac{1}{s^2}e^{-sx^2/2}.$$

Ahora $\mathcal{L}^{-1}\{1/s^2\} = t$, de donde por el segundo teorema de traslación (sección 6.3) con $a = x^2/2$ se obtiene

(4) $$w(x, t) = \left(t - \frac{x^2}{2}\right)u(t - \tfrac{1}{2}x^2) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < x^2/2 \\ t - \tfrac{1}{2}x^2 & \text{si } t > x^2/2. \end{cases}$$

Dado que se procedió formalmente, es necesario comprobar que (4) satisface (1). Esto se deja al estudiante. ∎

EJEMPLO 2 Cuerda semiinfinita

Encontrar el desplazamiento $w(x, t)$ de una cuerda elástica sujeta a las siguientes condiciones.

(*i*) La cuerda inicialmente está en reposo sobre el eje x de $x = 0$ a ∞ ("*cuerda semiinfinita*").

(*ii*) En el tiempo $t > 0$ el extremo izquierdo de la cuerda se mueve de una manera dada (figura 280)

$$w(0, t) = f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t & \text{si } 0 \leqq t \leqq 2\pi \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

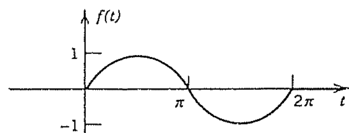


Figura 280. Movimiento del extremo izquierdo de la cuerda del ejemplo 2 como una función del tiempo t.

(*iii*) Además

$$\lim_{x\to\infty} w(x, t) = 0 \quad \text{para } t \geqq 0.$$

Desde luego, no hay cuerdas infinitas, pero el modelo planteado describe una cuerda o soga larga (de peso despreciable) con su extremo derecho fijo a gran distancia sobre el eje x. (De nueva cuenta se escribe w porque u se necesita para denotar la función escalón unitario.)

Solución. Es necesario resolver la ecuación de onda (sección 11.2)

(5) $$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad c^2 = \frac{T}{\rho},$$

para x y t positivas, sujeta a las "condiciones en la frontera"

(6) $$w(0, t) = f(t), \qquad \lim_{x\to\infty} w(x, t) = 0 \qquad (t \geqq 0)$$

con f como se dio arriba, y las condiciones iniciales

(7) $$w(x, 0) = 0,$$

(8) $$\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Se toma la transformada de Laplace *con respecto a t*. Por (2) de la sección 6.2

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right\} = s^2\mathcal{L}\{w\} - sw(x, 0) - \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = c^2\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\}.$$

Dos términos se cancelan, por (7) y (8). En el segundo miembro se supone que la integración y la derivación pueden intercambiarse:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty e^{-st}w(x, t)\,dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{L}\{w(x, t)\}.$$

Al escribir $W(x, s) = \mathcal{L}\{w(x, t)\}$ se obtiene

$$s^2W = c^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \qquad \text{por tanto} \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{s^2}{c^2}W = 0.$$

Puesto que esta ecuación contiene una sola derivada con respecto a x, puede considerarse como una ecuación diferencial ordinaria para $W(x, s)$ considerada como una función de x. Una solución general es

(9) $$W(x, s) = A(s)e^{sx/c} + B(s)e^{-sx/c}.$$

Por (6) se obtiene, escribiendo $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$,

$$W(0, s) = \mathcal{L}\{w(0, t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

y, suponiendo que el orden de integración con respecto a t y tomando el límite cuando $x \to \infty$ pueden intercambiarse,

$$\lim_{x\to\infty} W(x, s) = \lim_{x\to\infty}\int_0^\infty e^{-st}w(x, t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\lim_{x\to\infty} w(x, t)\,dt = 0.$$

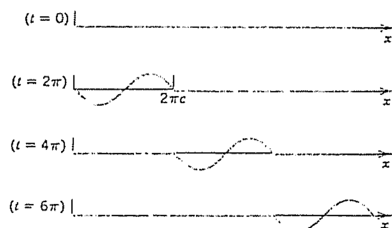


Figura 281. Onda en movimiento del ejemplo 2.

Esto implica que $A(s) = 0$ en (9) ya que $c > 0$, por lo que para toda s positiva fija la función $e^{sx/c}$ se incrementa cuando x lo hace. Obsérvese que es posible suponer que $s > 0$ ya que una transformada de Laplace por lo general existe para *toda* s mayor que alguna γ fija (sección 6.2). Se tiene por tanto

$$W(0, s) = B(s) = F(s),$$

de donde (9) queda

$$W(x, s) = F(s)e^{-sx/c}.$$

Por el segundo teorema de traslación (sección 6 3) con $a = x/c$ se obtiene la transformada inversa

$$w(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) u\left(t - \frac{x}{c}\right) \qquad \text{(Figura 281)}, \tag{10}$$

es decir,

$$w(x, t) = \operatorname{sen}\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad \text{si} \quad \frac{x}{c} < t < \frac{x}{c} + 2\pi \quad \text{o} \quad ct > x > (t - 2\pi)c$$

y cero en caso contrario. Esta es una sola onda senoidal que se desplaza hacia la derecha con una rapidez c. Obsérvese que un punto x se mantiene en reposo hasta $t = x/c$, el tiempo necesario para llegar a esa x si se empieza en $t = 0$ (inicio del movimiento del extremo izquierdo) y se desplaza con una rapidez c. El resultado concuerda con la intuición física. Puesto que se procedió formalmente, debe comprobarse que (10) satisface las condiciones dadas. Esto se deja al estudiante. ∎

Problemas de la sección 11.13

1. Trazar una figura similar a la figura 281 si $c = 1$ y f es "triangular" como en el ejemplo 1, sección 11.3, con $k = L/2 = 1$.
2. ¿De qué manera la rapidez de la onda del ejemplo 2 depende de la tensión y de la masa de la cuerda?
3. Comprobar la solución del ejemplo 2. ¿Qué onda en movimiento se obtiene en el ejemplo 2 si se impone un movimiento senoidal (que no termina) del extremo izquierdo a partir de $t = 0$?

Resolver por transformadas de Laplace:

4. $\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2x\dfrac{\partial u}{\partial t} = 2x,\ u(x, 0) = 1,\ u(0, t) = 1$
5. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = xt,\ u(x, 0) = 0$ si $x \geqq 0$. $u(0, t) = 0$ si $t \geqq 0$.
6. Resolver el problema 5 por otro método.

Encontrar la temperatura $w(x, t)$ de una barra semiinfinita con aislamiento lateral que se extiende de $x = 0$ a lo largo del eje x hasta ∞, suponiendo que la temperatura inicial es 0, $w(x, t) \to 0$ cuando $x \to \infty$ para toda $t \geqq 0$ fija y $w(0, t) = f(t)$. Proceder de la siguiente manera.

7. Establecer el modelo y demostrar que la transformada de Laplace lleva a

$$sW(x, s) = c^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \qquad W = \mathscr{L}\{w\},$$

y

$$W(x, s) = F(s)e^{-\sqrt{s}x/c}, \qquad F = \mathscr{L}\{f\}.$$

8. Aplicando el teorema de convolución en el problema 7, demostrar que

$$w(x, t) = \frac{x}{2c\sqrt{\pi}} \int_0^t f(t - \tau)\tau^{-3/2}e^{-x^2/4c^2\tau}\, d\tau.$$

9. Sea $w(0, t) = f(t) = u(t)$ (sección 6.3). Denotar las w, W y F correspondientes por w_0, W_0 y F_0. Demostrar que entonces en el problema 8,

$$w_0(x, t) = \frac{x}{2c\sqrt{\pi}} \int_0^t \tau^{-3/2}e^{-x^2/4c^2\tau}\, d\tau = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2c\sqrt{t}}\right)$$

con la función error como se definió en los problemas de la sección 11.6.

10. **(Fórmula de Duhamel**[14]**)** Demostrar que en el problema 9

$$W_0(x, s) = \frac{1}{s} e^{-\sqrt{s}x/c}$$

y por el teorema de convolución se obtiene la *fórmula de Duhamel*

$$w(x, t) = \int_0^t f(t - \tau)\frac{\partial w_0}{\partial \tau}\, d\tau.$$

11.14 SOLUCIÓN POR TRANSFORMADAS DE FOURIER

Las ecuaciones diferenciales parciales también pueden resolverse con otros métodos operacionales. En esta sección se explica lo anterior para las transformadas de Fourier. De hecho, si se cuenta con datos iniciales o en la frontera sobre el semieje positivo, entonces las transformadas cosenoidales o senoidales de Fourier (sección 10.10) pueden ser apropiadas, y si se cuenta con datos sobre el eje completo, pueden usarse transformadas de Fourier (sección 10.11). Se discuten estos métodos en términos de aplicaciones típicas.

---

[14] JEAN MARIE CONSTANT DUHAMEL (1797-1872), matemático francés.

EJEMPLO 1 Un problema de calor sobre el eje x

Encontrar la temperatura $u(x, t)$ de una barra homogénea de sección transversal constante con aislamiento lateral que se extiende de $x = -\infty$ a ∞, para el tiempo $t > 0$, suponiendo que la temperatura inicial dada es

(1) $$u(x, 0) = f(x) \qquad (-\infty < x < \infty),$$

y que para toda $t \geqq 0$ la solución y su derivada con respecto a x satisfacen

(2) $$u(x, t) \to 0, \qquad u_x(x, t) \to 0 \qquad \text{cuando } |x| \to \infty.$$

Como caso particular, encontrar $u(x, t)$ cuando

(3) $$f(x) = U_0 = const \quad \text{si } |x| < 1 \qquad \text{y} \qquad f(x) = 0 \quad \text{si } |x| > 1.$$

Solución. Tiene que resolverse la ecuación del calor

(4) $$u_t = c^2 u_{xx}$$

sujeta a las condiciones (1), (2). La estrategia es tomar la transformada de Fourier con respecto a x y después resolver la ecuación diferencial ordinaria en t resultante. Los detalles son los siguientes.

Sea que $\hat{u} = \mathcal{F}(u)$ que denota la transformada de Fourier de u, *considerada como una función de* x. Por (10) de la sección 10.11 se observa que (4) da como resultado

$$\mathcal{F}(u_t) = c^2\mathcal{F}(u_{xx}) = c^2(-w^2)\mathcal{F}(u) = -c^2w^2\hat{u}.$$

En el primer miembro, suponiendo que puede intercambiarse el orden de la diferenciación y la integración,

$$\mathcal{F}(u_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u_t e^{-iwx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} u e^{-iwx}\,dx = \frac{\partial\hat{u}}{\partial t}.$$

Por tanto,

$$\frac{\partial\hat{u}}{\partial t} = -c^2w^2\hat{u}.$$

Puesto que esta ecuación sólo incluye una derivada con respecto a t pero ninguna con respecto a w, se trata de una ecuación diferencial *ordinaria* de primer orden con t como variable independiente y con w como parámetro. Por separación de variables (sección 1.2) se obtiene la solución general

$$\hat{u}(w, t) = C(w)e^{-c^2w^2t},$$

con la "constante" arbitraria $C(w)$ dependiendo del parámetro w. La condición inicial (1) da $\hat{u}(w, 0) = C(w) = \hat{f}(w) = \mathcal{F}(f)$. El resultado intermedio es

$$\hat{u}(w, t) = \hat{f}(w)e^{-c^2w^2t}.$$

Por la fórmula de inversión (7), sección 10.11, ahora se obtiene la solución

(5) $$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{-c^2w^2t}e^{iwx}\,dw.$$

En esta expresión puede incluirse la transformada de Fourier

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{-iwv}\,dv.$$

Suponiendo que es posible invertir el orden de la integración, se obtiene

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2w^2t}e^{i(wx-wv)}\,dw\right]dv.$$

Por la fórmula de Euler (3), sección 10.11, el integrando de la integral interior es igual a

$$e^{-c^2w^2t}\cos(wx - wv) + ie^{-c^2w^2t}\operatorname{sen}(wx - wv).$$

Con esto se demuestra que su parte imaginaria es una función impar de w, por lo que la integral[15] de esta parte es 0, y la parte real es par, por lo que su integral es el doble de la integral de 0 a ∞:

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\left[\int_{0}^{\infty} e^{-c^2w^2t}\cos(wx - wv)\,dw\right]dv.$$

Este resultado concuerda con (9), sección 11.6, y lleva a las fórmulas adicionales (11) y (13) de la sección 11.6. ∎

EJEMPLO 2 Problema del ejemplo 1 resuelto por el método de convolución

Resolver el problema de calor del ejemplo 1 por el método de convolución.

Solución. Se empieza como antes y se llega a (5), es decir,

(5) $$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{-c^2w^2t}e^{iwx}\,dw.$$

Ahora se introduce la idea crucial. Esta expresión se identifica como de la forma (13) de la sección 10.11, es decir,

(6) $$u(x, t) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\hat{g}(w)e^{iwx}\,dw$$

donde

(7) $$\hat{g}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-c^2w^2t}.$$

Puesto que, por la definición de convolución [(11), sección 10.11],

(8) $$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x - p)\,dp,$$

Como siguiente y último paso debe determinarse la transformada inversa de Fourier g de $\hat{g}$. Para ello puede usarse la fórmula 9 de la tabla III de la sección 10.12 (la cual se estableció en el ejemplo 2 de la sección 10.11),

$$\mathcal{F}(e^{-ax^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-w^2/4a}$$

con una a adecuada. Con $c^2t = 1/4a$ o $a = 1/4c^2t$, al aplicar (7) se obtiene

$$\mathcal{F}(e^{-x^2/4c^2t}) = \sqrt{2c^2t}\,e^{-c^2w^2t} = \sqrt{2c^2t}\sqrt{2\pi}\,\hat{g}(w).$$

[15] En realidad, la parte principal de la integral; ver la sección 15.3.

Por tanto, $\hat{g}$ tiene la inversa

$$\frac{1}{\sqrt{2c^2t}\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/4c^2t}.$$

Al reemplazar x con $x - p$ y hacer su sustitución en (8) se obtiene finalmente

$$u(x, t) = (f * g)(x) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)\exp\left\{-\frac{(x-p)^2}{4c^2t}\right\}dp. \tag{9}$$

Esta fórmula de la solución del problema planteado concuerda con (11) de la sección 11.6. Se escribió $(f * g)(x)$, sin indicar el parámetro t con respecto al cual no se integró. ∎

EJEMPLO 3 Transformada de Fourier de seno aplicada a la ecuación del calor

Encontrar una fórmula de la solución del ejemplo 1, suponiendo que la barra se extiende de 0 a ∞, que la temperatura inicial es

$$u(x, 0) = f(x) \qquad (0 \leqq x < \infty),$$

y que en el extremo izquierdo se tiene la condición en la frontera

$$u(0, t) = 0 \qquad (t \geqq 0).$$

Solución. En lugar de la transformada de Fourier puede aplicarse ahora la transformada de Fourier de seno (sección 10.10), ya que x varía de 0 a ∞. Procediendo como en el ejemplo 1, a partir de la ecuación del calor y de (9b), sección 10.10, ya que $f(0) = u(0, 0) = 0$, se obtiene

$$\mathcal{F}_s(u_t) = \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial t} = c^2\mathcal{F}_s(u_{xx}) = -c^2w^2\mathcal{F}_s(u) = -c^2w^2\hat{u}_s(w, t).$$

La solución de esta ecuación diferencial ordinaria de primer orden es

$$\hat{u}_s(w, t) = C(w)e^{-c^2w^2t}.$$

Por la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ se tiene $\hat{u}_s(w, 0) = \hat{f}_s(w) = C(w)$. Por tanto,

$$\hat{u}_s(w, t) = \hat{f}_s(w)e^{-c^2w^2t}.$$

Tomando la transformada senoidal inversa y sustituyendo

$$\hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(p)\,\text{sen}\,wp\,dp.$$

se obtiene la fórmula de la solución buscada

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(p)\,\text{sen}\,wp\,e^{-c^2w^2t}\,\text{sen}\,wx\,dp\,dw. \tag{10}$$

∎

EJEMPLO 4 Ecuación de onda en un intervalo infinito. Solución de D'Alembert

Resolver la ecuación de onda

$$u_{tt} = c^2u_{xx} \qquad (-\infty < x < \infty, t > 0)$$

sujeta a las condiciones

$$u(x, 0) = f(x) \qquad \text{(deflexión inicial dada)}$$

$$u_t(x, 0) = 0 \qquad \text{(rapidez inicial cero)}$$

$$u \to 0, \quad u_x \to 0 \qquad \text{cuando } |x| \to \infty \text{ para toda } t,$$

donde se supone que f y g tienen transformada de Fourier.

Solución. Se hace la transformación con respecto a x, haciendo $\hat{u} = \mathcal{F}(u)$. Al aplicar (10), sección 10.11, a partir de la ecuación de onda se obtiene

$$\mathcal{F}(u_{tt}) = \hat{u}_{tt} = c^2\mathcal{F}(u_{xx}) = -c^2w^2\hat{u}.$$

Por tanto,

$$\hat{u}_{tt} + c^2w^2\hat{u} = 0.$$

Puesto que no intervienen derivadas con respecto a w, ésta es una ecuación diferencial ***ordinaria*** de segundo orden cuyo coeficiente c^2w^2 es "constante" (es decir, independiente de t). Una solución general es

$$u(w, t) = A(w)\cos cwt + B(w)\,\text{sen}\,cwt.$$

Para $t = 0$, como $\mathcal{F}\{u(x, 0)\} = u(w, 0)$, a partir de las condiciones iniciales se obtiene

$$\hat{u}(w, 0) = A(w) = \hat{f}(w)$$

$$\hat{u}_t(w, 0) = cwB(w) = 0.$$

Por tanto,

$$\hat{u}(w, t) = \hat{f}(w)\cos cwt.$$

Quiere encontrarse u. Para ello se necesita una idea. La idea es expresar el coseno en términos de funciones exponenciales para después aplicar la fórmula de traslación

$$\boxed{\mathcal{F}\{f(x-a)\} = e^{-iwa}\mathcal{F}\{f(x)\},} \tag{11}$$

la cual se sigue directamente de la definición de la transformación de Fourier haciendo $x - a = p$, $x = p + a$, $dx = dp$, de donde

$$\mathcal{F}\{f(x-a)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{-iwx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)e^{-iw(p+a)}\,dp$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-iwa}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)e^{-iwp}\,dp.$$

Por tanto,

$$\hat{f}(w)\cos cwt = \tfrac{1}{2}\hat{f}(w)[e^{icwt} + e^{-icwt}]$$

tiene la transformada inversa de Fourier

$$u(x, t) = \tfrac{1}{2}[f(x-ct) + f(x+ct)]. \tag{12}$$

Esta es la **solución de D'Alembert** (14), sección 11.4. ∎

Concluye así el capítulo 11, en el que la atención se concentró en las ecuaciones diferenciales parciales más importantes en la física y la ingeniería. Termina también la parte C sobre análisis de Fourier y ecuaciones diferenciales parciales.

Se ha visto que estas ecuaciones tienen varias aplicaciones básicas en la ingeniería. Por esta razón son tema de muchos proyectos de investigación en marcha.

Los **métodos numéricos para ecuaciones diferenciales parciales** se tratan en las secciones 20.4-20.7, que son independientes de las demás secciones de la parte E sobre métodos numéricos.

En la parte siguiente (parte D, capítulos 12-17) se pasa nuevamente a un área de naturaleza diferente, el **análisis complejo**, que también es de suma importancia para el ingeniero, como mostrarán los ejemplos y problemas presentados.

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 11

1. ¿Por cuál ley física se obtuvo la ecuación unidimensional de onda?
2. ¿Qué condiciones se tuvieron en el problema de la cuerda vibratoria?
3. ¿Qué son las eigenfunciones y sus frecuencias de la cuerda vibratoria?
4. ¿Cómo se obtuvo la solución de D'Alembert en el problema de la cuerda vibratoria?
5. ¿Por qué se discutieron las soluciones en series de Fourier de la ecuación de onda, si la solución de D'Alembert se obtuvo mucho más rápido?
6. ¿Qué forma tiene la ecuación del calor y qué condición adicional se consideró en los problemas de calor?
7. ¿Qué es el principio de superposición y a qué ecuaciones se aplican?
8. ¿Qué son las ecuaciones elíptica, parabólica e hiperbólica? Citar un ejemplo de cada una de ellas.
9. ¿Qué son las eigenfunciones de una membrana cuadrática? ¿Qué sabe el lector acerca de sus frecuencias?
10. ¿Qué son las eigenfunciones de una membrana circular? ¿De qué manera las frecuencias de estas funciones difieren en principio de las de la cuerda vibratoria?
11. En la separación de la ecuación de onda se obtuvieron únicamente funciones trigonométricas, en tanto que en la separación de la ecuación del calor se obtuvieron también funciones exponenciales. ¿Cuál fue la razón?
12. Algunas de las ecuaciones diferenciales parciales más simples pueden resolverse por métodos para ecuaciones diferenciales ordinarias. Explicar; citar ejemplos.
13. ¿Por qué aparecen las funciones de Legendre y de Bessel en este capítulo? ¿En qué parte de este libro aparecieron por primera vez estas funciones?
14. ¿Qué es la función error y con relación a qué se presentó?
15. ¿Por qué fue posible usar series de Fourier, aun cuando las funciones de interés físico no eran periódicas, en general?
16. ¿Cuántas condiciones iniciales pueden darse en el caso de la ecuación de onda? ¿En el caso de la ecuación del calor?
17. Comprobar que $u = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ y $u = \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$ son soluciones de la ecuación de Laplace.
18. Comprobar que $u = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$ y $u = 2xy/(x^2 + y^2)^2$ son soluciones de la ecuación de Laplace.
19. ¿Por qué razones se presentó la integral de Fourier en este capítulo?
20. En el capítulo 6, la ecuación subsidiaria era una ecuación *algebraica*. ¿Por qué se obtiene una ecuación *diferencial* ordinaria al resolver una ecuación diferencial parcial por un método de transformadas (un método operacional)?

Resolver:

21. $u_{yy} + 16u = 0$
22. $u_{xy} + u_y + x + y + 1 = 0$
23. $u_{xx} + u_x - 2u = 10$
24. $u_{xx} + u = 0,\ u(0, y) = f(y),\ u_x(0, y) = g(y)$
25. $u_{yy} + u_y = 0,\ u(x, 0) = f(x),\ u_y(x, 0) = g(x)$
26. Encontrar todas las soluciones $u(x, y) = F(x)G(y)$ de la ecuación de Laplace de dos variables.

Usando las transformaciones indicadas, resolver las ecuaciones siguientes.

27. $u_{xy} = u_{xx}$ $(v = y,\ z = x + y)$
28. $yu_{xy} = xu_{xx} + u_x$ $(v = y,\ z = xy)$
29. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0$ $(v = y,\ z = x + y)$
30. $u_{xx} = u_{yy}$ $(v = y + x,\ z = y - x)$
31. $u_{yy} + u_{xy} - 2u_{xx} = 0$ $(v = x + y,\ z = 2y - x)$
32. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$ $(v = x,\ z = x - y)$
33. $2u_{xx} + 5u_{xy} + 2u_{yy} = 0$ $(v = 2x - y,\ z = 2y - x)$

Encontrar el movimiento de la cuerda vibratoria de longitud π y $c^2 = T/\rho = 1$ empezando con velocidad inicial 0 y deflexión

34. $f(x) = \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$
35. $f(x) = -0.1 \operatorname{sen} 3x$
36. $f(x) = \pi/2 - |x - \pi/2|$
37. $f(x) = \operatorname{sen}^3 x$
38. $f(x) = x$ si $0 < x < \pi/3$, $f(x) = (\pi - x)/2$ si $\pi/3 < x < \pi$

Encontrar la temperatura $u(x, t)$ de una barra de longitud $L = \pi$ y $c = 1$ que está aislada perfectamente, también en los extremos $x = 0$ y $x = \pi$, si la temperatura inicial $u(x, 0) = f(x)$ es

39. $f(x) = k = const$
40. $f(x) = \operatorname{sen} x$
41. $f(x) = \cos^2 x$
42. $f(x) = 1 - x/\pi$

Encontrar la distribución de temperatura en una barra delgada de cobre ($c^2 = K/\sigma\rho = 1.158$ cm²/s) con aislamiento lateral, de 50 cm de largo y de sección transversal constante cuyos puntos extremos en $x = 0$ y $x = 50$ se mantienen a 0 °C y cuya temperatura inicial es

43. $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x/50)$
44. $f(x) = 100 \operatorname{sen}(\pi x/25)$
45. $f(x) = \operatorname{sen}^3(\pi x/10)$
46. $f(x) = x(50 - x)$
47. $f(x) = x$ si $0 < x < 25$, $f(x) = 50 - x$ si $25 < x < 50$

Recuérdese por la sección 11.5 para condiciones en la frontera adiabáticas la temperatura $u(x, t)$ en una barra de longitud L con aislamiento lateral es

$$u(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} \exp\left[-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t\right].$$

Suponiendo que $L = \pi$ y $c = 1$, encontrar a partir de esta expresión la solución que satisface la condición inicial

48. $f(x) = 30x^2$
49. $f(x) = 95 \cos 2x$
50. $f(x) = 4x$ si $0 < x < \pi/2$, $f(x) = 4(\pi - x)$ si $\pi/2 < x < \pi$
51. Suponer que las caras de la placa delgada dada por $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 \leqq y \leqq \pi$ están aisladas perfectamente, las aristas se mantienen a temperatura cero y la temperatura inicial es

$u(x, y, 0) = f(x, y)$. Aplicando el método de separación de variables a la ecuación bidimensional del calor $u_t = c^2\nabla^2 u$, demostrar que la temperatura de la placa es

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny\, e^{-c^2(m^2+n^2)t}$$

donde

$$B_{mn} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(x, y) \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny\, dx\, dy.$$

52. Encontrar la temperatura de la placa del problema 51 si $f(x, y) = x(\pi - x)y(\pi - y)$.

Demostrar que las siguientes membranas de área 1 con $c^2 = 1$ tienen las frecuencias del modo fundamental que se da (4 cifras decimales). Comparar.

53. Círculo: $\alpha_1/2\sqrt{\pi} = 0.6784$
54. Cuadrado: $1/\sqrt{2} = 0.7071$
55. Cuadrante de un círculo: $\alpha_{12}/4\sqrt{\pi} = 0.7244$ ($\alpha_{12} = 5.13562$ = primer cero positivo de J_2)
56. Semicírculo: $3.832/\sqrt{8\pi} = 0.7644$
57. Rectángulo (lados 1:2): $\sqrt{5/8} = 0.7906$
58. Encontrar la deflexión $u(x, y, t)$ de la membrana cuadrada correspondiente a $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ con $c = 1$, deflexión inicial $f(x, y) = kx(1 - x^2)y(1 - y^2)$ y velocidad inicial cero.
59. Encontrar el potencial electrostático entre dos esferas concéntricas de radios 2 cm y 10 cm mantenidas en potenciales de 110 volts y 0 volts, respectivamente.
60. Resolver $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0$ haciendo $v = y/x$, $z = y$.

Resumen del capítulo 11

Ecuaciones diferenciales parciales

En tanto que las ecuaciones diferenciales *ordinarias* (capítulos 1-6) aparecen como modelos de problemas más simples en los que interviene una sola variable independiente, los problemas que incluyen dos o más variables independientes (variables espaciales o el tiempo t y una o varias variables espaciales) llevan a ecuaciones diferenciales *parciales*. En consecuencia, difícilmente puede sobreestimarse la importancia de estas ecuaciones para el ingeniero y el físico.

Este capítulo trató principalmente de las ecuaciones diferenciales parciales más importantes de la física y la ingeniería, a saber:

(1) $u_{tt} = c^2u_{xx}$ **Ecuación unidimensional de onda** (Secciones 11.2 – 11.4)

(2) $u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy})$ **Ecuación bidimensional de onda** (Secciones 11.7 – 11.10)

(3) $u_t = c^2u_{xx}$ **Ecuación unidimensional del calor** (Secciones 11.5 – 11.6)

(4) $\nabla^2u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ **Ecuación bidimensional de Laplace** (Secciones 11.5 – 11.9)

(5) $\nabla^2u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ **Ecuación tridimensional de Laplace** (Secciones 11.11 – 11.12)

(1) y (2) son hiperbólicas, (3) es parabólica, (4) y (5) son elípticas. (Ver los problemas de la sección 11.4.)

En la práctica, el interés se centra en obtener la solución de una de estas ecuaciones en una región dada que satisface condiciones adicionales dadas, como **condiciones iniciales** (condiciones en el tiempo $t = 0$) o **condiciones en la frontera** (valores prescritos de la solución u o alguna de sus derivadas en la superficie frontera S, o en la curva frontera C, de la región) o ambas. Para (1) y (2) se prescriben dos condiciones iniciales (desplazamiento inicial y velocidad inicial). Para (3) se prescribe la distribución de temperatura inicial. Para (4) y (5) se prescribe una condición en la frontera y al problema resultante se le llama (ver la sección 11.5)

problema de Dirichlet si u se prescribe en S,
problema de Neumann si $u_n = \partial u/\partial n$ se prescribe en S,
problema mixto si u se prescribe en una parte de S y u_n se prescribe en el resto.

Un método general para resolver estos problemas es el método de **separación de variables** o **método del producto**, en el que se suponen soluciones en la forma de productos de funciones, cada una de las cuales depende de una sola variable. En consecuencia, la ecuación (1) se resuelve haciendo (sección 11.3)

$$u(x, t) = F(x)G(t);$$

se procede de manera similar para (3) en la sección 11.5. Por sustitución en la ecuación dada se obtienen ecuaciones diferenciales *ordinarias* para F y G, y a partir de éstas se obtiene una infinidad de soluciones $F = F_n$ y $G = G_n$ tales que las funciones correspondientes

$$u_n(x, t) = F_n(x)G_n(t)$$

son soluciones de las ecuaciones diferenciales parciales que satisfacen las condiciones en la frontera dadas. Estas son las **eigenfunciones** del problema y los **eigenvalores** correspondientes determinan la frecuencia de la vibración (o la rapidez del descenso de la temperatura en el caso de la ecuación del calor, etc.). Para satisfacer también la condición (o condiciones) inicial(es), deben considerarse series infinitas de las u_n, cuyos coeficientes resultan ser los coeficientes de Fourier de las funciones f y g que representan las condiciones iniciales dadas

(secciones 11.3, 11.5). Por tanto, las **series de Fourier** (y las *integrales de Fourier*) son de importancia básica aquí (secciones 11.3, 11.5, 11.6, 11.8).

Los **problemas de estado estacionario** son aquellos en los que la solución no depende del tiempo t. Para ellos, la ecuación del calor $u_t = c^2\nabla^2 u$ se reduce a la ecuación de Laplace (sección 11.5).

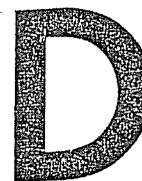
Antes de resolver un problema con valor inicial o en la frontera, con frecuencia se hace la transformación de la ecuación a coordenadas en las que la frontera de la región considerada está dada por fórmulas simples. Así, en coordenadas polares dadas por $x = r \cos \theta, y = r \operatorname{sen} \theta$, el **laplaciano** queda (sección 11.9)

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}, \tag{6}$$

y para coordenadas esféricas ver la sección 11.11. Si ahora se separan las variables, a partir de (2) y (6) (membrana circular vibratoria, sección 11.10) se obtiene la **ecuación de Bessel** y la **ecuación de Legendre** se obtiene a partir de (5) transformada a coordenadas esféricas (sección 11.12).

Los **métodos operacionales** (transformadas de Laplace, transformadas de Fourier) son útiles para resolver ecuaciones diferenciales parciales en regiones infinitas (secciones 11.13, 11.14), en particular si los coeficientes de la ecuación son constantes o dependen de una sola variable.

Parte



ANÁLISIS COMPLEJO

Capítulo 12 Números complejos. Funciones analíticas complejas
Capítulo 13 Integración compleja
Capítulo 14 Series de potencias, series de Taylor, series de Laurent
Capítulo 15 Integración por el método de residuos
Capítulo 16 Mapeo conforme
Capítulo 17 Análisis complejo aplicado a la teoría del potencial

Muchos problemas de ingeniería pueden tratarse y resolverse por medio de métodos que implican números y funciones complejos. Hablando en términos generales, estos problemas pueden subdividirse en dos grandes clases. La primera consiste en "problemas elementales", para los que basta un conocimiento de los números complejos. Por ejemplo, muchas aplicaciones relacionadas con los circuitos eléctricos o sistemas mecánicos vibrantes son de este tipo.

La segunda clase consiste en problemas más avanzados para los cuales es necesario conocer la teoría de funciones analíticas complejas (conocida con el nombre abreviado de **"teoría de funciones complejas"** o **"análisis complejo"**), así como sus métodos poderosos y elegantes. A esta clase pertenecen algunos problemas interesantes de conducción del calor, dinámica de fluidos y electrostática.

Los próximos seis puntos (del 12 al 17) se dedican al análisis complejo y sus aplicaciones. Se verá que la importancia de las funciones analíticas complejas en las matemáticas aplicadas a la ingeniería está formada por las tres raíces siguientes.

1. *Las partes real e imaginaria de una función analítica son soluciones de la ecuación de Laplace en dos variables independientes. En consecuencia, los problemas bidimensionales del potencial pueden tratarse mediante métodos desarrollados para las funciones analíticas.*

2. *Muchas integrales reales y complejas complicadas que aparecen en aplicaciones se pueden evaluar por los métodos de la integración compleja.*
3. *Casi todas las funciones de orden superior en las matemáticas aplicadas a la ingeniería son funciones analíticas, y su estudio para valores complejos de la variable independiente conduce a un conocimiento mucho más profundo y detallado de sus propiedades.*

Capítulo

12

Números complejos. Funciones analíticas complejas

Los números complejos y el plano complejo se estudian en las secciones de la 12.1 a la 12.3 El análisis complejo aborda el estudio de las funciones analíticas complejas según se define en la sección 12.4 En la sección 12.5 se explica una verificación de la analiticidad con base en las ecuaciones de Cauchy-Riemann, cuya importancia es fundamental y está relacionadas con la ecuación de Laplace. En las secciones restantes del capítulo 12 se estudian las funciones complejas elementales más importantes (función exponencial, funciones trigonométricas, etc.), que generalizan funciones reales ya conocidas del cálculo. En la sección 12.9 se estudian mapeos definidos por tales funciones. (En los capítulos 16 y 17 se extiende este análisis y se presentan aplicaciones a problemas de potencial.)

Prerrequisitos para este capítulo: Cálculo elemental.
Referencias: Apéndice 1, parte D.
Respuestas a los problemas: Apéndice 2.

12.1 NÚMEROS COMPLEJOS. EL PLANO COMPLEJO

En el estudio de las matemáticas, pronto se observó que existen ecuaciones que no se satisfacen con ningún número *real*, como $x^2 = -1$ o $x^2 - 10x + 40 = 0$, lo cual condujo a la introducción de los números complejos.[1]

[1]El primero en usar los numeros complejos para este fin fue el matemático italiano GIROLAMO CARDANO (1501-1576), quien descubrió la fórmula para resolver las ecuaciones cúbicas. La expresión «número complejo» fue introducida por el gran matemático alemán CARL FRIEDRICH GAUSS (ver nota de pie de página 11 en la sección 5.4. página 259), quien también allanó el camino para el uso general de los números complejos.

Por definición, un **número complejo** z es un par ordenado (x, y) de números reales x y y, escrito como

$$z = (x, y)$$

x se denomina **parte real** y y se denomina **parte imaginaria** de z, lo cual se denota por

$$x = \operatorname{Re} z, \qquad y = \operatorname{Im} z.$$

Por definición, dos números complejos son **iguales** si y sólo si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales.

(0, 1) se denomina **unidad imaginaria** y se denota por

$$i = (0, 1). \tag{1}$$

La **adición y multiplicación** de números complejos se define entonces de modo que el sistema de números complejos "extienda" al sistema de números reales. La **adición** de $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$ se define como[2]

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, \quad y_1 + y_2) \tag{2*}$$

y la **multiplicación** se define como

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, \quad x_1y_2 + x_2y_1). \tag{3*}$$

Entonces

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0),$$

$$(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1x_2, 0),$$

como se tiene para los números reales x_1 y x_2. Por tanto, los números complejos **extienden** a los reales, como se quería, y entonces es posible escribir

$$x = (x, 0).$$

Con base en (1) y (3*) para cualquier número real y, se tiene que

$$iy = (0, 1)(y, 0) = (0, y).$$

Como $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y)$ por (2*), se tiene entonces que

$$z = x + iy. \tag{4}$$

[2] Los estudiantes familiarizados con vectores observan que esta es la *adición vectorial*, mientras que esta multiplicación no tiene análogo en el álgebra vectorial usual

Si $x = 0$, entonces $z = iy$ y se denomina **imaginario puro**. También, con (1) y (3*) se obtiene

$$i^2 = -1 \tag{5}$$

debido a que $i^2 = ii = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$.

La notación (4) para números complejos se utiliza exclusivamente en la práctica.[3] Para la **adición** se obtiene [ver (2*)]

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \tag{2}$$

Para la **multiplicación** se obtiene la siguiente receta sencilla. Cada término se multiplica por cada término y se aplica $i^2 = -1$ cuando sea necesario [ver (3*)]

$$\begin{aligned}(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) &= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).\end{aligned} \tag{3}$$

Lo anterior concuerda con (3*).

EJEMPLO 1 Parte real, parte imaginaria, suma y producto de números complejos

Sean $z_1 = 8 + 3i$ y $z_2 = 9 - 2i$. Entonces $\operatorname{Re} z_1 = 8$, $\operatorname{Im} z_1 = 3$, $\operatorname{Re} z_2 = 9$, $\operatorname{Im} z_2 = -2$ y

$$z_1 + z_2 = (8 + 3i) + (9 - 2i) = 17 + i,$$

$$z_1z_2 = (8 + 3i)(9 - 2i) = 72 + 6 + i(-16 + 27) = 78 + 11i. \qquad \blacksquare$$

La **sustracción** y la **división** se definen como las operaciones inversas de la adición y la multiplicación. Así, la **diferencia** $z = z_1 - z_2$ es el número complejo z para el que $z_1 = z + z_2$. Así, por (2) se tiene que

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \tag{6}$$

El **cociente** $z = z_1/z_2$ $(z_2 \neq 0)$ es el número complejo z para el que $z_1 = zz_2$. Después del ejemplo se demostrará que

$$z = \frac{z_1}{z_2} = x + iy, \qquad x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \qquad y = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \tag{7*}$$

La *regla práctica* para obtener lo anterior es multiplicar el numerador y el denominador de z_1/z_2 por $x_2 - iy_2$ y simplificar:

$$z = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \tag{7}$$

[3] Los ingenieros en electrónica suelen usar j a fin de reservar el uso de i para designar la corriente.

EJEMPLO 2 Diferencia y cociente de números complejos

Para $z_1 = 8 + 3i$ y $z_2 = 9 - 2i$ se obtiene

$$z_1 - z_2 = (8 + 3i) - (9 - 2i) = -1 + 5i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{8 + 3i}{9 - 2i} = \frac{(8 + 3i)(9 + 2i)}{(9 - 2i)(9 + 2i)} = \frac{66 + 43i}{81 + 4} = \frac{66}{85} + \frac{43}{85} i.$$

Comprobar la división por multiplicación a fin de obtener $8 + 3i$. ∎

Demostración de (7).* Se tiene $z_1 = x_1 + iy_1 = zz_2 = (x_1 + iy)(x_2 + iy_2)$. Por la definición de igualdad, las partes reales e imaginarias de ambos miembros deben ser iguales:

$$x_1 = x_2 x - y_2 y$$

$$y_1 = y_2 x + x_2 y.$$

Este es un sistema lineal de dos ecuaciones en las incógnitas x y y. Bajo la hipótesis de que $z_2 \neq 0$ (por lo que $x_2^2 + y_2^2 \neq 0$), la solución única (7*) se obtiene por eliminación. ∎

Las **propiedades de la adición y de la multiplicación** son las mismas que para los números *reales*, de las cuales se concluyen (aquí, $-z = -x - iy$):

$$\left.\begin{aligned} z_1 + z_2 &= z_2 + z_1 \\ z_1 z_2 &= z_2 z_1 \end{aligned}\right\} \quad \textit{(Leyes conmutativas)}$$

$$\left.\begin{aligned} (z_1 + z_2) + z_3 &= z_1 + (z_2 + z_3) \\ (z_1 z_2) z_3 &= z_1 (z_2 z_3) \end{aligned}\right\} \quad \textit{(Leyes asociativas)}$$

(8)

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \qquad \textit{(Ley distributiva)}$$

$$0 + z = z + 0 = z$$

$$z + (-z) = (-z) + z = 0$$

$$z \cdot 1 = z$$

El plano complejo

Lo anterior fue álgebra. A continuación se presenta la geometría: la representación geométrica de los números complejos en el plano, lo que es de gran importancia práctica. La idea es bastante simple y natural: se eligen dos ejes de coordenadas perpendiculares, el eje horizontal x, denominado **eje real**, y el eje vertical y, denominado **eje imaginario**. Sobre ambos ejes se toma la misma unidad de longitud (figura 282). Lo anterior se denomina **sistema de coordenadas cartesianas**.[4] A continuación se grafica un número complejo dado $z = (x, y) = x + iy$ como el punto P de coordenadas x, y. El plano

[4] Véase la nota de pie de página 3 en la sección 8.1.

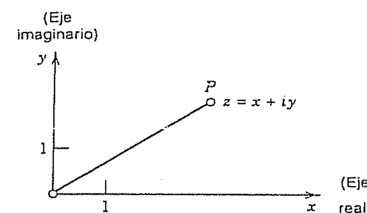


Figura 282. El plano complejo.

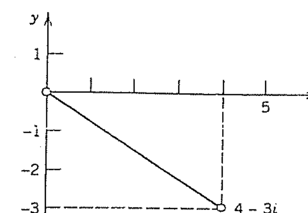


Figura 283. El número 4 - 3*i* en el plano complejo.

xy en que los números complejos se representan de esta manera se denomina **plano complejo**.[5] En la figura 283 se muestra un ejemplo.

En lugar de decir "el punto representado por z en el plano complejo", se dice breve y sencillamente "*el punto z en el plano complejo*". Con lo anterior no habrá malentendidos.

Ahora ya es posible visualizar la adición y la sustracción como se ilustra en las figuras 284 y 285.

Números complejos conjugados. El **conjugado complejo** $\bar{z}$ de un número complejo

$$z = x + iy \qquad \text{se define como} \qquad \bar{z} = x - iy$$

y se obtiene geométricamente reflejando el punto $\bar{z}$ en el eje real. En la figura 286 se ilustra lo anterior para $z = 5 + 2i$ y su conjugado $\bar{z} = 5 - 2i$.

Los conjugados son de utilidad porque $z\bar{z} = x^2 + y^2$ es real, una propiedad ya aplicada en la división anterior (para z_2 en vez de z). Además, la adición y la sustrac-

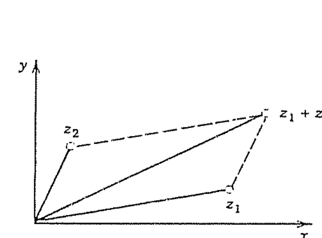


Figura 284. Adición de números complejos.

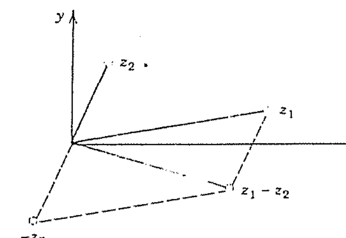


Figura 285. Sustracción de números complejos.

[5] Algunas veces se denomina **diagrama de Argand**, en honor del matemático francés JEAN ROBERT ARGAND (1768-1822), nacido en Ginebra y que posteriormente se convirtió en bibliotecario en París. Su publicación sobre el plano complejo apareció en 1806, nueve años después de una memoria semejante del académico noruego CASPAR WESSEL (1745-1818), quien fue investigador de la Academia Danesa de Ciencias.

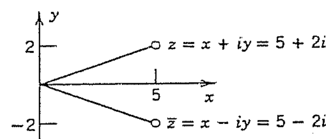


Figura 286. Números complejos conjugados.

ción conducen a $z + \bar{z} = 2x$, $z - \bar{z} = 2iy$, de modo que es posible expresar la parte real y la parte imaginaria de z mediante las fórmulas importantes

(9) $$\operatorname{Re} z = x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \qquad \operatorname{Im} z = y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Si z es real, $z = x$, entonces $\bar{z} = z$ por (9) y recíprocamente.

Trabajar con conjugados es sencillo, ya que se tiene

(10) $$\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \qquad \overline{(z_1 - z_2)} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2,$$
$$\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

EJEMPLO 3 Ilustración de (9) y (10)

Sean $z_1 = 4 + 3i$ y $z_2 = 2 + 5i$. Entonces por (1)

$$\operatorname{Im} z_1 = \frac{1}{2i}[(4 + 3i) - (4 - 3i)] = \frac{3i + 3i}{2i} = 3.$$

También, la fórmula de la multiplicación en (10) se comprueba como

$$\overline{(z_1 z_2)} = \overline{(4 + 3i)(2 + 5i)} = \overline{-7 + 26i} = -7 - 26i,$$
$$\bar{z}_1 \bar{z}_2 = (4 - 3i)(2 - 5i) = -7 - 26i.$$

Problemas de la sección 12.1

1. (Potencias de la unidad imaginaria) Demostrar que

(11) $$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \cdots$$
$$\frac{1}{i} = -i, \quad \frac{1}{i^2} = -1, \quad \frac{1}{i^3} = i, \cdots,$$

Sean $z_1 = 4 - 5i$ y $z_2 = 2 + 3i$. Encontrar (en la forma $x + iy$)

2. $z_1 z_2$
3. $(z_1 + z_2)^2$
4. $1/z_2$
5. z_2/z_1
6. $3z_1 - 6z_2$
7. $0.2z_1^{\,3}$
8. $z_1/(z_1 + z_2)$
9. $338/z_2^{\,2}$

Encontrar

10. $\operatorname{Re} \dfrac{1}{1 + i}$
11. $\operatorname{Im} \dfrac{3 + 4i}{7 - i}$
12. $\operatorname{Re} \dfrac{(2 - 3i)^2}{2 + 3i}$
13. $\operatorname{Im} \dfrac{z}{\bar{z}}$
14. $(0.3 + 0.4i)^4$
15. $\operatorname{Re} z^2$, $(\operatorname{Re} z)^2$
16. $\operatorname{Im} z^3$, $(\operatorname{Im} z)^3$
17. $(1 + i)^8$
18. Demostrar que z es imaginario puro si y sólo si $\bar{z} = -z$.
19. Comprobar las fórmulas en (10) para $z_1 = 31 - 34i$ y $z_2 = 2 - 5i$.
20. Si el producto de dos números complejos es cero, demostrar que por lo menos uno de los factores debe ser cero.

12.2 FORMA POLAR DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS. POTENCIAS Y RAÍCES

La utilidad del plano complejo puede incrementarse sustancialmente, obteniéndose así un conocimiento más detallado y profundo de la naturaleza de los números complejos, si además de usar las coordenadas xy también se usan las coordenadas polares r, θ usuales definidas como

(1) $$x = r\cos\theta, \qquad y = r \operatorname{sen}\theta.$$

Entonces, $z = x + iy$ asume la denominada **forma polar**

(2) $$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta).$$

r se denomina **valor absoluto o módulo** de z y se denota por $|z|$. Así,

(3) $$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Geométricamente, $|z|$ es la distancia del punto z al origen (figura 287). De manera semejante, $|z_1 - z_2|$ es la distancia entre z_1 y z_2 (figura 288).

θ se denomina **argumento** de z y se denota por arg z. Entonces (figura 289),

(4) $$\theta = \arg z = \arctan\frac{y}{x} \qquad (z \neq 0)$$

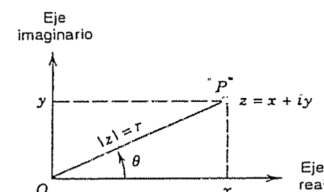


Figura 287. Plano complejo, forma polar de un número complejo.

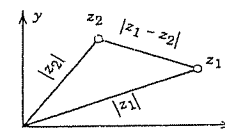


Figura 288. Distancia entre dos puntos en el plano complejo.

Geométricamente, θ es el ángulo dirigido desde el eje x positivo hacia OP en la figura 287. Aquí, como en cálculo, *todos los ángulos se miden en radianes y son positivos si se describen en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj.*

Para $z = 0$, el ángulo θ no está definido (¿por qué?). Para $z \neq 0$ dado, está determinado sólo hasta múltiplos enteros de 2π. El valor de θ que está en el intervalo $-\pi < \theta \leqq \pi$ se denomina **valor principal** del argumento de z ($\neq 0$) y se denota por Arg z. Así, por definición $\theta = \text{Arg } z$ satisface

$$-\pi < \text{Arg } z \leqq \pi$$

EJEMPLO 1 Forma polar de los números complejos. Valor principal

Sea $z = 1 + i$ (figura 289). Entonces

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right), \qquad |z| = \sqrt{2}, \qquad \arg z = \frac{\pi}{4} \pm 2n\pi \qquad (n = 0, 1, \cdots).$$

El valor principal del argumento es Arg $z = \pi/4$. Otros valores son $-7\pi/4$, $9\pi/4$, etc. ∎

EJEMPLO 2 Forma polar de los números complejos. Valor principal

Sea $z = 3 + 3\sqrt{3}\, i$. Entonces $z = 6\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)$, el valor absoluto de z es $|z| = 6$ y el valor principal de arg z es Arg $z = \pi/3$. ∎

¡Precaución! Al aplicar (4) es necesario fijarse en el cuadrante en que está z porque el periodo de tan θ es π, para que los argumentos de z y de $-z$ tengan la misma tangente. *Ejemplo*: para $\theta_1 = \arg(1 + i)$ y $\theta_2 = \arg(-1 - i)$ se tiene tan θ_1 = tan $\theta_2 = 1$.

Desigualdad del triángulo

Para dos números complejos cualesquiera se tiene la importante **desigualdad del triángulo**

$$(5) \qquad |z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2| \qquad \text{(Figura 290)}$$

que se usará con bastante frecuencia. Esta desigualdad se concluye al observar que los tres puntos 0, z_1 y $z_1 + z_2$ son los vértices de un triángulo (figura 290) de lados $|z_1|$, $|z_2|$ y $|z_1 + z_2|$, y que ninguno puede ser mayor que la suma de los otros dos lados. En el problema 39 se pide al lector demostrar formalmente lo anterior.

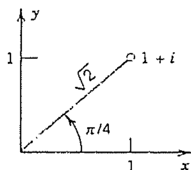


Figura 289. Ejemplo 1.

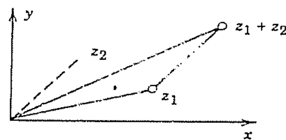


Figura 290. Desigualdad del triángulo[6].

[6] El triángulo degenera si z_1 y z_2 están sobre la misma recta que pasa por el origen.

EJEMPLO 3 Desigualdad del triángulo

Si $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = -2 + 3i$, entonces (¡trazar la figura!) ∎

$$|z_1 + z_2| = |-1 + 4i| = \sqrt{17} = 4.123 < \sqrt{2} + \sqrt{13} = 5.020.$$

Desigualdad del triángulo generalizada. Por inducción, a partir de (5) se obtiene que para cualquier suma

$$(6) \qquad |z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|;$$

es decir, *el valor absoluto de una suma no puede ser mayor que la suma de los valores absolutos de los sumandos.*

Multiplicación y división en forma polar

A continuación será posible adquirir un conocimiento más profundo y detallado de la multiplicación y división de números complejos.

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) \qquad \text{y} \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2).$$

Multiplicación. Por (3), sección 12.1, en principio el producto es

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2)].$$

Las reglas de la adición para el seno y el coseno [(6) en el apéndice 3.1] ahora conducen a

$$(7) \qquad z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)].$$

Al tomar valores absolutos y argumentos en ambos miembros de (7) se obtienen las reglas importantes

$$(8) \qquad |z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

y

$$(9) \qquad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \qquad \text{(hasta múltiplos de } 2\pi).$$

División. El cociente $z = z_1/z_2$ es el número z que satisface $zz_2 = z_1$. Por tanto, $|zz_2| = |z||z_2| = |z_1|$, $\arg(zz_2) = \arg z + \arg z_2 = \arg z_1$. Lo anterior conduce a

$$(10) \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad (z_2 \neq 0)$$

y

$$(11) \qquad \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 \qquad \text{(hasta múltiplos de } 2\pi).$$

Al combinar las fórmulas (10) y (11) también se obtiene que

(12) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)].$$

EJEMPLO 4 Ilustración de las fórmulas (8)-(11)

Sean $z_1 = -2 + 2i$ y $z_2 = 3i$. Entonces $z_1z_2 = -6 - 6i$, $z_1/z_2 = 2/3 + (2/3)i$. Por tanto,

$$|z_1 z_2| = 6\sqrt{2} = 3\sqrt{8} = |z_1||z_2|, \qquad |z_1/z_2| = 2\sqrt{2}/3 = |z_1|/|z_2|,$$

y para los argumentos se obtiene $\operatorname{Arg} z_1 = 3\pi/4$, $\operatorname{Arg} z_2 = \pi/2$.

$$\operatorname{Arg} z_1 z_2 = -\frac{3\pi}{4} = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 - 2\pi,$$

$$\operatorname{Arg}(z_1/z_2) = \frac{\pi}{4} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

Potencias enteras de z. Por (7) y (12) se tiene

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta),$$
$$z^{-2} = r^{-2}[\cos(-2\theta) + i \operatorname{sen}(-2\theta)]$$

y, más generalmente, para cualquier entero n,

(13) $$z^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta).$$

EJEMPLO 5 Fórmula de De Moivre

Para $|z| = r = 1$, la fórmula (13) conduce a la **fórmula de De Moivre**[7]

(13*) $$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta.$$

Esta fórmula es de utilidad para expresar $\cos n\theta$ y $\operatorname{sen} n\theta$ en términos de $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$. Por ejemplo, si $n = 2$ y se consideran las partes real e imaginaria de ambos miembros de (13*), se obtienen las fórmulas conocidas

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta, \qquad \operatorname{sen} 2\theta = 2\cos\theta \operatorname{sen}\theta.$$

Lo anterior muestra que los métodos *complejos* a menudo simplifican la obtención de fórmulas *reales*.

Raíces

Si $z = w^n$ ($n = 1, 2, \ldots$), entonces a cada valor de w corresponde un valor de z. De inmediato se verá que, recíprocamente, a un valor dado de $z \neq 0$ corresponden preci-

[7] ABRAHAM DE MOIVRE (1667-1754), matemático francés, introdujo las cantidades imaginarias en trigonometría y contribuyó a la teoría de la probabilidad (véase la sección 23.7).

samente n distintos valores de w. Cada uno de estos valores se denomina **raíz n-ésima** de z y se escribe

(14) $$w = \sqrt[n]{z}.$$

Entonces, este símbolo tiene *múltiples valores*; a saber, n valores, en contraste con los convencionalismos usuales adoptados en cálculo *real*. Los n valores de $\sqrt[n]{z}$ pueden obtenerse fácilmente como sigue. En términos de las formas polares de z y

$$w = R(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi),$$

la ecuación $w^n = z$ se vuelve

$$w^n = R^n(\cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi) = z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta).$$

Igualando los valores absolutos de ambos miembros se obtiene

$$R^n = r, \qquad \text{así} \qquad R = \sqrt[n]{r}$$

en donde la raíz es real y positiva, por lo que está determinada de manera única. Al igualar los argumentos se obtiene

$$n\phi = \theta + 2k\pi, \qquad \text{así} \qquad \phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

en donde k es un entero. Para $k = 0, 1, \ldots, n-1$ se obtienen n *distintos* valores de w. Con enteros adicionales de k se obtienen valores ya obtenidos. Por ejemplo, con $k = n$ se obtiene $2k\pi/n = 2\pi$, por tanto la w correspondiente a $k = 0$, etc. En consecuencia, $\sqrt[n]{z}$, para $z \neq 0$, tiene los n valores distintos

(15) $$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

en donde $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Estos n valores están en una circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$ con centro en el origen, y constituyen los vértices de un polígono regular de n lados.

El valor de $\sqrt[n]{z}$ que se obtiene tomando el valor principal de $\arg z$ y $k = 0$ en (15) se denomina **valor principal** de $w = \sqrt[n]{z}$.

EJEMPLO 6 Raíz cuadrada

A partir de (15) se concluye que $w = \sqrt{z}$ tiene los dos valores

(16a) $$w_1 = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)$$

y

(16b) $$w_2 = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)\right] = -w_1$$

que son simétricos con respecto al origen. Por ejemplo, la raíz cuadrada de $4i$ tiene los valores

$$\sqrt{4i} = \pm 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \pm(\sqrt{2} + i\sqrt{2}).$$

Con base en (16) es posible obtener la fórmula mucho más práctica

$$\sqrt{z} = \pm \left[\sqrt{\tfrac{1}{2}(|z| + x)} + (\text{sign } y) i \sqrt{\tfrac{1}{2}(|z| - x)}\right] \tag{17}$$

en donde sign $y = 1$ si $y \geqq 0$, sign $y = -1$ si $y < 0$, y todas las raíces cuadradas de números positivos se consideran con el signo positivo. Lo anterior se concluye a partir de (16) si se aplican las identidades trigonométricas

$$\cos \tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + \cos \theta)}, \qquad \text{sen } \tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos \theta)},$$

se multiplican por $\sqrt{r}$,

$$\sqrt{r} \cos \tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\tfrac{1}{2}(r + r\cos \theta)}, \qquad \sqrt{r}\, \text{sen } \tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\tfrac{1}{2}(r - r\cos \theta)},$$

se usa $r \cos \theta = x$, y finalmente el signo de Im $\sqrt{z}$ se elige de modo que sign [(Re $\sqrt{z}$)(Im $\sqrt{z}$) = sign y (¿por qué?). ∎

EJEMPLO 7 Ecuación cuadrática compleja

Resolver $z^2 - (5 + i)z + 8 + i = 0$.

Solución.

$$z = \tfrac{1}{2}(5 + i) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(5 + i)^2 - 8 - i} = \tfrac{1}{2}(5 + i) \pm \sqrt{-2 + \tfrac{3}{2}i}$$

$$= \tfrac{1}{2}(5 + i) \pm \left[\sqrt{\tfrac{1}{2}(\tfrac{5}{2} + (-2))} + i\sqrt{\tfrac{1}{2}(\tfrac{5}{2} - (-2))}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}(5 + i) \pm [\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}i] = \begin{cases} 3 + 2i \\ 2 - i. \end{cases}$$ ∎

La circunferencia de radio 1 y centro en 0 (que aparece en el siguiente ejemplo y más tarde) se denomina **circunferencia unitaria**.

EJEMPLO 8 Raíz n–ésima de la unidad. Circunferencia unitaria

Resolver la ecuación $z^n = 1$.
Solución. A partir de (15) se obtiene

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \,\text{sen}\, \frac{2k\pi}{n}, \qquad k = 0, 1, \cdots, n - 1. \tag{18}$$

Si ω denota el valor correspondiente a $k = 1$, entonces los n valores de $\sqrt[n]{1}$ pueden escribirse como $1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}$. Estos valores son los vértices de un polígono regular de n lados inscrito en la **circunferencia unitaria** (circunferencia de radio 1 con centro en 0), con uno de sus vértices en el punto 1. Cada uno de estos n valores se denomina **raíz n-ésima de la unidad**. Por ejemplo, $\sqrt[3]{1} = 1, -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ (figura 291) y $\sqrt[4]{1} = 1, i, -1, -i$ (figura 292). En la figura 293 se muestra $\sqrt[5]{1}$.

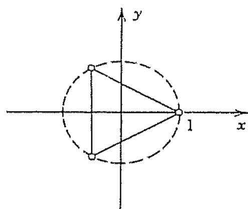


Figura 291. $\sqrt[3]{1}$.

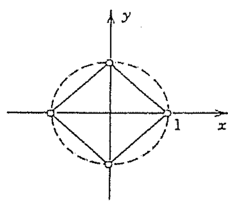


Figura 292. $\sqrt[4]{1}$.

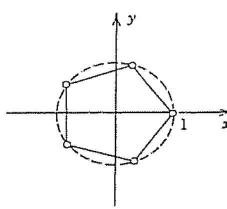


Figura 293. $\sqrt[5]{1}$.

Si w_1 es cualquier raíz n-ésima de un número complejo *arbitrario* z, entonces los n valores de $\sqrt[n]{z}$ son

$$w_1, \quad w_1\omega, \quad w_1\omega^2, \quad \cdots, \quad w_1\omega^{n-1}$$

ya que multiplicar w_1 por ω^k corresponde a incrementar el argumento de w_1 por $2k\pi/n$. ∎

El estudiante debe resolver con cuidado especial los problemas relacionados con la representación polar, ya que esta representación será necesaria muy a menudo a lo largo del libro.

Problemas de la sección 12.2

1. **(Multiplicación por i)** Demostrar que la multiplicación de un número complejo por i corresponde a una **rotación en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj** del vector correspondiente a través del ángulo $\pi/2$.

Encontrar

2. $|-0.2i|$ 3. $|1.5 + 2i|$ 4. $|z|^4, |z^4|$ 5. $|\cos \theta + i \,\text{sen}\, \theta|$

6. $\left|\dfrac{\bar{z}}{z}\right|$ 7. $\left|\dfrac{5 + 7i}{7 - 5i}\right|$ 8. $\left|\dfrac{z + 1}{z - 1}\right|$ 9. $\left|\dfrac{(1 + i)^6}{i^3(1 + 4i)^2}\right|$

Representar en forma polar:

10. $2i, -2i$ 11. $1 + i$ 12. -3 13. $6 + 8i$

14. $\dfrac{1 + i}{1 - i}$ 15. $\dfrac{i\sqrt{2}}{4 + 4i}$ 16. $\dfrac{3\sqrt{2} + 2i}{-\sqrt{2} - 2i/3}$ 17. $\dfrac{2 + 3i}{5 + 4i}$

Determinar el valor principal de los argumentos de

18. $-6 - 6i$ 19. $-10 - i$ 20. $-\pi$ 21. $2 + 2i$

Representar en la forma $x + iy$:

22. $4(\cos \frac{1}{3}\pi + i \,\text{sen}\, \frac{1}{3}\pi)$ 23. $2\sqrt{2}(\cos \frac{3}{4}\pi + i \,\text{sen}\, \frac{3}{4}\pi)$
24. $10(\cos 0.4 + i \,\text{sen}\, 0.4)$ 25. $\cos(-1.8) + i \,\text{sen}(-1.8)$

Encontrar todos los valores de las siguientes raíces y graficarlos en el plano complejo.

26. $\sqrt{i}$ 27. $\sqrt{-8i}$ 28. $\sqrt{-7 - 24i}$ 29. $\sqrt[8]{1}$
30. $\sqrt[4]{-7 + 24i}$ 31. $\sqrt[4]{-1}$ 32. $\sqrt[5]{-1}$ 33. $\sqrt[3]{1 + i}$

Resolver las ecuaciones:

34. $z^2 + z + 1 - i = 0$ 35. $z^2 - (5 + i)z + 8 + i = 0$
36. $z^4 - 3(1 + 2i)z^2 - 8 + 6i = 0$
37. Demostrar las siguientes desigualdades útiles, que serán requeridas ocasionalmente:

$$|\text{Re } z| \leqq |z|, \qquad |\text{Im } z| \leqq |z|. \tag{19}$$

38. Comprobar la desigualdad del triángulo para $z_1 = 4 + 5i$, $z_2 = -2 + 1.5i$.
39. Demostrar la desigualdad del triángulo.
40. **(Igualdad de paralelogramo)** Demostrar que $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$. Esta expresión se denomina *igualdad del paralelogramo*. ¿Puede el lector darse cuenta por qué?

12.3 CURVAS Y REGIONES EN EL PLANO COMPLEJO

En esta sección se considerarán algunas curvas y regiones importantes, así como algunos conceptos relacionados con éstas, que serán usados con frecuencia. Lo anterior también será de ayuda para familiarizarse aún más con el plano complejo.

Circunferencias y discos. La distancia entre dos puntos z y a es $|z - a|$. Por tanto, una circunferencia C de radio ρ y centro en a (figura 294) puede definirse como

$$(1) \qquad |z - a| = \rho.$$

En particular, la **circunferencia unitaria**; es decir, la circunferencia de radio 1 y centro en el origen $a = 0$, es

$$|z| = 1 \qquad \text{(Figura 295).}$$

Además, la desigualdad

$$(2) \qquad |z - a| < \rho$$

se cumple para todo punto z dentro de C; es decir, (2) representa el interior de C. esta región se denomina **disco circular** o, más precisamente, disco circular *abierto*, en contraste con el disco circular *cerrado*.

$$|z - a| \leqq \rho,$$

el cual consta del interior de C y la propia C. El disco circular abierto (2) se denomina también **vecindad** del punto a. Resulta evidente que a tiene una infinidad de tales

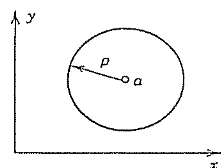


Figura 294. Circunferencia en el plano complejo.

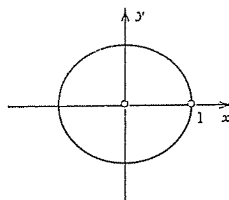


Figura 295. Circunferencia unitaria.

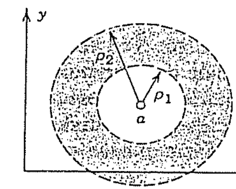


Figura 296. Corona en el plano complejo.

vecindades, cada una de las cuales corresponde a un cierto valor de ρ (> 0), y a es un punto de cada una de tales vecindades.[8]

De manera semejante, la desigualdad

$$|z - a| > \rho$$

representa el exterior del círculo C. Además, la región entre dos círculos concéntricos de radios ρ_1 y ρ_2 ($> \rho_1$) puede definirse como

$$(3) \qquad \rho_1 < |z - a| < \rho_2,$$

en donde a es el centro de los círculos. Tal región se denomina *anillo circular abierto* o **corona** *abierta* (figura 296).

EJEMPLO 1 Disco circular

Determinar la región en el plano complejo definida por $|z - 3 + i| \leqq 4$.

Solución. La desigualdad es válida precisamente para todos los z cuya distancia a $a = 3 - i$ no es mayor que 4. Por tanto, se trata de un disco circular cerrado de radio 4 con centro en $3 - i$. ∎

EJEMPLO 2 Círculo unitario y disco unitario

Determinar cada una de las siguientes regiones.

(a) $|z| < 1$. (b) $|z| \leqq 1$, (c) $|z| > 1$.

Solución.

(a) El interior del circulo unitario. A éste se le conoce como **disco unitario abierto**
(b) El circulo unitario y su interior. A éste se le conoce como **disco unitario cerrado**.
(c) El exterior del circulo unitario.

Semiplanos. Por **semiplano** *superior* (abierto) se entiende el conjunto de todos los puntos $z = x + iy$ tales que $y > 0$. De manera semejante, la condición $y < 0$ define el *semiplano inferior*, $x > 0$ define el *semiplano derecho* y $x < 0$ define el *semiplano izquierdo*.

[8] En términos más generales, cualquier conjunto que contiene un disco abierto (2) también se denomina *vecindad de a*. Para distinguir, un disco (2) suele denominarse *vecindad circular abierta de a*

Conceptos relacionados con conjuntos en el plano complejo

Por último, a continuación se enumeran brevemente algunos conceptos de interés general que serán usados ulteriormente; aquí se plantean para referencias según sean necesarios.

El término **conjunto de puntos** en el plano complejo significa cualquier colección finita o infinita de tales puntos. Por ejemplo, las soluciones de una ecuación cuadrática, los puntos de una recta y los puntos en el interior de un círculo son conjuntos de puntos.

Un conjunto S se denomina **abierto** si cualquier punto de S tiene una vecindad que consta completamente de puntos que pertenecen a S. Por ejemplo, los puntos en el interior de un círculo o de un cuadrado constituyen un conjunto abierto, así como los puntos a la derecha del semiplano $\text{Re } z = x > 0$.

Se dice que un conjunto abierto S es **conexo** si dos puntos cualesquiera de S pueden unirse mediante una línea quebrada constituida por un número finito de segmentos de recta completamente contenidos en S. Un conjunto conexo abierto se denomina **dominio**. Así, un disco abierto (2) y una corona abierta (3) son dominios. Un cuadrado abierto sin una diagonal no es un dominio, ya que este conjunto no es conexo (¿por qué?).

El **complemento** de un conjunto S en el plano complejo es el conjunto de todos los puntos del plano complejo que *no* pertenecen a S. Un conjunto S se denomina **cerrado** si su complemento es abierto. Por ejemplo, los puntos sobre y en el interior del círculo unitario constituyen un conjunto cerrado ("disco unitario cerrado"; ver el ejemplo 2), ya que su complemento $|z| > 1$ es abierto.

Un **punto frontera** de un conjunto S es aquél para el que toda vecindad contiene puntos que pertenecen a S y puntos que *no* pertenecen a S. Por ejemplo, los puntos frontera de una corona son los puntos sobre los dos círculos frontera. Resulta evidente que si un conjunto S es abierto, entonces ningún punto frontera le pertenece; si S es cerrado, entonces todos sus puntos frontera le pertenecen.

Una **región** es un conjunto que consta de un dominio más, quizá, algunos o todos sus puntos frontera. (Se advierte al lector que algunos autores utilizan el término "región" para denotar lo que aquí se entiende por dominio [según la terminología moderna], y otros no hacen ninguna distinción entre los dos términos.)

Hasta el momento se han mencionado únicamente los números complejos y el plano complejo (exactamente como al inicio del estudio del cálculo se hablaba de los números reales y de la recta real). En la siguiente sección se iniciará el estudio del cálculo complejo.

Problemas de la sección 12.3

Determinar y graficar los conjuntos representados por

1. $|z - 4i| = 4$
2. $|z + 1| > 2$
3. $1/3 < |z - a| < 6$
4. $-\pi < \text{Im } z \leqq \pi$
5. $0 < \text{Re } z < \pi/2$
6. $\text{Re } z \geqq -1$
7. $|z - 1| \leqq |z + 1|$
8. $|\arg z| \leqq \pi/4$
9. $\text{Im } z^2 = 2$
10. $\left|\dfrac{z + i}{z - i}\right| = 1$
11. $\left|\dfrac{z + 1}{z - 1}\right| = 4$
12. $\left|\dfrac{2z - i}{-iz - 2}\right|^2 \leqq 1$

12.4 LÍMITE. DERIVADA. FUNCIÓN ANALÍTICA

El análisis complejo estudia las funciones complejas que son diferenciables en algún dominio. Por tanto, primero es necesario establecer qué se entiende por función compleja y luego definir los conceptos de límite y derivada en los complejos. Este análisis es semejante al que se efectuó en cálculo.

Función compleja

Recuérdese por cálculo que una función *real* f definida sobre un conjunto S de números reales (casi siempre un intervalo) es una regla de correspondencia que asigna a todo x en S un número real $f(x)$, denominado *valor* de f en x.

Ahora, en los complejos, S es un conjunto de números *complejos*, y una **función** f definida sobre S es una regla que asigna a cada z en S un número complejo w, denominado *valor* de f en z. Se escribe

$$w = f(z).$$

Aquí, z varía en S y se denomina **variable compleja**. El conjunto S se denomina **dominio** *de definición*[9] *de f*.

Ejemplo: $w = f(z) = z^2 + 3z$ es una función compleja definida para todo z; es decir, su dominio S es todo el plano complejo.

El conjunto de todos los valores de una función f se denomina **rango** de f.

w es complejo y se escribe $w = u + iv$, en donde u y v son las partes real e imaginaria, respectivamente. Así, w depende de $z = x + iy$. Por tanto, u se vuelve una función real de x y y, así como lo hace v. Por tanto, es posible escribir

$$\boxed{w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y).}$$

Lo anterior muestra que una función *compleja* $f(z)$ es equivalente a un par de funciones *reales* $u(x, y)$ y $v(x, y)$, cada una de las cuales depende de las dos variables reales x y y.

[9] Este es un término estándar. En la mayor parte de los casos, un dominio de definición es un conjunto abierto y conexo (un *dominio* según se definió en la sección 12.3); en las aplicaciones es raro que ocurran excepciones.

En la bibliografía sobre análisis complejo algunas veces se usan relaciones tales que a un valor de z puede corresponder más de un valor de w, y esta relación suele denominarse función (una «función con valores múltiples» o multiforme). En este libro no se adopta tal convencionalismo, sino que se supone que todas las funciones que se encuentran son relaciones ***con un solo valor***; es decir, funciones en el sentido usual: a cada z en S corresponde *un* solo valor $w = f(z)$. (Aunque, por supuesto, varios z pueden corresponder al mismo valor $w = f(z)$, así como en cálculo.)

Hablando estrictamente, $f(z)$ denota el valor de f en z, pero es un abuso acertado del lenguaje hablar sobre *la función* $f(z)$ (en lugar de *la función* f), exhibiendo así la notación utilizada para la variable independiente.

EJEMPLO 1 Función de una variable compleja

Sea $w = f(z) = z^2 + 3z$. Encontrar u y v y calcular el valor de f en $z = 1 + 3i$.

Solución. $u = \operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + 3x$ y $v = 2xy + 3y$. También,

$$f(1 + 3i) = (1 + 3i)^2 + 3(1 + 3i) = 1 - 9 + 6i + 3 + 9i = -5 + 15i.$$

Lo anterior muestra que $u(1, 3) = -5$ y $v(1, 3) = 15$.

EJEMPLO 2 Función de una variable compleja

Sea $w = f(z) = 2iz + 6\bar{z}$. Encontrar u y v y calcular el valor de f en $z = \frac{1}{2} + 4i$

Solución. Con $f(z) = 2i(x + iy) + 6(x - iy)$ se obtiene $u(x, y) = 6x - 2y$ y $v(x, y) = 2x - 6y$. También,

$$f(\tfrac{1}{2} + 4i) = 2i(\tfrac{1}{2} + 4i) + 6(\tfrac{1}{2} - 4i) = i - 8 + 3 - 24i = -5 - 23i.$$

Límite, continuidad

Se dice que l es el **límite** de una función $f(z)$ cuando z tiende al punto z_0, lo que se escribe

(1) $$\lim_{z \to z_0} f(z) = l,$$

si f está definida en una vecindad de z_0 (excepto quizá en z_0 mismo) y si los valores de f están "próximos" a l para todo z "próximo" a z_0; es decir, en términos precisos, para todo ϵ real positivo es posible encontrar un δ real positivo tal que para todo $z \neq z_0$ en el disco $|z - z_0| < \delta$ (figura 297) se tiene

(2) $$|f(z) - l| < \epsilon;$$

es decir, para todo $z \neq z_0$ en tal disco con radio δ, se tiene que el valor de f pertenece al disco (2).

Formalmente esta definición es semejante a la proporcionada en cálculo, aunque hay una gran diferencia. Mientras que en el caso real x puede tender a un x_0 sólo a lo largo de la recta real, aquí, por definición, z puede tender a z_0 ***desde cualquier dirección*** en el plano complejo. Este hecho será esencial en lo que sigue.

Si existe un límite, entonces es único. (Ver el problema 28.)

Se dice que una función $f(z)$ es **continua** en $z = z_0$ si $f(z_0)$ está definida y

(3) $$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

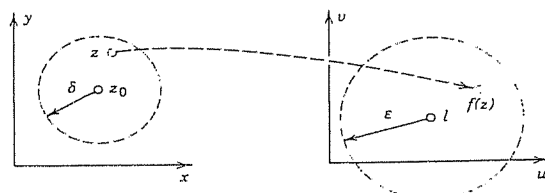


Figura 297. Límite.

Observe que por la definición de límite se implica que $f(z)$ está definida en alguna vecindad de z_0.

Se dice que $f(z)$ es *continua en un dominio* si es continua en cada uno de los puntos de este dominio.

Derivada

La **derivada** de una función compleja f en un punto z_0 se denota por $f'(z_0)$ y se define como

(4) $$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

en el supuesto de que este límite existe. Así, se dice entonces que f es **diferenciable** en z_0. Si se escribe $\Delta z = z - z_0$, entonces también se tiene que, como $z = z_0 + \Delta z$,

(4') $$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

A continuación se abordará una cuestión importante. Recuérdese que, por la definición del límite, $f(z)$ está definida en alguna vecindad de z_0 y z en (4') puede aproximarse a z_0 desde cualquier dirección en el plano complejo. Por tanto, diferenciabilidad en z_0 significa que, a lo largo de cualquier trayectoria por la cual z tienda a z_0, el cociente en (4') siempre tiende a un cierto valor, y todos estos valores son iguales. Este hecho es importante y debe tenerse presente.

EJEMPLO 3 Diferenciabilidad. Derivada

La función $f(z) = z^2$ es diferenciable para todo z y su derivada es $f'(z) = 2z$ porque

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z.$$

Las reglas de diferenciación son las mismas que en cálculo real, ya que sus demostraciones son literalmente iguales. Entonces,

$$(cf)' = cf', \quad (f + g)' = f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

y también se cumplen la regla de la cadena y la regla de las potencias $(z^n)' = nz^{n-1}$ (n entero).

También, si $f(z)$ es diferenciable en z_0, entonces es continua en z_0. (Ver el problema 30.)

EJEMPLO 4 $\bar{z}$ no diferenciable

Es importante observar que existen muchas funciones simples que no tienen derivada en ningún punto. Por ejemplo, $f(z) = \bar{z} = x - iy$ es una de estas funciones. De hecho, si se escribe $\Delta z = \Delta x - i\,\Delta y$, se tiene

$$(5)\qquad \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\overline{(z+\Delta z)} - \bar{z}}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i\,\Delta y}{\Delta x + i\,\Delta y}.$$

Si $\Delta y = 0$, lo anterior es $+1$. Si $\Delta x = 0$, entonces es -1. Por tanto, (5) tiende a $+1$ a lo largo de la trayectoria I en la figura 298, pero tiende a -1 a lo largo de la trayectoria II. Entonces, por definición, el límite de (5) no existe en ningún z cuando Δz tiende a cero. ∎

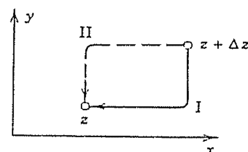


Figura 298. Trayectorias en (5).

El ejemplo que acaba de analizarse puede ser sorprendente, aunque simplemente ilustra que la diferenciabilidad de una función compleja es más bien un requisito estricto.

La idea de la demostración (aproximación desde diversas direcciones) es fundamental y volverá a ser usada nuevamente en la siguiente sección.

Funciones analíticas

Se trata de funciones que son diferenciables en algún dominio, de modo que es posible hacer "cálculo en los complejos". Constituyen el tema fundamental del análisis complejo, y su introducción es el objetivo principal de esta sección.

Definición (Analiticidad)

Se dice que una función $f(z)$ *es analítica en un dominio D* si $f(z)$ está definida y es diferenciable en todos los puntos de D. Se dice que una función $f(z)$ *es analítica en un punto* $z = z_0$ en D si $f(z)$ es analítica en una vecindad (ver la sección 12.3) de z_0.

También, por **función analítica** se entiende una función que es analítica en *algún* dominio. ∎

Así, la analiticidad de $f(z)$ en z_0 significa que $f(z)$ tiene una derivada en todos los puntos en alguna vecindad de z_0 (incluyendo z_0 mismo ya que, por definición, z_0 es un punto que pertenece a todas sus vecindades). Este concepto es *motivado* por el hecho de que carece de interés práctico el hecho de que una función sea diferenciable simplemente en un solo punto z_0 pero no en toda una vecindad completa de z_0. En el problema 26 se proporciona un ejemplo de este hecho.

Una expresión más moderna para *analítica en D* es *holomorfa en D*.

EJEMPLO 5 Polinomios, funciones racionales

Las potencias enteras $1, z, z^2, \ldots$, y, de manera más general, los **polinomios**; es decir, las funciones de la forma

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n$$

en donde $c_0, \ldots, c_n$ son constantes complejas, son analíticos en todo el plano complejo.

El cociente de dos polinomios $g(z)$ y $h(z)$,

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)},$$

se denomina **función racional**. Esta f es analítica excepto en los puntos en donde $h(z) = 0$; en este caso se supone que se han cancelado los factores comunes de g y h. Las **fracciones parciales**

$$\frac{c}{(z - z_0)^m} \qquad (c \neq 0)$$

(c y z_0 complejos, m un entero positivo) son funciones racionales especiales; son analíticas excepto en z_0. En álgebra se demuestra que toda función racional puede expresarse como una suma de un polinomio (que puede ser 0) y un numero finito de fracciones parciales. ∎

Los conceptos analizados en esta sección extienden los conceptos familiares del cálculo. El concepto de función analítica es de fundamental importancia. De hecho, el análisis complejo estudia exclusivamente función analíticas, y aunque muchas funciones simples no son analíticas, la gran variedad de funciones restantes produce una rama de las matemáticas bastante hermosa desde un punto de vista teórico y de utilidad esencial para efectos prácticos.

Problemas de la sección 12.4

Encontrar $f(3 + i), f(-i), f(-4 + 2i)$, donde $f(z)$ es igual a

1. $z^2 + 2z$ **2.** $1/(1 - z)$ **3.** $1/z^3$

Encontrar las partes real e imaginaria de las siguientes funciones.

4. $f(z) = z/(1 + z)$ **5.** $f(z) = 2z^3 - 3z$ **6.** $f(z) = z^2 + 4z - 1$

Suponer que z varía en una región R del plano z. Encontrar la región (precisa) del plano w en que están los valores correspondientes de $w = f(z)$, y muestre gráficamente ambas regiones.

7. $f(z) = z^2, |z| > 3$ **8.** $f(z) = 1/z$, Re $z > 0$ **9.** $f(z) = z^3, |\arg z| \leqq \frac{1}{4}\pi$

En cada uno de los casos siguientes, determinar si $f(z)$ es continua en el origen, suponiendo que $f(0) = 0$ y, para $z \neq 0$, la función $f(z)$ es igual a

10. Re $z/|z|$ **11.** Re $(z^2)/|z^2|$ **12.** Im $z/(1 + |z|)$

Obtener la derivada de lo siguiente.

13. $(z^2 + i)^3$ **14.** $(z^2 - 4)/(z^2 + 1)$ **15.** $i/(1 - z)^2$

16. $(z + i)/(z - i)$ **17.** $(iz + 2)/(3z - 6i)$ **18.** $z^2/(z + i)^2$

Encontrar el valor de la derivada de

19. $(z + i)/(z - i)$ en $-i$ **20.** $(z^2 - i)^2$ en $3 - 2i$ **21.** $1/z^3$ en $3i$

22. $z^3 - 2z$ en $-i$ **23.** $(1 + i)/z^4$ en 2 **24.** $(2 + iz)^6$ en $2i$

25. Demostrar que $f(z) = \operatorname{Re} z = x$ no es diferenciable en ningún z.
26. Demostrar que $f(z) = |z|^2$ es diferenciable sólo en $z = 0$; así, no es analítica en ninguna parte. *Sugerencia*. Usar la relación $|z + \Delta z|^2 = (z + \Delta z)(\bar{z} + \overline{\Delta z})$.
27. Demostrar que (1) es equivalente al par de relaciones

$$\lim_{z\to z_0} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} l, \qquad \lim_{z\to z_0} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} l.$$

28. Si $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existe, demostrar que es único.
29. Si $z_1, z_2, \ldots$ son números complejos para los cuales $\lim_{n\to\infty} z_n = a$, y si $f(z)$ es continua en $z = a$, demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(a).$$

30. Si $f(z)$ es diferenciable en z_0, demostrar que $f(z)$ es continua en z_0.

12.5 ECUACIONES DE CAUCHY-RIEMANN

A continuación se obtendrá un criterio (prueba) muy importante para verificar la analiticidad de una función compleja.

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

En términos generales, f es analítica en un dominio D si y sólo si las primeras derivadas parciales de u y v satisfacen las dos ecuaciones

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x \tag{1}$$

en todos los puntos de D; por tanto, $u_x = \partial u/\partial x$ y $u_y = \partial u/\partial y$ (y de manera semejante para v) son las notaciones de costumbre para las derivadas parciales. El planteamiento preciso de la afirmación anterior se proporciona a continuación en los teoremas 1 y 2. Las ecuaciones (1) se denominan **ecuaciones de Cauchy-Riemann** y constituyen las ecuaciones más importantes que aparecen en este capítulo.[10]

[10] AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (véase la sección 2.6) y los matemáticos alemanes BERNHARD RIEMANN (1826-1866) y KARL WEIERSTRASS (1825-1897, véase también la sección 14.6) son los creadores del análisis complejo. Riemann recibió su doctorado en filosofía (en 1851) bajo la dirección de Gauss (sección 5.4) en Göttingen, donde enseñó a partir de 1854 hasta su fallecimiento, cuando tenía sólo 39 años de edad. Introdujo el concepto de integral según se usa en cursos básicos de cálculo, en conexión con su trabajo sobre las series de Fourier. Creó nuevos métodos en ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales y efectuó contribuciones fundamentales a la teoría de números y a la fisicomatemática. También desarrolló la denominada geometría de Riemann, que constituye la base matemática de la teoria de la relatividad de Einstein. Su importante trabajo motivó muchas ideas de las matemáticas modernas (en particular, en topologia y análisis funcional). Véase N. Bourbaki, *Elements of Mathematics. General Topology*, Parte I, págs. 161-166, París Hermann.

Ejemplo: $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ es analítica para todo z, y $u = x^2 - y^2$ y $v = 2xy$ satisface (1); a saber, $u_x = 2x = v_y$, así como $u_y = -2y = -v_x$. A continuación se proporcionan más ejemplos.

Teorema 1 (Ecuaciones de Cauchy-Riemann)

Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ definida y continua en alguna vecindad de un punto $z = x + iy$, y diferenciable en z mismo. Entonces en ese punto existen las derivadas parciales de primer orden de u y v y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (1). Por tanto, si $f(z)$ es analítica en un dominio D, entonces tales derivadas parciales existen y satisfacen (1) para todos los puntos de D.

Demostración. Por hipótesis, existe la derivada de $f(z)$ en z. Está dada por

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}. \tag{2}$$

La idea de la demostración es muy simple. Por la definición del límite en los complejos (sección 12.4), es posible hacer que Δz tienda a cero a lo largo de cualquier trayectoria en una vecindad de z. Por tanto, es posible elegir las dos trayectorias I y II en la figura 299 e igualar los resultados. Al comparar las partes reales se obtiene la primera ecuación de Cauchy-Riemann, y al comparar las partes imaginarias se obtiene la otra ecuación de Cauchy-Riemann en (1). A continuación se proporcionan los detalles técnicos.

Se escribe $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. En términos de u y v, la derivada en (2) se vuelve

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{[u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y)] - [u(x, y) + iv(x, y)]}{\Delta x + i\Delta y}. \tag{3}$$

Primero se elige la trayectoria I en la figura 299. Por tanto, primero se deja que $\Delta y \to 0$ y después que $\Delta x \to 0$. Una vez que Δy es cero, se tiene que $\Delta z = \Delta x$. Luego (3) se vuelve, si primero se escriben los dos términos en u y luego los dos términos en v,

$$f'(z) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x\to 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x}.$$

Debido a que $f'(z)$ existe, entonces los dos límites reales de la derecha existen. Por definición, son las derivadas parciales de u y v con respecto a x. Por tanto, la derivada $f'(z)$ de $f(z)$ puede escribirse como

$$f'(z) = u_x + iv_x. \tag{4}$$

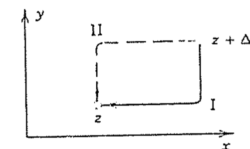


Figura 299. Trayectorias en (2).

De manera semejante, si se elige la trayectoria II en la figura 299, primero se deja que $\Delta x \to 0$ y luego que $\Delta y \to 0$. Una vez que x es cero, se tiene que $\Delta z = i\Delta y$, de modo que con base en (3) ahora se obtiene

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\,\Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\,\Delta y}.$$

Debido a que $f'(z)$ existe, entonces los dos límites de la derecha existen y proporcionan las derivadas parciales de u y v con respecto a y; al observar que $1/i = -i$, entonces se obtiene

$$f'(z) = -iu_y + v_y. \tag{5}$$

Así, la existencia de la derivada $f'(z)$ implica la existencia de las cuatro derivadas parciales en (4) y (5). Al igualar las partes reales de u_x y v_y en (4) y (5) es posible obtener la primera ecuación de Cauchy-Riemann (1). Al igualar las partes imaginarias se obtiene la otra ecuación. Lo anterior demuestra la primera afirmación del teorema e implica la segunda debido a la definición de analiticidad. ∎

Las fórmulas (4) y (5) también son bastante prácticas para calcular derivadas $f'(z)$, como se verá más tarde.

EJEMPLO 1 Ecuaciones de Cauchy-Riemann

$f(z) = z^2$ es analítica para todo z. Se concluye que las ecuaciones de Cauchy-Riemann deben cumplirse (como ya se comprobó)

Para $f(z) = \bar{z} = x - iy$ se tiene $u = x$, $v = -y$ y se observa que la segunda ecuación de Cauchy-Riemann se cumple, $u_y = -v_x = 0$, pero no así la primera; $u_x = 1 \neq v_y = -1$. Se concluye que $f(z) = \bar{z}$ no es analítica, lo cual confirma el ejemplo 4 de la sección 12.4. Observar el ahorro en esfuerzo de cómputo. ∎

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann son fundamentales debido a que no sólo son necesarias sino también son suficientes para que una función sea analítica. Con más precisión, se cumple el siguiente teorema.

Teorema 2 (Ecuaciones de Cauchy-Riemann)

Si dos funciones continuas con valores reales $u(x, y)$ y $v(x, y)$ de dos variables reales x y y tienen primeras derivadas parciales **continuas** *que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en algún dominio D, entonces la función compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x,y)$ es anaítica en D.*

La demostración es más complicada que la del teorema 1 y se deja como opcional (ver el apéndice 4).

Los teoremas 1 y 2 revisten una gran importancia práctica, ya que al aplicar las ecuaciones de Cauchy-Riemann ahora es fácil determinar si una función dada es o no analítica.

EJEMPLO 2 Ecuaciones de Cauchy-Riemann

¿$f(z) = z^3$ es analítica?

Solución. Se encuentran $u = x^3 - 3xy^2$ y $v = 3x^2y - y^3$. Luego se calcula

$$u_x = 3x^2 - 3y^2, \qquad v_y = 3x^2 - 3y^2$$

$$u_y = -6xy, \qquad v_x = 6xy.$$

Se observa que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen para todo z. Entonces, por el teorema 2, se tiene que $f(z) = z^3$ es analítica para todo z. ∎

EJEMPLO 3 Determinación de una función analítica con una parte real dada

Se ilustrará otra clase de problemas que es posible resolver aplicando las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Encontrar la función analítica más general $f(z)$ cuya parte real sea $u = x^2 - y^2 - x$.

Solución. Por la primera ecuación de Cauchy-Riemann, $u_x = 2x - 1 = v_y$. Lo anterior se integra con respecto a y:

$$v = 2xy - y + k(x).$$

Como punto importante, dado que se integró una derivada *parcial* con respecto a y, la "constante" de integración k puede depender de la otra variable, x. (Para comprender este hecho, calcular v_y a partir de esta v.) Con base en v y la segunda ecuación de Cauchy-Riemann,

$$u_y = -v_x = -2y + \frac{dk}{dx}$$

Por otra parte, por la $u = x^2 - y^2 - x$ dada, se obtiene $u_y = -2y$. Por comparación, $dk/dx = 0$; así, $k =$ *constante*, que debe ser real (¿por qué?). El resultado es

$$f(z) = u + iv = x^2 - y^2 - x + i(2xy - y + k).$$

Lo anterior puede expresarse en términos de z; a saber, $f(z) = z^2 - z + ik$. ∎

EJEMPLO 4 Una función analítica de valor absoluto constante es constante

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann también son de ayuda para obtener las propiedades generales de las funciones analíticas.

Por ejemplo, demostrar que si $f(z)$ es analítica en un dominio D y $|f(z)| = k =$ *constante* en D, entonces $f(z) =$ *constante* en D.

Solución. Por hipótesis, $u^2 + v^2 = k^2$. Por diferenciación,

$$uu_x + vv_x = 0, \qquad uu_y + vv_y = 0.$$

Luego se usa $-v_x = u_y$ en la primera ecuación y $v_y = u_x$ en la segunda para obtener

$$\text{(a)}\quad uu_x - vu_y = 0, \qquad \text{(b)}\quad uu_y + vu_x = 0. \tag{6}$$

Para eliminar u_y, la ecuación (6a) se multiplica por u, (6b) se multiplica por v y se suma el resultado. De manera semejante, para eliminar u_x, la ecuación (6a) se multiplica por $-v$, (6b) se multiplica por u y se suma el resultado. Así se obtiene

$$(u^2 + v^2)u_x = 0, \qquad (u^2 + v^2)u_y = 0.$$

Si $k^2 = u^2 + v^2 = 0$, entonces $u = v = 0$; por tanto, $f = 0$. Si $k \neq 0$, entonces $u_x = u_y = 0$; así, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, también $v_x = v_y = 0$. Juntas, se tiene que $u =$ *constante* y $v =$ *constante*; así, $f =$ *constante*. ∎

Se menciona que si se usa la forma polar $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ y se hace $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$, entonces la ecuaciones de Cauchy-Riemann son

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta, \qquad v_r = -\frac{1}{r} u_\theta \qquad (r > 0). \tag{7}$$

Ecuación de Laplace. Funciones armónicas

Una de las razones principales de la gran importancia práctica del análisis complejo en las matemáticas aplicadas a la ingeniería resulta del hecho de que tanto la parte real como la parte imaginaria de una función analítica satisfacen la ecuación diferencial más importante en física, la ecuación de Laplace, que aparece en la teoría de la gravitación, electrostática, dinámica de fluidos, conducción del calor, etc. (ver los capítulos 11 y 17).

Teorema 3 (Ecuación de Laplace)

Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en un dominio D, entonces u y v satisfacen la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{8}$$

(∇^2 se lee como "nabla al cuadrado" o "nabla cuadrada") *y*

$$\nabla^2 v = v_{xx} + v_{yy} = 0, \tag{9}$$

respectivamente, en D y tienen segundas derivadas parciales continuas en D.

Demostración. Al derivar $u_x = v_y$ con respecto a x y $u_y = -v_x$ con respecto a y, se tiene

$$u_{xx} = v_{yx}, \qquad u_{yy} = -v_{xy}. \tag{10}$$

Así, la derivada de una función analítica es en sí misma analítica, como se demostrará después (en la sección 13.6). Lo anterior implica que u y v tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes; en particular, las segundas derivadas parciales mezcladas son iguales; $v_{yx} = v_{xy}$. Al sumar (10) se obtiene entonces (8). De manera semejante, (9) se obtiene al derivar $u_x = v_y$ con respecto a y y $u_y = -v_x$ con respecto a x y restando, usando $u_{xy} = u_{yx}$. ∎

Las soluciones de la ecuación de Laplace que tienen derivadas parciales de segundo orden *continuas* se denominan **funciones armónicas** y su teoría se denomina **teoría del potencial** (ver también la sección 11.11). Por tanto, las partes real e imaginaria de una función analítica son funciones armónicas.

Si dos funciones armónicas u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en un dominio D, entonces son las partes real e imaginaria de una función analítica f en D. Entonces, se dice que v es la **función armónica conjugada** de u en D. (Por supuesto, este uso de la palabra "conjugada" es diferente del empleado para definir el "conjugado" de $\bar{z}$.)

A continuación se ilustrará el hecho de que una función armónica conjugada puede obtenerse mediante las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

EJEMPLO 5 Función armónica conjugada

Comprobar que $u = x^2 - y^2 - y$ es armónica en todo el plano complejo y encontrar una función armónica conjugada v de u.

Solución. $\nabla^2 u = 0$ por cálculo directo. Luego, $u_x = 2x$ y $u_y = -2y - 1$. Por tanto, una conjugada v de u debe satisfacer

$$v_y = u_x = 2x, \qquad v_x = -u_y = 2y + 1.$$

Al integrar la primera ecuación con respecto a y y derivando el resultado con respecto a x se obtiene

$$v = 2xy + h(x), \qquad v_x = 2y + \frac{dh}{dx}.$$

Al comparar el resultado anterior con la segunda ecuación se observa que $dh/dx = 1$. Con lo anterior se obtiene $h(x) = x + c$. Así, $v = 2xy + x + c$ (c es cualquier constante real) es la armónica conjugada más general de una u dada. La función analítica correspondiente es

$$f(z) = u + iv = x^2 - y^2 - y + i(2xy + x + c) = z^2 + iz + ic.$$

¿Puede observar el lector que esta tarea es bastante semejante a la del ejemplo 3? Explicar por qué. ∎

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann constituyen las ecuaciones más importantes de este capítulo. Su relación con la ecuación de Laplace abre amplias perspectivas de aplicaciones en ingeniería y física, como se verá en el capítulo 17.

Problemas de la sección 12.5

Las siguientes funciones, ¿son analíticas? [Usar (1) o (7)].

1. $f(z) = z^8$ **2.** $f(z) = \operatorname{Re}(z^2)$ **3.** $f(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$
4. $f(z) = i/z^4$ **5.** $f(z) = 1/(1 - z)$ **6.** $f(z) = z - \bar{z}$
7. $f(z) = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$ **8.** $f(z) = 1/(1 - z^4)$ **9.** $f(z) = \operatorname{Arg} z$
10. $f(z) = z + 1/z$ **11.** $f(z) = z^2 - \bar{z}^2$ **12.** $f(z) = e^x(\operatorname{sen} y - i \cos y)$

Las siguientes funciones, ¿son armónicas? En caso afirmativo, encontrar una función analítica correspondiente $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

13. $u = xy$ **14.** $v = xy$ **15.** $u = x/(x^2 + y^2)$
16. $v = 1/(x^2 + y^2)$ **17.** $u = x^3 - 3xy^2$ **18.** $u = \operatorname{sen} x \cosh y$
19. $u = e^x \cos 2y$ **20.** $v = i \ln|z|$ **21.** $v = (x^2 - y^2)^2$

Determinar a, b, c tales que las funciones dadas sean armónicas y encontrar una armónica conjugada.

22. $u = e^{2x} \cos ay$ **23.** $u = \cos bx \cosh y$ **24.** $u = \operatorname{sen} x \cosh cy$

25. Demostrar que si u es armónica y v es una armónica conjugada de u, entonces u es una armónica conjugada de $-v$.
26. Demostrar que, además de (4) y (5),

(11) $$f'(z) = u_x - iu_y, \qquad f'(z) = v_y + iv_x.$$

27. Las fórmulas (4), (5) y (11) se requieren de vez en cuando. El lector puede familiarizarse con ellas calculando $(z^3)'$ aplicando una de ellas y comprobando que el resultado es como se esperaba.
28. Demostrar que si $f(z)$ es analítica y Re $f(z)$ es constante, entonces $f(z)$ es constante.
29. **(Derivada idénticamente cero)** Aplicando (4), demostrar que una función analítica cuya derivada es idénticamente cero es una constante.
30. A partir de (1), obtener las ecuaciones de Cauchy-Riemann en la forma polar (7).

12.6 FUNCIÓN EXPONENCIAL

En las secciones restantes de este capítulo se analizarán las funciones complejas elementales más importantes: la función exponencial, las funciones trigonométricas, la función logaritmo, etc. Tales funciones se definirán de modo que para $z = x$ real se reduzcan a las funciones conocidas del cálculo. Estas funciones son indispensables en todas las aplicaciones y algunas de ellas poseen interesantes propiedades que no son evidentes cuando $z = x$ es real. Debido a lo anterior, el estudiante debe seguir el análisis con cuidado especial.

Se empezará con la **función exponencial** compleja

$$e^z, \text{ que también se escribe como } \exp z.$$

e^z es una de las funciones analíticas más importantes. La definición de e^z en términos de las funciones reales e^x, cos y y sen y es

(1) $$e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Esta definición[11] es motivada por requisitos que hacen de e^z una extensión natural de la función exponencial real e^x; a saber,

(a) e^z debe reducirse a e^x cuando $z = x$ es real;

(b) e^z debe ser una **función entera**; es decir, analítica para todo z;

(c) de manera semejante al cálculo, su derivada debe ser

(2) $$(e^z)' = e^z.$$

[11] Esta definición provoca una discusión relativamente sencilla. También hubiera podido definirse e^z mediante la conocida serie $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$, con x reemplazada por z, pero en ese caso hubiera sido necesario analizar primero las series complejas en esta etapa prematura. En la sección 14.4 se mostrará la conexión.

Con base en (1) se observa que (a) se cumple, ya que cos 0 = 1 y sen 0 = 0. El hecho de que e^z es entera puede comprobarse fácilmente aplicando las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Luego, la fórmula (2) se concluye a partir de (4) en la sección 12.5:

$$(e^z)' = (e^x \cos y)_x + i(e^x \operatorname{sen} y)_x = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y = e^z.$$

Propiedades adicionales. e^z posee interesantes propiedades adicionales. Primero se mostrará que, como en los reales, se tiene la relación funcional

(3) $$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

para $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ cualesquiera. De hecho, por (1), se tiene que

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2).$$

Como $e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$ para estas funciones *reales*, entonces por una aplicación de las fórmulas para la adición de las funciones coseno y seno (semejantes a las de la sección 12.2), se encuentra que lo anterior es igual a

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1+x_2}[\cos(y_1 + y_2) + i \operatorname{sen}(y_1 + y_2)] = e^{z_1+z_2},$$

como se había afirmado. Un caso especial interesante es cuando $z_1 = x$, $z_2 = iy$:

(4) $$e^z = e^x e^{iy}.$$

Además, para $z = iy$, por (1) se tiene la denominada **fórmula de Euler**

(5) $$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y.$$

Así, la **forma polar** de un número complejo, $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, puede escribirse ahora como

(6) $$z = re^{i\theta}.$$

A partir de (5) también se observa que

(7) $$|e^{iy}| = |\cos y + i \operatorname{sen} y| = \sqrt{\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y} = 1.$$

Es decir, para exponentes imaginarios puros el valor absoluto de la función exponencial es igual a la unidad, resultado que el estudiante debe recordar. Por (7) y (1), se tiene que

(8) $$|e^z| = e^x, \quad \text{por tanto} \quad \arg e^z = y \pm 2n\pi \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

como $|e^z| = e^x$ demuestra que (1) es en realidad e^z en forma polar.

EJEMPLO 1. Ilustración de algunas propiedades de la función exponencial

El cálculo de los valores a partir de (1) no constituye ningún problema. Por ejemplo, comprobar que

$$e^{1.4-0.6i} = e^{1.4}(\cos 0.6 - i \operatorname{sen} 0.6) = 4.055(0.825 - 0.565i) = 3.347 - 2.290i,$$

$$|e^{1.4-0.6i}| = e^{1.4} = 4.055, \qquad \operatorname{Arg} e^{1.4-0.6i} = -0.6.$$

Como $\cos 2\pi = 1$ y $\operatorname{sen} 2\pi = 0$, por (5) se tiene que

(9) $$e^{2\pi i} = 1.$$

Además, se aplica (1), (5) o (6) para comprobar estos valores especiales importantes:

(10) $$e^{\pi i/2} = i, \qquad e^{\pi i} = -1, \qquad e^{-\pi i/2} = -i, \qquad e^{-\pi i} = -1.$$

Para ilustrar (3), se considera el producto de

$$e^{2+i} = e^2(\cos 1 + i \operatorname{sen} 1) \qquad \text{y} \qquad e^{4-i} = e^4(\cos 1 - i \operatorname{sen} 1)$$

y se comprueba que es igual a

$$e^2e^4(\cos^2 1 + \operatorname{sen}^2 1) = e^6 = e^{(2+i)+(4-i)}.$$

Finalmente, a partir de $|e^z| = e^x \neq 0$ en (8) se concluye que

(11) $$\boxed{e^z \neq 0} \qquad \text{para todo } z.$$

Por tanto, aquí se tiene una función entera que jamás se hace cero, en contraste con los polinomios (no constantes), que también son enteros (ejemplo 5 en la sección 12.4), aunque siempre tienen un cero, como se demuestra en álgebra. [¿Puede el lector obtener (11) a partir de (3)?] ■

Periodicidad de e^z con periodo $2\pi i$

(12) $$e^{z+2\pi i} = e^z \qquad \text{para todo } z.$$

es una propiedad fundamental que se concluye de (1) y la periodicidad de cos y y sen y. [También es una consecuencia de (3) y (9)]. Por tanto, todos los valores que puede asumir $w = e^z$ ya han sido asumidos en la banda horizontal de ancho 2π.

(13) $$-\pi < y \leqq \pi \qquad \text{(Figura 300).}$$

Esa banda infinita se denomina **región fundamental** de e^z.

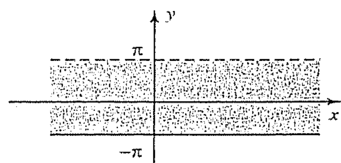


Figura 300. Región fundamental de la función exponencial e^z en el plano z.

EJEMPLO 2 Solución de una ecuación

Encontrar todas las soluciones de $e^z = 3 + 4i$.

Solución. $|e^z| = e^x = 5$, $x = \ln 5 = 1.609$ es la parte real de todas las soluciones. Luego, como $e^x = 5$,

$$e^x \cos y = 3, \quad e^x \operatorname{sen} y = 4, \quad \cos y = 0.6, \quad \operatorname{sen} y = 0.8, \quad y = 0.927.$$

Respuesta. $z = 1.609 + 0.927i \pm 2n\pi i$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$. Se tiene una infinidad de soluciones (debido a la periodicidad de e^z), que están en la recta vertical $x = 1.609$ a una distancia 2π de sus vecinas. ■

En resumen, muchas de las propiedades de $e^z = \exp z$ son paralelas a las de e^x; una excepción es la periodicidad de e^z con $2\pi i$, lo que sugirió el concepto de región fundamental. Debe tenerse presente que e^z es una *función entera*. (¿Aún recuerda el lector lo que significa?)

Problemas de la sección 12.6

1. Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, demostrar que e^z es analítica para todo z.

Calcular e^z (en la forma $u + iv$) y $|e^z|$ si z es igual a

2. $3 + \pi i$ 3. $1 + i$ 4. $2 + 5\pi i$ 5. $\sqrt{2} - \frac{1}{2}i$
6. $7\pi i/2$ 7. $(1 + i)\pi$ 8. $-1 + 1.4i$ 9. $-9\pi i/2$

Encontrar las partes real e imaginaria de

10. e^{-z^2} 11. e^{z^3} 12. $e^{-\pi z}$ 13. e^{-2z}

Escribir las siguientes expresiones en la forma polar (6).

14. $1 + i$ 15. $\sqrt{i}$, $\sqrt{-i}$ 16. $\sqrt[n]{z}$ 17. $3 + 4i$

Encontrar todos los valores de z tales que

18. e^z es real 19. $|e^{-z}| < 1$ 20. $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$ 21. $\operatorname{Re} e^{2z} = 0$

Encontrar todas las soluciones y graficar algunas en el plano complejo.

22. $e^{3z} = 3$ 23. $e^z = -2$ 24. $e^z = -3 + 4i$ 25. $e^z = 0$

26. Demostrar que $u = e^{xy} \cos(x^2/2 - y^2/2)$ es armónica y encontrar una conjugada.
27. Encontrar todos los valores de k tales que $f(z) = e^x(\cos ky + i \operatorname{sen} ky)$ sea analítica.
28. Demostrar que $f(z) = e^{\bar{z}}$ no es analítica en ningún punto.
29. Es interesante que $f(z) = e^z$ esté determinada de manera *única* por las dos propiedades $f(x + i0) = e^x$ y $f'(z) = f(z)$, en donde se supone que f es entera. Demostrar este hecho. *Sugerencia.* Sea g entera con estas dos propiedades y demostrar que $(g/f)' = 0$.
30. Usando sólo las ecuaciones de Cauchy-Riemann, demostrar la afirmación del problema 29.

12.7 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS, FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Así como e^z extiende e^x a los complejos, se desea que las funciones trigonométricas *complejas* extiendan las funciones trigonométricas *reales* conocidas. La idea para establecer esta conexión es el empleo de las fórmulas de Euler (sección 12.6)

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x, \qquad e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x.$$

Por adición y sustracción se obtiene para el coseno y el seno reales

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \qquad \operatorname{sen} x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}).$$

Lo anterior sugiere las siguientes definiciones para los valores complejos $z = x + iy$:

$$(1) \qquad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \qquad \operatorname{sen} z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

Es bastante extraordinario que aquí en los complejos, vienen juntas funciones que no están relacionadas en los reales. Este hecho no es fortuito, sino que es típico de la situación general y muestra la ventaja de trabajar en los complejos.

Además, así como en cálculo, se define

$$(2) \qquad \tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$$

y

$$(3) \qquad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \qquad \csc z = \frac{1}{\operatorname{sen} z}.$$

Como e^z es entera, entonces $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ son funciones enteras; $\tan z$ y $\sec z$ no son enteras: son analíticas excepto en los puntos en que $\cos z$ es cero; y $\cot z$ y $\csc z$ son analíticas excepto en los puntos en donde $\operatorname{sen} z$ es cero. Las fórmulas para las derivadas se deducen fácilmente a partir de $(e^z)' = e^z$ y de (1)-(3); como en cálculo,

$$(4) \qquad (\cos z)' = -\operatorname{sen} z, \qquad (\operatorname{sen} z)' = \cos z, \qquad (\tan z)' = \sec^2 z,$$

etc. La ecuación (1) también muestra que la **fórmula de Euler** *es válida en los complejos*:

$$(5) \qquad e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z \qquad \text{para todo } z.$$

Las partes real e imaginaria de $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ son necesarias para el cálculo de los valores, y también son de utilidad para representar propiedades de las funciones. Este hecho se ilustrará con un ejemplo típico.

EJEMPLO 1 Partes real e imaginaria. Valor absoluto. Periodicidad

Demostrar que

$$(6) \qquad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad \cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y \\ &\text{(b)} \quad \operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y \end{aligned}$$

y

$$(7) \qquad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad |\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y \\ &\text{(b)} \quad |\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y \end{aligned}$$

y proporcionar algunas aplicaciones de estas fórmulas.

Solución. Por (1),

$$\begin{aligned} \cos z &= \tfrac{1}{2}(e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}) \\ &= \tfrac{1}{2}e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) + \tfrac{1}{2}e^{y}(\cos x - i \operatorname{sen} x) \\ &= \tfrac{1}{2}(e^{y} + e^{-y})\cos x - \tfrac{1}{2}i(e^{y} - e^{-y})\operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

Esto conduce a (6a), ya que, como se sabe por cálculo,

$$(8) \qquad \cosh y = \tfrac{1}{2}(e^{y} + e^{-y}), \qquad \operatorname{senh} y = \tfrac{1}{2}(e^{y} - e^{-y});$$

(6b) se obtiene de manera semejante. Por (6a) y $\cosh^2 y = 1 + \operatorname{senh}^2 y$ se obtiene

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x\,(1 + \operatorname{senh}^2 y) + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{senh}^2 y.$$

Como $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, entonces se obtiene (7a), y (7b) se obtiene de manera semejante.

Por ejemplo, $\cos(2 + 3i) = \cos 2 \cosh 3 - i \operatorname{sen} 2 \operatorname{senh} 3 = -4.190 - 9.109i$.

Por (6) se observa que $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ son *periódicas con periodo* 2π, así como en los reales. Luego se concluye la periodicidad de $\tan z$ y $\cot z$ con periodo π.

La fórmula (7) indica una diferencia esencial entre el coseno y el seno reales y complejos: mientras que $|\cos x| \leqq 1$ y $|\operatorname{sen} x| \leqq 1$, las funciones complejas coseno y seno ya no están acotadas, sino que tienden a infinito en valor absoluto cuando $y \to \infty$, ya que en (7) se tiene que $\operatorname{senh} y \to \infty$. ∎

EJEMPLO 2 Solución de ecuaciones. Ceros de $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$

Resolver (a) $\cos z = 5$ (¡que no tiene solución real!), (b) $\cos z = 0$, (c) $\operatorname{sen} z = 0$

Solución. (a) A partir de (1), por multiplicación de e^{iz} se tiene que $e^{2iz} - 10e^{iz} + 1 = 0$. Esta es una ecuación cuadrática en e^{iz}, con soluciones (valores tridimensionales)

$$e^{iz} = e^{-y+ix} = 5 \pm \sqrt{25 - 1} = 9.899 \quad \text{y} \quad 0.101.$$

Así, $e^{-y} = 9.899$ o 0.101, $e^{ix} = 1$, $y = \pm 2.292$, $x = 2n\pi$.

Respuesta. $z = \pm 2n\pi \pm 2.292i$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ¿Puede el lector obtener este resultado usando (6a)?

(b) $\cos x = 0$, $\operatorname{senh} y = 0$ por (7a), $y = 0$. *Respuesta.* $z = \pm \frac{1}{2}(2n + 1)\pi$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

(c) $\operatorname{sen} x = 0$, $\operatorname{senh} y = 0$ por (7b). *Respuesta.* $z = 2n\pi$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Por tanto, los únicos ceros de $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ son los de las funciones reales coseno y seno. ∎

Las **fórmulas generales** *para las funciones trigonométricas reales siguen cumpliéndose para valores complejos*. Este hecho es una consecuencia inmediata de las definiciones. En particular, se mencionarán las reglas de la adición

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2 \tag{9}$$
$$\operatorname{sen}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 \pm \operatorname{sen} z_2 \cos z_1$$

y la fórmula

$$\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1. \tag{10}$$

En los problemas de la sección se incluyen algunas fórmulas adicionales de utilidad.

Funciones hiperbólicas

El **coseno** y el **seno hiperbólicos** complejos se definen mediante las fórmulas

$$\cosh z = \tfrac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \qquad \operatorname{senh} z = \tfrac{1}{2}(e^z - e^{-z}). \tag{11}$$

Lo anterior es sugerido por las definiciones familiares para una variable real [ver (8)]. Estas funciones son enteras, con derivadas

$$(\cosh z)' = \operatorname{senh} z, \qquad (\operatorname{senh} z)' = \cosh z, \tag{12}$$

como en cálculo. Las otras funciones hiperbólicas se definen como

$$\tanh z = \frac{\operatorname{senh} z}{\cosh z}, \qquad \coth z = \frac{\cosh z}{\operatorname{senh} z}, \tag{13}$$
$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \qquad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\operatorname{senh} z}.$$

Las funciones trigonométricas e hiperbólicas están relacionadas. Si en (11) z se sustituye por iz y se usa (1), entonces se obtiene

$$\cosh iz = \cos z, \qquad \operatorname{senh} iz = i \operatorname{sen} z. \tag{14}$$

A partir de lo anterior, como cosh es par y senh es impar, de manera recíproca se tiene que

$$\cos iz = \cosh z, \qquad \operatorname{sen} iz = i \operatorname{senh} z. \tag{15}$$

Aquí se tiene otro caso de funciones reales *no relacionadas* que tienen análogos complejos *relacionados*, lo que indica nuevamente la ventaja de trabajar en los complejos a fin de obtener un formalismo más unificado y conocimientos más detallados y profundos de las funciones especiales. Esta es una de las tres razones principales de la importancia práctica del análisis complejo que se mencionaron al inicio del capítulo.

Problemas de la sección 12.7

1. Demostrar que $\cos z$, $\operatorname{sen} z$, $\cosh z$, $\operatorname{senh} z$ son funciones enteras.
2. Comprobar por diferenciación que $\operatorname{Re} \cos z$ e $\operatorname{Im} \operatorname{sen} z$ son armónicas.

Calcular (en la forma $u + iv$) lo siguiente:

3. $\cos(1.7 + 1.5i)$
4. $\operatorname{sen}(1.7 + 1.5i)$
5. $\operatorname{sen} 10i$
6. $\cos 10i$
7. $\operatorname{sen}(\sqrt{2} - 4i)$
8. $\cos(\pi + \pi i)$
9. $\cos 3\pi i$
10. $\operatorname{sen}(3 + 2i)$
11. $\cos(2.1 - 0.2i)$
12. Demostrar que

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y,$$
$$\operatorname{senh} z = \operatorname{senh} x \cos y + i \cosh x \operatorname{sen} y.$$

Calcular (en la forma $u + iv$) lo siguiente:

13. $\cosh(-2 + 3i)$
14. $\operatorname{senh}(4 - 3i)$
15. $\operatorname{senh}(2 + i)$

Encontrar todas las soluciones de las siguientes ecuaciones.

16. $\cosh z = 0$
17. $\cos z = 3i$
18. $\operatorname{sen} z = 1000$
19. $\operatorname{sen} z = i \operatorname{senh} 1$
20. $\operatorname{sen} z = \cosh 3$
21. $\cosh z = \frac{1}{2}$
22. Encontrar todos los valores de z para los cuales (a) $\cos z$, (b) $\operatorname{sen} z$ tienen valores reales.
23. A partir de (15), obtener $\cosh(-1.5 + 1.7i)$ y la respuesta de uno de los problemas anteriores.
24. Encontrar $\operatorname{Re} \tan z$ e $\operatorname{Im} \tan z$.
25. Demostrar que $\cos z$ es par, $\cos(-z) = \cos z$, y que $\operatorname{sen} z$ es impar, $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$.
26. Demostrar que $\cos z = \operatorname{sen}(z + \frac{1}{2}\pi)$ y que $\operatorname{sen}(\pi - z) = \operatorname{sen} z$, como en los reales.
27. Demostrar que $\operatorname{senh} z$ y $\cosh z$ son periódicas con periodo $2\pi i$.
28. A partir de (9) y (15), obtener las reglas de la adición

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \operatorname{senh} z_1 \operatorname{senh} z_2,$$
$$\operatorname{senh}(z_1 + z_2) = \operatorname{senh} z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \operatorname{senh} z_2.$$

29. Demostrar lo siguiente

$$\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1, \qquad \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z = \cos 2z$$
$$\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1, \qquad \cosh^2 z + \operatorname{senh}^2 z = \cosh 2z.$$

30. Demostrar que $|\operatorname{senh} y| \leqq |\cos z| \leqq \cosh y$ y $|\operatorname{senh} y| \leqq |\operatorname{sen} z| \leqq \cosh y$. Concluir que el coseno y el seno complejos no están acotados en todo el plano complejo.

12.8 LOGARITMO. POTENCIA GENERAL

Como última función se introduce el *logaritmo complejo*, que es más complicado que el logaritmo real (que lo incluye como caso especial) e históricamente puso en aprietos a los matemáticos durante algún tiempo (de modo que si el lector se encuentra en aprietos, lo cual no necesariamente sucederá, debe tener paciencia y trabajar esta sección con cuidado especial).

El **logaritmo natural** de $z = x + iy$ se denota por $\ln z$ (algunas veces también por $\log z$) y se define como la inversa de la función exponencial; es decir, $w = \ln z$ se define para $z \neq 0$ mediante la relación

$$e^w = z.$$

(Observar que $z = 0$ es imposible, ya que $e^w \neq 0$ para todo w; ver la sección 12.6) Si se hace $w = u + iv$ y $z = re^{i\theta}$, lo anterior se vuelve

$$e^w = e^{u+iv} = re^{i\theta}.$$

Luego, por la sección 12.6 se sabe que el valor absoluto de e^{u+iv} es e^u y que su argumento es v. Estos deben ser iguales al valor absoluto y al argumento de la derecha:

$$e^u = r, \qquad v = \theta.$$

Con $e^u = r$ se obtiene $u = \ln r$, en donde $\ln r$ es el conocido logaritmo natural *real* del número positivo $r = |z|$. Por tanto, $w = u + iv = \ln z$ está dado por

(1) $$\boxed{\ln z = \ln r + i\theta} \qquad (r = |z| > 0, \quad \theta = \arg z).$$

A continuación sigue una cuestión importante (sin análogo en cálculo real): Como el argumento de z está determinado sólo hasta múltiplos enteros de 2π, entonces *el logaritmo natural complejo* $\ln z$ $(z \neq 0)$ *posee una infinidad de valores*.

El valor de $\ln z$ correspondiente al valor principal $\operatorname{Arg} z$ (ver la sección 12.2) se denota por $\operatorname{Ln} z$ y se denomina **valor principal** de $\ln z$. Así,

(2) $$\boxed{\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z} \qquad (z \neq 0).$$

La unicidad de $\operatorname{Arg} z$ para z $(\neq 0)$ dado implica que $\operatorname{Ln} z$ posee un solo valor; es decir, se trata de una función en el sentido acostumbrado. Debido a que los otros valores de $\arg z$ difieren por múltiplos enteros de 2π, entonces los demás valores de $\ln z$ están dados por

(3) $$\boxed{\ln z = \operatorname{Ln} z \pm 2n\pi i} \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

Todos tienen la misma parte real, y sus partes imaginarias difieren por múltiplos enteros de 2π.

Si z es un real positivo, entonces $\operatorname{Arg} z = 0$ y $\operatorname{Ln} z$ se vuelve idéntico al logaritmo natural real conocido por cálculo. Si z es un real negativo (de modo que no está definido el logaritmo natural real conocido por cálculo), entonces $\operatorname{Arg} z = \pi$ y

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + \pi i.$$

EJEMPLO 1 Logaritmo natural. Valor principal

$\ln 1 = 0, \pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \cdots$	$\operatorname{Ln} 1 = 0$
$\ln 4 = 1.386\,294 \pm 2n\pi i$	$\operatorname{Ln} 4 = 1.386\,294$
$\ln(-1) = \pm \pi i, \pm 3\pi i, \pm 5\pi i, \cdots$	$\operatorname{Ln}(-1) = \pi i$
$\ln(-4) = 1.386\,294 \pm (2n+1)\pi i$	$\operatorname{Ln}(-4) = 1.386\,294 + \pi i$
$\ln i = \pi i/2, -3\pi i/2, 5\pi i/2, \cdots$	$\operatorname{Ln} i = \pi i/2$
$\ln 4i = 1.386\,294 + \pi i/2 \pm 2n\pi i$	$\operatorname{Ln} 4i = 1.386\,294 + \pi i/2$
$\ln(-4i) = 1.386\,294 - \pi i/2 \pm 2n\pi i$	$\operatorname{Ln}(-4i) = 1.386\,294 - \pi i/2$
$\ln(3-4i) = \ln 5 + i \arg(3-4i)$	$\operatorname{Ln}(3-4i) = 1.609\,438 - 0.927\,295i$
$= 1.609\,438 - 0.927\,295i \pm 2n\pi i$	

∎

Las conocidas relaciones para el logaritmo natural siguen cumpliéndose para valores complejos, es decir,

(4) (a) $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$, (b) $\ln(z_1/z_2) = \ln z_1 - \ln z_2$

aunque estas relaciones debe comprenderse en el sentido de que cada valor de un miembro también está contenido entre los valores del otro miembro.

EJEMPLO 2 Ilustración de las relaciones funcionales (4) en los complejos

Sea

$$z_1 = z_2 = e^{\pi i} = -1.$$

Si se toma

$$\ln z_1 = \ln z_2 = \pi i,$$

entonces (4a) se cumple en el supuesto de que se escriba $\ln(z_1 z_2) = \ln 1 = 2\pi i$; esto no es cierto para el valor principal, $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \ln 1 = 0$. ∎

Por (1) y $e^{\ln r} = r$ para r real positivo se obtiene

(5a) $$e^{\ln z} = z$$

como se esperaba, pero, como $\arg(e^z) = y \pm 2n\pi$ posee múltiples valores,

(5b) $$\ln(e^z) = z \pm 2n\pi i.$$

Para todo entero no negativo fijo n, la fórmula (3) define una función. Se demostrará que cada una de estas funciones, en particular el valor principal $\operatorname{Ln} z$, es analítica excepto en $z = 0$ y excepto en el eje real negativo (en donde la parte imaginaria de tal función ni siquiera es continua, sino que tiene un salto de magnitud 2π). Lo anterior se logrará probando que

(6) $$(\ln z)' = \frac{1}{z}$$ [n en (3) es fijo, z es un real no negativo o cero].

En (1) se tiene $\ln z = u + iv$, donde

$$u = \ln r = \ln |z| = \tfrac{1}{2} \ln (x^2 + y^2), \qquad v = \arg z = \arc \tan \frac{y}{x} + c,$$

donde c es una constante (un múltiplo de $2n\pi$). Se calculan las derivadas parciales de u y de v y se encuentra que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x = \frac{x}{x^2 + y^2} = v_y = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \cdot \frac{1}{x},$$

$$u_y = \frac{y}{x^2 + y^2} = -v_x = -\frac{1}{1 + (y/x)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right).$$

La fórmula (4) de la sección 12.5 produce ahora el resultado deseado:

$$(\ln z)' = u_x + iv_x = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{1}{1 + (y/x)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{z}. \qquad ■$$

Potencias generales

Las potencias generales de un número complejo $z = x + iy$ se definen mediante la fórmula

$$(7) \qquad z^c = e^{c \ln z} \qquad (c \text{ complejo}, \ z \neq 0).$$

Dado que $\ln z$ posee una infinidad de valores, entonces, en general, z^c también tendrá múltiples valores. El valor particular

$$z^c = e^{c \operatorname{Ln} z}$$

se denomina **valor principal** de z^c.

Si $c = n = 1, 2, \ldots$, entonces z^n posee un solo valor y es idéntica a la n-ésima potencia usual de z. Si $c = -1, -2, \ldots$, la situación es semejante.

Si $c = 1/n$, en donde $n = 2, 3, \ldots$, entonces

$$z^c = \sqrt[n]{z} = e^{(1/n) \ln z} \qquad (z \neq 0),$$

el exponente es determinado hasta múltiplos de $2\pi i/n$ y se obtienen los n distintos valores de la raíz n-ésima, en concordancia con el resultado de la sección 12.2. Si $c = p/q$, el cociente de dos enteros positivos, la situación es semejante, y z^c tiene sólo un número finito de valores distintos. Sin embargo, si c es irracional o genuinamente complejo, entonces z^c posee una infinidad de valores.

EJEMPLO 3 Potencia general

$$i^i = e^{i \ln i} = \exp (i \ln i) = \exp \left[i \left(\frac{\pi}{2} i \pm 2n\pi i\right)\right] = e^{-(\pi/2) \mp 2n\pi}.$$

Todos estos valores son reales, y el valor principal ($n = 0$) es $e^{-\pi/2}$. De manera semejante, por cálculo directo y multiplicando el exponente,

$$(1 + i)^{2-i} = \exp [(2 - i) \ln (1 + i)] = \exp [(2 - i) \{\ln \sqrt{2} + \tfrac{1}{4}\pi i \pm 2n\pi i\}]$$
$$= 2e^{\pi/4 \pm 2n\pi}[\operatorname{sen} (\tfrac{1}{2} \ln 2) + i \cos (\tfrac{1}{2} \ln 2)]. \qquad ■$$

Un *convencionalismo* es que para un real positivo $z = x$, la expresión z^c significa $e^{c \ln r}$, en donde $\ln x$ es el logaritmo natural real elemental (es decir, el valor principal $\operatorname{Ln} z$ $(z = x > 0)$ en el sentido de la definición). También, si $z = e$, entonces la base del logaritmo natural, $z^c = e^c$ se considera *convencionalmente* como el único valor obtenido a partir de (1) en la sección 12.6.

Por (7) se observa que para cualquier número complejo a,

$$(8) \qquad \boxed{a^z = e^{z \ln a}.}$$

Ahora se han introducido las funciones complejas necesarias para el trabajo práctico, de las cuales algunas (e^z, $\cos z$, $\operatorname{sen} z$, $\operatorname{senh} z$) son enteras (sección 12.6), algunas ($\tan z$, $\cot z$, $\tanh z$, $\coth z$) son analíticas excepto en ciertos puntos, y una de ella ($\ln z$) se divide en un infinidad de funciones, cada una de las cuales es analítica excepto en 0 y sobre el eje real negativo.

Problemas de la sección 12.8

1. Comprobar los cálculos del ejemplo 1. Graficar algunos de los valores de $\ln (3 - 4i)$ en el plano complejo.
2. Comprobar (4) para $z_1 = -i$ y $z_2 = -1$.
3. Demostrar la analiticidad de $\operatorname{Ln} z$ aplicando las ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma polar (ver la sección 12.5).
4. Demostrar (5a) y (5b).

Calcular el valor principal $\operatorname{Ln} z$ si z es igual a

5. $1 + i$ 6. -4 7. $-3 - 4i$ 8. $2.5 + 3.8i$
9. -100 10. $-16.0 - 0.1i$ 11. $-16.0 + 0.1i$ 12. $0.6 + 0.8i$

Encontrar todos los valores de las expresiones dadas y graficar algunos en el plano complejo.

13. $\ln 1$ 14. $\ln e$ 15. $\ln (-7)$ 16. $\ln (-0.01i)$
17. $\ln (0.8 - 0.6i)$ 18. $\ln (e^{2i})$ 19. $\ln (-e^{-i})$ 20. $\ln (1.3 + 2.8i)$

Resolver las siguientes ecuaciones para z.

21. $\ln z = 3 - i$ 22. $\ln z = -2 - \frac{3}{2}i$ 23. $\ln z = 2 + \frac{1}{4}\pi i$
24. $\ln z = (2 - \frac{1}{2}i)\pi$ 25. $\ln z = 0.3 + 0.7i$ 26. $\ln z = \sqrt{2} + \pi i$
27. $\ln z = 4 - 3i$ 28. $\ln z = -5 + 0.01i$

Encontrar el valor principal de

29. $i^{1/2}$ 30. $(1 + i)^i$ 31. 3^{3-i} 32. 2^{2i}
33. $(1 - i)^{1+i}$ 34. $(1 + i)^{1-i}$ 35. $(5 - 2i)^{3+\pi i}$ 36. $(-5)^{2-4i}$
37. $(2 - i)^{1+i}$ 38. $(3 + 4i)^{1/3}$

Por definición, el **seno inverso** $w = \operatorname{sen}^{-1} z$ es la relación tal que sen $w = z$. El coseno inverso $w = \cos^{-1} z$ es la relación tal que $\cos w = z$. La **tangente inversa**, la **cotangente inversa**, el **seno hiperbólico inverso**, etc., se definen y denotan de manera semejante. (Observar que todas estas relaciones poseen ***múltiples valores.***) Usando sen $w = (e^{iw} - e^{-iw})/2i$ y representaciones semejantes de $\cos w$, etc., demostrar que

39. $\operatorname{sen}^{-1} z = -i \ln (iz + \sqrt{1 - z^2})$

40. $\cos^{-1} z = -i \ln (z + \sqrt{z^2 - 1})$

41. $\cosh^{-1} z = \ln (z + \sqrt{z^2 - 1})$

42. $\operatorname{senh}^{-1} z = \ln (z + \sqrt{z^2 + 1})$

43. $\tan^{-1} z = \frac{i}{2} \ln \frac{i + z}{i - z}$

44. $\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + z}{1 - z}$

45. Demostrar que $w = \operatorname{sen}^{-1} z$ posee una infinidad de valores múltiples, y si w_1 es uno de tales valores, entonces los demás son de la forma $w_1 \pm 2n\pi$ y $\pi - w_1 \pm 2n\pi$, $n = 0, 1, \ldots$. (El *valor principal* de $w = u + iv = \operatorname{sen}^{-1} z$ se define como aquél para el que $-\pi/2$ u $\leqq \pi/2$ si $v \geqq 0$ y $-\pi/2 < u < \pi/2$ si $v < 0$.)

12.9 MAPEOS POR FUNCIONES ESPECIALES. *OPCIONAL*

En esta sección opcional, las funciones elementales se analizarán como mapeos desde un punto de vista geométrico. Lo anterior complementará el conocimiento del estudiante sobre tales funciones. Las propiedades de mapeo de las funciones analíticas en general se analizarán en el capítulo 16, junto con aplicaciones en el capítulo 17.

Por cálculo se sabe que es posible graficar una función *real* $y = f(x)$ en el plano xy. Para una función *compleja*

$$w = u + iv = f(z) \qquad (z = x + iy)$$

se requieren dos planos: el **plano** z en que se grafican los valores de z, y el **plano** w, en donde se grafican los valores correspondientes de la función $w = f(z)$. De esta manera, una función dada f asigna a cada punto z en su dominio de definición D el punto correspondiente $w = f(z)$. en el plano w. Se dice que f define un **mapeo** (aplicación) de D en el plano w. Para cualquier punto z_0 en D, el punto $w_0 = f(z_0)$ se denomina **imagen** de z_0 con respecto a f. Más generalmente, para los puntos de una curva C en D, los puntos imagen constituyen la **imagen** de C; de manera semejante para otros conjuntos de puntos en D.

A continuación se plantea la siguiente idea. Al graficar simples puntos y sus imágenes no se obtiene mayor conocimiento sobre las propiedades de mapeo de una función dada. Para lograr lo anterior es mucho mejor graficar y estudiar regiones y sus imágenes, o familias de curvas simples (por ejemplo, rectas paralelas o circunferencias concéntricas) y sus imágenes. Este método se explicará para las funciones elementales en términos de ejemplos selectos de importancia práctica.

Funciones lineales. Potencias enteras positivas de z

EJEMPLO 1 Mapeo $w = az + b$

Describir, en términos geométricos, las propiedades de mapeo de la función lineal $w = az + b$.

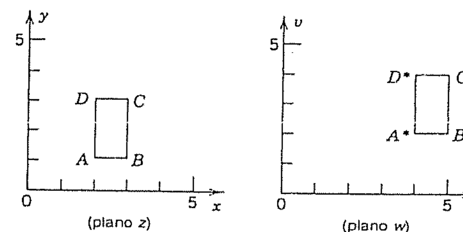


Figura 301. Traslación $w = z + 2 + i$.

Solución. si $a = 1$, se trata de una **traslación** $w = z + b$ que mueve (traslada) cada punto en la dirección de b a través de la misma distancia $|b|$. Por tanto, cada figura y su imagen son congruentes. En la figura 301 se muestra un ejemplo. $b = 0$ proporciona el **mapeo identidad** $w = z$. que deja fijo a cada punto.

Si $b = 0$, se obtiene $w = az$. Para $|a| = 1$. se tiene $a = e^{i\alpha}$ y $w = e^{i\alpha}z$, que es una rotación a lo largo de un ángulo α. En la figura 302 se muestra un ejemplo. Para a real con $0 < a < 1$ se obtiene una contracción uniforme y para a real con $a > 1$ se obtiene una dilatación uniforme. (Explicar lo anterior. ¿Qué sucede para a real negativa?)

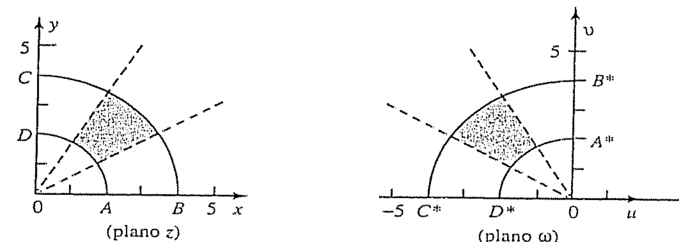


Figura 302. Rotación $w = iz$. (Ángulo de rotación $\pi/2$, en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj).

Combinando los resultados, se concluye que la función lineal general $w = az + b$ es una rotación y una dilatación (o contracción) $w_1 = az$ seguida por una traslación $w = w_1 + b$. Por ejemplo, en la figura 303 se muestran una rotación en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj a lo largo de un ángulo $\pi/4$ y una dilatación por el factor $|1 + i| = \sqrt{2}$ seguidas de una traslación vertical hacia arriba. ∎

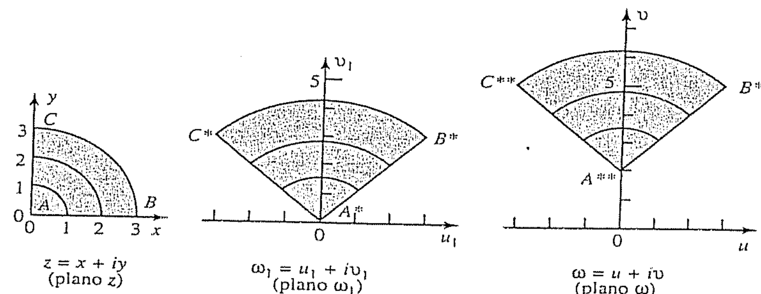


Figura 303. Transformación lineal $w = u + iv = (1 + i)z + 2i$, que consta de la rotación y dilatación $w_1 = u_1 + iv_1 = (1 + i)$ seguida de la traslación $w = w_1 + 2i$.

EJEMPLO 2 Mapeo $w = z^2$

Encontrar las imágenes de las circunferencias $|z| = r_0 = constante$ y de los rayos $\theta = \theta_0 = constante$ bajo el mapeo $w = z^2$. También encontrar la imagen de la región $1 \leqq |z| \leqq 3/2$, $\pi/6 < \theta < \pi/3$.

Solución. En términos de coordenadas polares,

$$w = Re^{i\phi} = z^2 = r^2 e^{2i\theta} \qquad (z = re^{i\theta}).$$

Lo anterior muestra que cada circunferencia $|z| = r_0$ es mapeada sobre la circunferencia $|w| = r_0^2$, y que cualquier rayo $\theta = \theta_0$ lo es sobre el rayo $\phi = 2\theta_0$. Por tanto, la región es mapeada sobre la región $1 \leqq |w| \leqq 9/4$, $\pi/3 < \phi < 2\pi/3$ en el plano w (ver la figura 304).

Las circunferencias y los rayos considerados se cortan formando ángulos rectos, y el mapeo $w = z^2$ preserva estos ángulos; las imágenes correspondientes también se intersecan formando ángulos rectos. Este hecho es característico de las funciones analíticas; preservan ángulos entre cualesquiera curvas que se corten, como se verá en el capítulo 16. Una excepción ocurre en los puntos en que $f'(z) = 0$. Para $w = z^2$ se tiene $w' = 2z = 0$ en $z = 0$; de hecho, se observa que las imágenes de los rayos no forman el mismo ángulo que los rayos mismos, sino que forman el *doble* de este ángulo. ∎

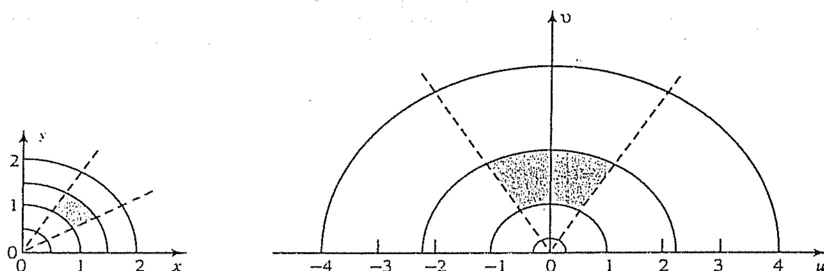


Figura 304. Mapeo $w = z^2$.

El ejemplo 2 es un caso modelo para todas las potencias enteras positivas de z^n. En términos de coordenadas polares,

$$w = Re^{i\phi} = z^n = r^n e^{in\theta}.$$

Lo anterior muestra que $w = z^n$ mapea circunferencias $|z| = r_0$ en circunferencias $|w| = r_0^n$, y rayos $\theta = \theta_0$ sobre rayos $\phi = n\theta_0$. Por ejemplo, $w = z^3$ triplica los ángulos en 0. Por tanto, $w = z^n$ mapea la región angular $0 \leqq \theta \leqq \pi/n$ sobre la mitad superior del plano w (figura 305).

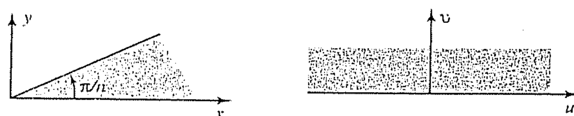


Figura 305. Mapeo definido por $w = z^n$.

Función exponencial y función logarítmica

Así como en los ejemplos previos, se mostrarán varias propiedades de los mapeos mediante la consideración de curvas y regiones para las que es posible obtener las

imágenes correspondientes sin necesidad de efectuar cálculos, sino simplemente aplicando propiedades de las funciones en consideración. Esta es la idea general que subyace en el análisis de toda la sección.

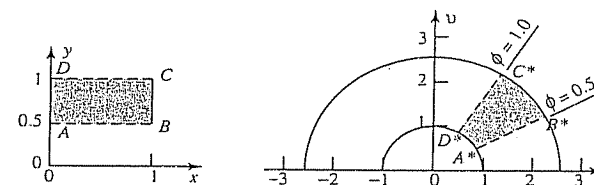


Figura 306. Mapeo por $w = e^z$ [ejemplo 3, inciso (b)].

EJEMPLO 3 Función exponencial $w = e^z$

Para $w = e^z$, encontrar la imagen de:

(a) las rectas $x = x_0 = constante$ y $y = y_0 = constante$.

(b) el rectángulo $0 \leqq x \leqq 1$, $\frac{1}{2} < y < 1$.

(c) la región fundamental $-\pi < y \leqq \pi$.

(d) la banda horizontal $0 \leqq y \leqq \pi$.

Solución. (a) Recuérdese de la sección 12.1 que $|w| = e^x$ y que $\arg w = y$. Por tanto, $x = x_0$ es mapeado sobre la circunferencia $|w| = e^{x_0}$, y $y = y_0$ lo es sobre el rayo $\arg w = y_0$.

(b) Por el inciso (a) se concluye que cualquier rectángulo con lados paralelos a los ejes de coordenadas es mapeado sobre una región acotada por porciones de los rayos y circunferencias. Ver la figura 306.

(c) Esta región fundamental es mapeada sobre todo el plano w (corte a lo largo del eje real negativo) sin el origen 0. Más generalmente, cada banda horizontal acotada por dos rectas $y = c$ y $y = c + 2\pi$ es mapeada sobre todo el plano w sin el origen. Lo anterior refleja el hecho de que $w = e^z$ es periódica con periodo $2\pi i$.

(d) La banda $0 \leqq y \leqq \pi$ es mapeada sobre la mitad superior del plano w. Su mitad derecha ($x > 0$) es mapeada sobre el exterior de la circunferencia unitaria $|w| = 1$, y su mitad izquierda ($x < 0$), sobre el interior sin 0 (figura 307). ∎

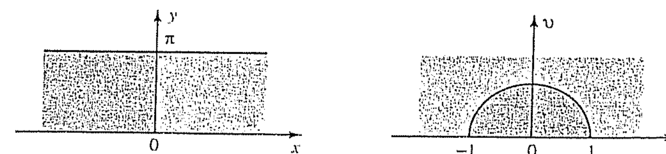


Figura 307. Mapeo por $w = e^z$ [ejemplo 3, inciso (d)].

Ahora se considerará el mapeo definido por el **logaritmo natural**. Para analizarlo se usará la siguiente idea y principio básica. *Las propiedades de la inversa de un mapeo $w = f(z)$ pueden obtenerse a partir de las propiedades del mapeo mismo mediante el intercambio de los roles de los planos z y w.* Dado que el logaritmo natural $w = u + iv = \ln z$ es la relación inversa de la función exponencial, entonces por el inciso (c) del ejemplo 3 se concluye que $w = \operatorname{Ln} z$, $z \neq 0$, (el valor principal de $\ln z$) mapea el plano z (corte a lo largo del eje real negativo y con $z = 0$ omitido) sobre la banda horizontal $-\pi < v \leqq \pi$ del plano w. Como el mapeo

$$w = \operatorname{Ln} z + 2\pi i$$

difiere de $w = \text{Ln}\, z$ por la traslación $2\pi i$ (verticalmente hacia arriba), entonces este mapeo transforma el plano z (corte como antes y 0 omitido) sobre la banda $\pi < v \leqq 3\pi$. De manera semejante para cada uno de la infinidad de mapeos

$$w = \ln z = \text{Ln}\, z \pm 2n\pi i \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

Las bandas horizontales correspondientes de ancho 2 (imágenes del plano z bajo estos mapeos) juntas cubren todo el plano w sin traslaparse. Se invita al lector a interpretar los otros incisos del ejemplo 3 en términos del mapeo $w = \text{Ln}\, z$, intercambiando los roles de z y w en el ejemplo.

En el capítulo 16 se analizarán las propiedades de mapeo de otras funciones (trigonométricas, hiperbólicas, lineales fraccionarias, etc.)

Problemas de la sección 12.9

Considerar el mapeo $w = (1 - i)z + 2$. Encontrar y graficar las imágenes de las curvas o regiones dadas.

1. $x = 0, 1, 2, 3$
2. $y = -2, 0, 2, 4$
3. $|z + 1| \leqq 1$

Graficar las imágenes de las siguientes regiones bajo el mapeo $w = z^2$.

4. $|z| \leqq 3$
5. $1.5 \leqq |z| < 2.1$
6. $|\arg z| \leqq \pi/8$
7. $|z| > 4$
8. $\pi/2 \leqq \arg z \leqq \pi$
9. $0 < |z| \leqq 1/2$
10. **(Curvas de nivel)** Considerar $w = u + iv = z^2$. Demostrar que las *curvas de nivel* de u; es decir, las curvas $u =$ *constante* en el plano z, son hipérbolas con asíntotas $y = \pm x$. Graficar unas cuantas.
11. Encontrar las curvas de nivel $v =$ *constante* en el problema 10 y graficar unas cuantas.
12. Demostrar que $w = u + iv = z^2$ mapea $x = c$ sobre la parábola $v^2 = 4c^2(c^2 - u)$ y grafíquela para $c = 2, 1, \frac{1}{2}, 0$.
13. Encontrar la imagen de $y = k$ bajo el mapeo $w = u + iv = z^2$

Encontrar y graficar las imágenes de las siguientes curvas y regiones bajo el mapeo $w = 1/z$, en donde $z \neq 0$.

14. $|z| < 1$
15. $|z| = 1/2$
16. $y > 0$

Encontrar y graficar las imágenes de las siguientes curvas y regiones bajo el mapeo $w = e^z$.

17. $x \leqq 1, \quad |y| \leqq \pi$
18. $x = 0$
19. $x > 1/2, \quad 0 < y < \pi$
20. $|x| < a, \quad |y| < b$

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 12

1. La definición de multiplicación de números complejos parece extraña a primera vista. ¿Cuál es su motivación?
2. ¿Cuál es el significado geométrico de la multiplicación de un número complejo por i?
3. Si se proporcionan $|z|$ y arc tan (y/x), ¿el número $|z|e^{i\theta}$ está determinado de manera única?
4. ¿Qué se entiende por el valor principal del argumento de un número complejo?
5. ¿Cuál es la desigualdad del triángulo? ¿Qué significa geométricamente?

6. ¿Cuál es la fórmula de De Moivre y para qué es útil?
7. Escribir de memoria qué entiende por el hecho de que $f(z)$ es analítica en un dominio D. Por el hecho de que $f(z)$ es analítica en un punto. ¿Qué es un dominio?
8. ¿Son analíticas $|z|$, Re z e Im z? Justificar las respuestas.
9. ¿Cómo probaría el lector la analicitidad?
10. La fórmula para la derivada se parece a la del cálculo, pero existe una gran diferencia. Explicar lo anterior.
11. ¿Es posible que una función sea diferenciable en un punto sin que sea analítica ahí?
12. ¿Qué es una función entera? Proporcionar ejemplos y contraejemplos.
13. ¿Cómo se define e^z? ¿Qué es una banda fundamental?
14. ¿Cuáles propiedades de e^z son semejantes a las de e^x? ¿Cuál es diferente?
15. ¿Cómo están relacionados cos z y sen z con e^z?
16. ¿Tiene soluciones la ecuación sen $z = -100$?
17. ¿En qué sentido el logaritmo complejo es mucho más complicado que el logaritmo real?
18. ¿Cómo se define Ln z?
19. ¿Qué recuerda el lector sobre $\sqrt[4]{1}$, $\sqrt[8]{1}$, $\sqrt[n]{1}$?
20. Si se conocen los valores de $\sqrt[8]{1}$, ¿cómo se obtienen a partir de ellos los valores de $\sqrt[8]{z}$ para cualquier z?

Calcular lo siguiente en la forma $x + iy$

21. $(-2 + 6i)^2$
22. $(1 + i)^4$
23. $(6 + i)/(2 - 3i)$
24. $25/(3 + 4i)^2$
25. $\dfrac{52.5 - 12.5i}{3 - i}$
26. $\dfrac{202}{10 - i}$
27. $\dfrac{(1 + i)^{10}}{(1 - i)^6}$
28. $\dfrac{23 + 2i}{2 - 2.5i}$

Calcular

29. Re $\dfrac{1}{2 + i}$
30. Im $\dfrac{2 - i}{4 - 3i}$
31. Re $\dfrac{16 + 2i}{3 + 2i}$
32. Re $\dfrac{-4 - 6i}{(1 + i)^6}$
33. $\left|\dfrac{(3 + 4i)^4}{(3 - 4i)^3}\right|$
34. $\left|\dfrac{iz}{\bar{z}}\right|$
35. $\left|\dfrac{13 - 17i}{17 + 13i}\right|$
36. $\dfrac{4}{|7 - \pi i|}$

Encontrar y graficar todos los valores de las raíces.

37. $\sqrt{-i}$
38. $\sqrt{3 + 4i}$
39. $\sqrt{-8 - 6i}$
40. $\sqrt[6]{-1}$

Representar en forma polar lo siguiente.

41. $-6 + 6i$
42. $17 + 4i$
43. $\sqrt{10}/(3 + i)$
44. $2.6 + 1.7i$

Graficar las siguientes curvas o regiones en el plano complejo.

45. $|z + 1 - 3i| = \frac{1}{2}$
46. $2 < |z + i| < 3$
47. Re $z \geqq$ Im z
48. Re $(z^2) \leqq 1$

Encontrar una función analítica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ tal que

49. $v = y/(x^2 + y^2)$
50. $u = e^{x^2 - y^2} \cos 2xy$
51. $u = \cos x \cosh y$
52. $u = x^2 - 2xy - y^2$

¿Son armónicas las siguientes funciones? En caso afirmativo, encontrar una armónica conjugada.

53. x^2y^2
54. $e^{x/2} \cos \frac{1}{2}y$
55. $x^3 - 3xy^2$
56. sen x cosh y

Encontrar el valor de la derivada de

57. $2/z^4$ en $1 + i$
58. $e^{1/z}$ en i
59. sen z en $3 + 2i$
60. cosh z en $4 - 3i$

Resumen del capítulo 12

Números complejos

Funciones analíticas complejas

Para operaciones aritméticas con **números complejos**

(1) $$z = x + iy = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta),$$

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan(y/x)$, y para su representación en el plano complejo, ver las secciones 12.1 y 12.2.

Una función compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es **analítica** en un dominio D si tiene **derivada** (sección 12.4)

(2) $$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

en cualquier punto de D. También, $f(z)$ es *analítica en un punto* $z = z_0$ si tiene derivada en una vecindad de z_0 (no sólo en z_0 mismo).

Si $f(z)$ es analítica en D, entonces $u(x, y)$ y $v(x, y)$ satisfacen las (¡bastante importantes!) **ecuaciones de Cauchy-Riemann** (sección 12.5)

(3) $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

en todos los puntos de D. Entonces u y v también satisfacen la **ecuación de Laplace**

(4) $$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad v_{xx} + v_{yy} = 0$$

en todos los puntos de D. Si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son continuas y tienen derivadas parciales *continuas* en D que satisfacen (3) en D, entonces $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en D. Ver la sección 12.5. (En el capítulo 17 se volverá a la ecuación de Laplace y al análisis complejo.)

La **función exponencial** compleja (sección 12.6)

(5) $$e^z = \exp z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

es periódica con periodo $2\pi i$, se reduce a e^x si $z = x$ ($y = 0$), y su derivada es e^z.

Las **funciones trigonométricas** son (sección 12.7)

(6) $$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$$
$$\operatorname{sen} z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$$

$\tan z = (\operatorname{sen} z)/\cos z$, $\cot z = 1/\tan z$, etc.

Las **funciones hiperbólicas** son (sección 12.7)

(7) $$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \cos iz,$$
$$\operatorname{senh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = -i \operatorname{sen} iz,$$

etc. Una **función entera** es una función que es analítica en todos los puntos del plano complejo. Las funciones en (5)-(7) son enteras.

El **logaritmo natural** es (sección 12.8)

(8) $$\ln z = \ln|z| + i \arg z \qquad (\arg z = \theta,\ z \neq 0)$$
$$= \ln|z| + i \operatorname{Arg} z \pm 2n\pi i \qquad (n = 0, 1, \cdots),$$

en donde Arg z es el **valor principal** de arg z; es decir, $-\pi < \operatorname{Arg} z \leqq \pi$.

Se observa que $\ln z$ posee una infinidad de valores. Al tomar $n = 0$ se obtiene el **valor principal** Ln z de $\ln z$; así

(8*) $$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z.$$

Las **potencias generales** se definen como (sección 12.8)

(9) $$z^c = e^{c \ln z} \qquad (c \text{ complejo, } z \neq 0).$$

Una función compleja $w = f(z)$ define un mapeo de su dominio de definición en el plano z hacia el plano w. Los mapeos definidos por las funciones (5), (8) y algunos otros se analizaron en la sección 12.9. (En el capítulo 16 se volverá a los mapeos de funciones analíticas.)

Capítulo

13

Integración compleja

La integración en el plano complejo es importante por dos razones:

1. En aplicaciones aparecen integrales reales que pueden evaluarse mediante integración compleja, mientras que los métodos usuales de cálculo integral real fracasan.

2. Algunas propiedades básicas de las funciones analíticas pueden establecerse por integración, mientras que sería difícil demostrarlas aplicando otros métodos. La existencia de derivadas superiores de funciones analíticas es una sorprendente propiedad de este tipo.[1]

En este capítulo se definen y comentan las integrales complejas. El resultado más importante de todo el capítulo es el teorema de la integral de Cauchy (sección 13.3), que implica la importante fórmula de la integral de Cauchy (sección 13.5). En la sección 13.6 se demostrará que si una función es analítica, entonces tiene derivadas de cualquier orden. Por tanto, en este sentido las funciones analíticas complejas se comportan de manera mucho más sencilla que las funciones reales de variables reales.

(La integración por medio de residuos y las aplicaciones a integrales reales se considerarán en el capítulo 15.)

Prerrequisito para este capítulo: Capítulo 12.
Bibliografía: Apéndice 1, parte D.
Respuestas a los problemas: Apéndice 2.

13.1 INTEGRAL DE LÍNEA EN EL PLANO COMPLEJO

Así como en cálculo real, se distingue entre integrales definidas e integrales indefinidas o antiderivadas. Una **integral indefinida** es una función cuya derivada es igual a

[1] Demostrado recientemente, en 1961, sin recurrir a métodos de integración o métodos equivalentes [por P. Porcelli y E. H. Connell (*Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 67, págs 177–181), quienes aplicaron un teorema de topología de G T. Whyburn].

una función analítica dada en una región. Si se invierten las fórmulas conocidas de derivación, pueden hallarse muchos tipos de integrales indefinidas.

La definición de integrales definidas, o integrales de línea, de funciones complejas $f(z)$ de $z = x + iy$ requiere algo de información sobre curvas en el plano complejo, que se proporciona a continuación.

Trayectoria de integración. En el caso de una integral definida *real*, en cálculo se integra sobre un intervalo (un segmento) de la recta real. En el caso de una integral definida *compleja* —una integral de línea— se integra a lo largo de una curva C en el plano complejo[2], denominada **trayectoria de integración**. Esta curva puede representarse en la forma

(1) $$\boxed{z(t) = x(t) + iy(t)} \qquad (a \leqq t \leqq b)$$

donde t es un parámetro real. Por ejemplo,

$$z(t) = t + 3it \qquad (0 \leqq t \leqq 2)$$

representa una porción de la recta $y = 3x$ (¡graficarla!).

$$z(t) = 4 \cos t + 4i \text{ sen } t \qquad (-\pi \leqq t \leqq \pi)$$

define la circunferencia $|z| = 4$, etc. (A continuación se proporcionan más ejemplos.)

C se denomina **curva suave** si su derivada es continua y diferente de cero

$$\dot{z}(t) = \frac{dz}{dt} = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$$

en cada punto. Geométricamente, lo anterior significa que C tiene una tangente continua en cada uno de sus puntos, como se deduce directamente a partir de la definición

$$\dot{z}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} \qquad \text{(Figura 308).}$$

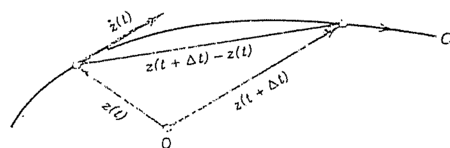


Figura 308. Vector tangente $\dot{z}(t)$ de una curva C en el plano complejo, dado por $z(t)$. La flecha en la curva indica el sentido positivo (sentido de t creciente).

[2] En realidad, a menudo sólo a lo largo de una porción (un *arco*) de una curva, aunque en cualquier caso para facilitar las cosas se dirá "**curva**". Quienes hayan estudiado la sección 9.1 observarán que este análisis es semejante.

Definición de la integral de línea compleja

Esto es semejante al método aplicado en cálculo. En el plano complejo se consideran una curva suave C dada en la forma (1) y una función continua $f(z)$ definida (por lo menos) en cada punto de C. Luego, el intervalo $a \leqq t \leqq b$ en (1) se subdivide (se hace una "partición") por los puntos

$$t_0 \,(= a), \quad t_1, \quad \cdots, \quad t_{n-1}, \quad t_n \,(= b)$$

donde $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$. A esta partición corresponde una subdivisión de C por los puntos

$$z_0, \quad z_1, \quad \cdots, \quad z_{n-1}, \quad z_n \,(= Z) \qquad \text{(Figura 309),}$$

en donde $z_j = z(t_j)$. Sobre cada porción de la subdivisión de C se elige un punto arbitrario, por ejemplo, un punto ζ_1 entre z_0 y z_1 (es decir, $\zeta_1 = z(t)$, en donde t satisface $t_0 \leqq t \leqq t_1$), un punto ζ_2 entre z_1 y z_2, etc. Luego se forma la sumatoria

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} f(\zeta_m)\, \Delta z_m$$

donde

$$\Delta z_m = z_m - z_{m-1}.$$

Lo anterior se efectúa para todo $n = 2, 3, \cdots$ de manera completamente independiente, aunque de modo que el mayor $|\Delta t_m| = |t_m - t_{m-1}|$ tienda a cero cuando $n \to \infty$; esto implica que el mayor $|\Delta z_m|$ también tiende a cero porque no puede ser mayor que la longitud de arco de C desde z_{m-1} hasta z_m, y z_m tiende a cero, ya que la longitud de arco de la curva suave C es una función continua de t. El límite de la sucesión de números complejos S_2, S_3, $\cdots$ así obtenida se denomina **integral de línea** (o simplemente *integral*) de $f(z)$ sobre la curva orientada C (denominada **trayectoria de integración**), y se denota por

(3) $$\boxed{\int_C f(z)\, dz.}$$

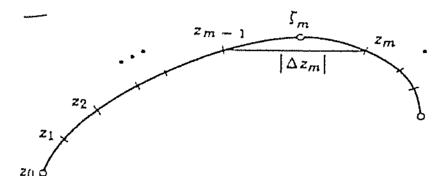


Figura 309. Integral de línea compleja.

Si C es una **trayectoria cerrada** (una cuyo punto terminal Z coincide con su punto inicial z_0, como en el caso de una circunferencia o una curva en forma de 8), entonces también se usa la notación (estándar)

$$\oint_C f(z)\, dz.$$

En la siguiente sección se proporcionan algunos ejemplos.

Suposición general. *Todas la trayectorias de integración de integrales de línea complejas son* **suaves por secciones**; *es decir, constan de un número finito de curvas suaves unidas extremo con extremo.*

Existencia de la integral de línea compleja[3]

Con base en las suposiciones de que $f(z)$ es continua y C es suave por secciones, se concluye la existencia de la integral de línea (3). De hecho, así como en el capítulo previo, se escribirá $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. También se hace

$$\zeta_m = \xi_m + i\eta_m \qquad \text{y} \qquad \Delta z_m = \Delta x_m + i\Delta y_m.$$

Así, (2) puede escribirse como

$$S_n = \sum (u + iv)(\Delta x_m + i\Delta y_m) \tag{4}$$

en donde $u = u(\xi_m, \eta_m)$, $v = v(\xi_m, \eta_m)$ y se suma sobre m desde 1 hasta n. Ahora es posible dividir S_n en cuatro sumatorias:

$$S_n = \sum u\, \Delta x_m - \sum v\, \Delta y_m + i\left[\sum u\, \Delta y_m + \sum v\, \Delta x_m\right].$$

Estas sumatorias son reales. Como f es continua, entonces u y v son continuas. Por tanto, si se deja que n tienda a infinito de la manera ya mencionada, entonces los mayores Δx_m y Δy_m tenderán a cero y cada sumatoria del miembro derecho se vuelve una integral de línea real:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_C f(z)\, dz = \int_C u\, dx - \int_C v\, dy + i\left[\int_C u\, dy + \int_C v\, dx\right]. \tag{5}$$

Lo anterior muestra que con las suposiciones establecidas (f continua y C suave por secciones) la integral de línea (3) existe y su valor es independiente de cómo se elijan las subdivisiones y los puntos intermedios ζ_m. ∎

Tres propiedades básicas de las integrales de línea complejas

A continuación se mencionan tres propiedades de las integrales de línea complejas bastante semejantes a las correspondientes a integrales definidas reales (y a

[3] En caso de no querer mencionar integrales de línea reales, la expresión (1) de la siguiente sección puede considerarse como la definición de la integral de línea compleja

las integrales de línea reales), y que se concluyen inmediatamente a partir de la definición.

1. La integración es una **operación lineal**; es decir, una suma de dos (o más) funciones puede integrarse término a término, y es posible "sacar" de la integral a los factores constantes:

$$\int_C [k_1 f_1(z) + k_2 f_2(z)]\, dz = k_1 \int_C f_1(z)\, dz + k_2 \int_C f_2(z)\, dz. \tag{6}$$

2. Al descomponer C en dos sumandos C_1 y C_2 (figura 310), se obtiene

$$\int_C f(z)\, dz = \int_{C_1} f(z)\, dz + \int_{C_2} f(z)\, dz. \tag{7}$$

3. Al invertir el sentido de integración se obtiene el negativo del valor original:

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\, dz = -\int_{Z}^{z_0} f(z)\, dz; \tag{8}$$

por lo que *la trayectoria* C con puntos terminales z_0 y Z *es la misma*; a la izquierda se integra desde z_0 hasta Z, y a la derecha se integra desde Z hasta z_0.

En la siguiente sección se presentan métodos de integración y ejemplos trabajados de integrales, y en su parte final se presentan problemas.

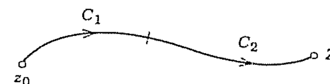


Figura 310. Subdivisión de una trayectoria fórmula (7).

13.2 DOS MÉTODOS DE INTEGRACIÓN. EJEMPLOS

La integración compleja es rica en métodos para evaluar integrales. A continuación se analizarán los dos primeros de tales métodos, y posteriormente, en este capítulo y en el capítulo 15, se proporcionarán otros.

Primer método: Uso de una representación de la trayectoria

Este método se aplica a cualquier función compleja continua.

Teorema 1 (Integración mediante el empleo de la trayectoria)

Sea C una trayectoria suave por secciones, representada por $z = z(t)$, donde $a \leq t \leq b$. Sea $f(z)$ una función continua sobre C. Entonces

$$\int_C f(z)\, dz = \int_a^b f[z(t)]\dot{z}(t)\, dt \qquad \left(\dot{z} = \frac{dz}{dt}\right). \tag{1}$$

Demostración. El miembro izquierdo de (1) está dado por (5), sección 13.1, en términos de integrales de línea reales, y se demostrará que el miembro derecho de (1) también es igual a (5). Se tiene que $z = x + iy$, por lo que $\dot{z} = \dot{x} + i\dot{y}$. Simplemente se escribe u por $u[x(t), y(t)]$ y v por $v[x(t), y(t)]$. También se tiene $dx = \dot{x}\, dt$ y $dy = \dot{y}\, dt$. Por consiguiente, en (1),

$$\int_a^b f[z(t)]\dot{z}(t)\, dt = \int_a^b (u + iv)(\dot{x} + i\dot{y})\, dt$$

$$= \int_C [u\, dx - v\, dy + i(u\, dy + v\, dx)].$$

La expresión en el último renglón es el miembro derecho de (5) en la sección 13.1. Esta era la afirmación, por lo que se ha completado la demostración. ∎

Pasos para la aplicación del teorema 1.

(A) Representar la trayectoria C en la forma $z(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$.

(B) Calcular la derivada $\dot{z}(t) = dz/dt$.

(C) Sustituir $z(t)$ por todo z en $f(z)$ (por tanto, $x(t)$ por x y $y(t)$ por y).

(D) Integrar $f[z(t)]\dot{z}(t)$ sobre t desde a hasta b.

EJEMPLO 1 Un resultado básico: la integral de 1/z alrededor de la circunferencia unitaria

Demostrar que

$$(2) \qquad \boxed{\oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i}$$

(C es la circunferencia unitaria, en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj).

Este es un resultado muy importante que será necesario muy a menudo.

Solución. La circunferencia unitaria C (ver la sección 12.3) puede representarse en la forma

$$z(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi),$$

de modo que la integración en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj corresponde a un incremento de t desde 0 hasta 2π. Por diferenciación,

$$\dot{z}(t) = -\operatorname{sen} t + i \cos t.$$

También, $f[z(t)] = 1/z(t)$. Ahora, la fórmula (1) produce el resultado deseado

$$\oint_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos t + i \operatorname{sen} t}(-\operatorname{sen} t + i \cos t)\, dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

La fórmula de Euler (sección 12.6) es de utilidad para ahorrar esfuerzo de cómputo al representar la circunferencia unitaria simplemente como

$$z(t) = e^{it}. \quad \text{Entonces} \quad 1/z(t) = e^{-it}, \qquad dz = ie^{it}\, dt.$$

Como antes, ahora se obtiene con más rapidez

$$\oint_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} e^{-it} ie^{it}\, dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i. \qquad ∎$$

EJEMPLO 2 Integral de potencias enteras.

Sea $f(z) = (z - z_0)^m$, en donde m es un entero y z_0 es una constante. Integrar en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de la circunferencia C de radio ρ con centro en z_0 (figura 311).

Solución. C puede representarse en la forma

$$z(t) = z_0 + \rho(\cos t + i \operatorname{sen} t) = z_0 + \rho e^{it} \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi).$$

Entonces, se tiene

$$(z - z_0)^m = \rho^m e^{imt}, \qquad dz = i\rho e^{it}\, dt$$

y se obtiene

$$\oint_C (z - z_0)^m\, dz = \int_0^{2\pi} \rho^m e^{imt} i\rho e^{it}\, dt = i\rho^{m+1}\int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t}\, dt.$$

Por la fórmula de Euler (5) en la sección 12.6, el miembro derecho es igual a

$$i\rho^{m+1}\left[\int_0^{2\pi} \cos(m + 1)t\, dt + i\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(m + 1)t\, dt\right].$$

Si $m = -1$, se tiene $\rho^{m+1} = 1$, $\cos 0 = 1$, $\operatorname{sen} 0 = 0$ y así se obtiene $2\pi i$. Para enteros $m \neq 1$, cada una de las dos integrales es cero porque se integra sobre un intervalo de longitud 2π, igual a un periodo del seno y del coseno. Por tanto, el resultado es

$$(3) \qquad \boxed{\oint_C (z - z_0)^m\, dz = \begin{cases} 2\pi i & (m = -1), \\ 0 & (m \neq -1 \text{ y entero}). \end{cases}} \qquad ∎$$

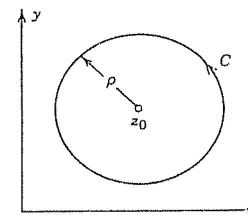


Figura 311. Trayectoria en el ejemplo 2.

Dependencia con respecto a la trayectoria. A continuación se presenta un hecho muy importante. Si una función dada $f(z)$ se integra desde un punto z_0 hasta un punto z_1 a lo largo de trayectorias diferentes, entonces en general las integrales tendrán valores distintos. En otras palabras, ***una integral de línea compleja depende no sólo de***

los puntos terminales de la trayectoria, sino en general también depende de la trayectoria misma. Considerar el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Integral de una función no analítica. Dependencia con respecto a la trayectoria.

Integrar $f(z) = \text{Re } z = x$ desde 0 hasta $1 + i$ (a) a lo largo de C^* en la figura 312, (b) a lo largo de C, que consta de C_1 y C_2.

Solución. (a) C^* puede representarse como $z(t) = t + it$ $(0 \leq t \leq 1)$. Por tanto,

$$\dot{z}(t) = 1 + i \qquad \text{y} \qquad f[z(t)] = x(t) = t \qquad \text{(sobre } C^*\text{)}.$$

A continuación se calcula

$$\int_{C^*} \text{Re } z \, dz = \int_0^1 t(1 + i) \, dt = \tfrac{1}{2}(1 + i).$$

(b) C_1 puede representarse como $z(t) = t$ $(0 \leq t \leq 1)$. Por tanto,

$$\dot{z}(t) = 1 \qquad \text{y} \qquad f[z(t)] = x(t) = t \qquad \text{(sobre } C_1\text{)}.$$

C_2 puede representarse como $z(t) = 1 + it$ $(0 \leq t \leq 1)$. Por tanto,

$$\dot{z}(t) = i \qquad \text{y} \qquad f[z(t)] = x(t) = 1 \qquad \text{(sobre } C_2\text{)}.$$

Aplicando (7) de la sección 13.1, se calcula

$$\int_C \text{Re } z \, dz = \int_{C_1} \text{Re } z \, dz + \int_{C_2} \text{Re } z \, dz = \int_0^1 t \, dt + \int_0^1 1 \cdot i \, dt = \tfrac{1}{2} + i.$$

Observar que este resultado difiere del resultado en el inciso (a). ∎

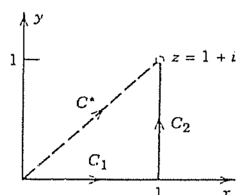


Figura 312. Trayectorias en el ejemplo 3.

Segundo método: Integración indefinida

En cálculo real, si para una función continua dada $f(x)$ se conoce una $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$, entonces por el primer teorema fundamental del cálculo integral se tiene que

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) \qquad [F'(x) = f(x)].$$

Este método se extiende a funciones analíticas complejas bajo las condiciones del siguiente teorema, y es mucho más sencillo que el método recientemente analizado, una vez que se ha encontrado una $F(z)$ cuya derivada $F'(z)$ es igual a la función $f(z)$ dada a integrar. Las fórmulas de diferenciación a menudo son de utilidad para determinar $F(z)$, de modo que el método reviste gran importancia práctica.

Teorema 2 (Integración indefinida de funciones analíticas).

Sea $f(z)$ analítica en un dominio D simplemente conexo[4]. Entonces en el dominio D existe una integral indefinida de $f(z)$; es decir, una función analítica $F(z)$ tal que $F'(z) = f(z)$ en D, y para todas las trayectorias en D que unen dos puntos z_0 y z_1 en D se tiene

$$(4) \qquad \boxed{\int_{z_0}^{z_1} f(z) \, dz = F(z_1) - F(z_0)} \qquad [F'(z) = f(z)].$$

(Observar que es posible escribir z_0 y z_1 en vez de D, ya que se obtiene el mismo valor para todos estos C desde z_0 hasta z_1.)

La demostración de este teorema se proporciona en la sección 13.4 (usando el teorema de la integral de Cauchy, que se analizará en la siguiente sección).

Si $f(z)$ es entera (sección 12.6), entonces para D es posible considerar el plano complejo (que ciertamente es simplemente conexo).

EJEMPLO 4

$$\int_0^{1+i} z^2 \, dz = \frac{1}{3} z^3 \Big|_0^{1+i} = \frac{1}{3}(1 + i)^3 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} i$$ ∎

EJEMPLO 5

$$\int_{-\pi i}^{\pi i} \cos z \, dz = \text{sen } z \Big|_{-\pi i}^{\pi i} = 2 \text{ sen } \pi i = 2i \text{ senh } \pi = 23.097i$$ ∎

EJEMPLO 6

$$\int_{8+\pi i}^{8-3\pi i} e^{z/2} \, dz = 2e^{z/2} \Big|_{8+\pi i}^{8-3\pi i} = 2(e^{4-3\pi i/2} - e^{4+\pi i/2}) = 0$$

ya que e^z es periódica con periodo $2\pi i$.

EJEMPLO 7

$$\int_{-i}^{i} \frac{dz}{z} = \text{Ln } i - \text{Ln } (-i) = \frac{i\pi}{2} - \left(-\frac{i\pi}{2}\right) = i\pi.$$

Aquí D es el plano complejo sin 0 y el eje real negativo (en donde $\text{Ln } z$ no es analítica) y resulta evidente que es un dominio simplemente conexo. ∎

---

[4] D se denomina ***simplemente conexo*** si toda curva simple cerrada (curva cerrada sin autointersecciones) en D contiene solamente puntos de D.

EJEMPLO 8 La conexidad simple en el teorema 2 es esencial.

Al aplicar la ecuación (4) con $z_1 = z_0$ se obtiene $F(z_0) - F(z_0) = 0$: la integral sobre una trayectoria *cerrada* es cero. Sin embargo (ver el ejemplo 1)

$$\oint \frac{dz}{z} = 2\pi i \qquad \text{(en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj sobre la circunferencia unitaria)}$$

aunque $1/z$ es analítica en la corona $\frac{1}{2} < z < \frac{3}{2}$; este dominio no es simplemente conexo. ∎

Cotas para el valor absoluto de integrales

Bastante a menudo es necesario calcular el valor absoluto de integrales de línea complejas. La fórmula fundamental es

$$\left| \int_C f(z)\,dz \right| \leqq ML \qquad \text{(Desigualdad } ML\text{);} \tag{5}$$

L es la longitud de C y M es una constante tal que $|f(z)| \leqq M$ en todos los puntos de C.

Demostración. Se considera S_n según se definió en (2) de la sección 13.1. Debido a la desigualdad del triángulo generalizada (6) de la sección 12.2, se obtiene

$$|S_n| = \left| \sum_{m=1}^{n} f(\zeta_m)\,\Delta z_m \right| \leqq \sum_{m=1}^{n} |f(\zeta_m)|\,|\Delta z_m| \leqq M \sum_{m=1}^{n} |\Delta z_m|.$$

Luego, $|\Delta z_m|$ es la longitud de la cuerda cuyos puntos terminales son z_{m-1} y z_m (ver la figura 309 en la sección 13.1). Por tanto, la suma en el miembro derecho representa la longitud L^* de la recta quebrada de cuerdas cuyos puntos terminales son $z_0, z_1, \cdots, z_m$ $(= Z)$. Si n tiende a infinito, de modo que el mayor $|\Delta z_m|$ tiende a cero como en la sección 13.1, entonces por la definición de longitud de una curva se tiene que L^* tiende a la longitud L de la curva C. Con base en lo anterior se concluye la desigualdad (5). ∎

A partir de (5) no es posible darse cuenta de qué tan próxima está la cota ML del verdadero valor absoluto de la integral, aunque esto no constituye ninguna desventaja en la aplicación de (5), como se verá más tarde. Por ahora se explicará el uso práctico de (5) mediante un ejemplo sencillo.

EJEMPLO 9 Cálculo de una integral.

Encontrar una cota superior del valor absoluto de la integral

$$\int_C z^2\,dz, \qquad C \text{ es el segmento de recta que va de 0 a } 1 + i.$$

Solución. Por (5), con $L = \sqrt{2}$ y $|f(z)| = |z^2| \leqq 2$ en C se obtiene

$$\left| \int_C z^2\,dz \right| \leqq 2\sqrt{2} = 2.8284.$$

El valor absoluto de la integral es $|-2/3 + 2/3i| = 2/3\sqrt{2} = 0.9428$ (ver el ejemplo 4). ∎

Problemas de las secciones 13.1-13.2

Encontrar una representación $z = z(t)$ del segmento de recta con puntos terminales

1. $z = 0$ y $z = 1 + 2i$
2. $z = -3 + 2i$ y $z = -4 + 5i$
3. $z = 4 + 2i$; y $z = 3 + 5i$
4. $z = 0$ y $z = 5 + 10i$
5. $z = -4i$ y $z = -7 + 38i$
6. $z = 1 - i$ y $z = 9 - 5i$

¿Qué curvas representan las siguientes funciones?

7. $(1 + 2i)t, \quad 0 \leqq t \leqq 3$
8. $3 - it, \quad -1 \leqq t \leqq 1$
9. $1 - i - 2e^{it}, \quad 0 \leqq t \leqq \pi$
10. $2 + i + 3e^{it} \quad 0 \leqq t < 2\pi$
11. $t + 3t^2 i, \quad -1 \leqq t \leqq 2$
12. $t + 2it^3, \quad -2 \leqq t \leqq 2$
13. $\cos t + 2i \operatorname{sen} t, \quad -\pi < t < \pi$
14. $t + t^{-1}i, \quad \frac{1}{2} \leqq t \leqq 5$

Representar las siguientes curvas en la forma $z = z(t)$.

15. $|z - 3 + 4i| = 4$
16. $|z - i| = 2$
17. $y = 1/x$ desde $(1, 1)$ hasta $(3, \frac{1}{3})$
18. $y = x^2$ desde $(0, 0)$ hasta $(2, 4)$
19. $x^2 + 4y^2 = 4$
20. $4(x - 1)^2 + 9(y + 2)^2 = 36$

Evaluar $\int_C f(z)\,dz$ por el método del teorema 1 y comprobar el resultado aplicando el teorema 2.

21. $f(z) = az + b$, C el segmento de recta desde $-1 - i$ hasta $1 + i$.
22. $f(z) = e^{2z}$, C el segmento del problema 1.
23. $f(z) = z^3$, C la semicircunferencia $|z| = 2$ desde $-2i$ hasta $2i$ en el semiplano derecho.
24. $f(z) = 5z^2$, C la frontera del triángulo con vértices 0, 1, i (en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj).

Evaluar $\int_C f(z)\,dz$, en donde

25. $f(z) = 2z^4 - z^{-4}$, C la circunferencia unitaria (en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj).
26. $f(z) = \operatorname{Re} z$, C la parábola $y = x^2$ desde 0 hasta $1 + i$.
27. $f(z) = \operatorname{Im} z$, C la circunferencia $|z| = r$ (en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj).
28. $f(z) = 4z - 3$, C el segmento de recta desde i hasta $1 + i$.
29. $f(z) = (z - 1)^{-1} + 2(z - 1)^{-2}$, C la circunferencia $|z - 1| = 4$ (en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj).
30. $f(z) = \operatorname{sen} z$, C el segmento de recta desde 0 hasta i.
31. $f(z) = e^{2z}$. C el segmento vertical desde πi hasta $2\pi i$.
32. $f(z) = z \operatorname{coz} z^2$, C cualquier trayectoria desde 0 hasta πi.

33. $f(z) = \cosh 3z$, C cualquier trayectoria desde $\pi i/6$ hasta 0.
34. $f(z) = e^z$, C la frontera del cuadrado con vértices 0, 1, $1 + i$, i (en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj).
35. $f(z) = \text{Re}(z^2)$, C el cuadrado del problema 34.
36. $f(z) = \text{Im}(z^2)$, C el cuadrado del problema 34.
37. $f(z) = \bar{z}$. C la parábola $y = x^2$ desde 0 hasta $1 + i$.
38. $f(z) = (z-1)^{-1} - (z-1)^{-2}$, C la circunferencia $|z-1| = \frac{1}{2}$ (en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj).
39. $f(z) = \text{sen}^2 z$, C la semicircunferencia $|z| = \pi$ desde $-\pi i$ hasta πi en el semiplano derecho.
40. $f(z) = \sec^2 z$, C cualquier trayectoria desde $\pi i/4$ hasta $\pi/4$ en el disco unitario.
41. Evaluar $\int_C \text{Im}(z^2)\,dz$ desde 0 hasta $2 + 4i$ a lo largo (a) del segmento de recta, (b) del eje x hasta 2 y luego verticalmente hasta $2 + 4i$, (c) de la parábola $y = x^2$.
42. Evaluar $\int_C (z^{-5} + z^3)\,dz$ desde 1 hasta -1 a lo largo (a) del arco superior de la circunferencia unitaria, (b) del arco inferior de la circunferencia unitaria.
43. Evaluar $\int_C |z|\,dz$ desde A: $z = -1$ hasta B: $z = i$ a lo largo (a) del segmento de recta AB, (b) de la circunferencia unitaria en el semiplano izquierdo, (c) de la circunferencia unitaria en el semiplano derecho.
44. Demostrar la expresión (6) en la sección 13.1.
45. Comprobar la expresión (6) de la sección 13.1 para $k_1f_1 + k_2f_2 = 3z - z^2$, donde C es la mitad superior de la circunferencia unitaria desde 1 hasta -1.
46. Comprobar la expresión (7) de la sección 13.1 para $f(z) = 1/z$, donde C es la circunferencia unitaria, C_1 es su mitad superior y C_2 es su mitad inferior.
47. Comprobar la expresión (8) de la sección 13.1 para $f(z) = z^2$, donde C es el segmento de recta desde $-1 - i$ hasta $1 + i$.

Aplicando la desigualdad ML (5), encontrar cotas superiores para las siguientes integrales, donde C es el segmento de recta que va de 0 a $3 + 4i$.

48. $\int_C \text{Ln}(z + 1)\,dz$ 49. $\int_C e^z\,dz$

50. Encontrar una mejor cota en el problema 49 mediante la descomposición de C en dos arcos.

13.3 TEOREMA DE LA INTEGRAL DE CAUCHY

Una integral de línea de una función $f(z)$ depende no sólo de los puntos terminales de la trayectoria, sino también de la elección de la trayectoria misma (ver la sección 13.2). Esta dependencia es inconveniente, por lo que se buscan situaciones en que no ocurra. La respuesta es sencilla: si $f(z)$ es analítica en un dominio simplemente conexo (que se define a continuación). Este resultado (teorema 2) se deduce del teorema de la

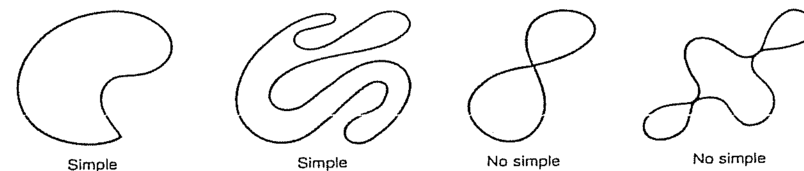


Figura 313. Trayectorias cerradas.

integral de Cauchy, junto con otras consecuencias básicas que hacen del teorema de Cauchy el teorema ***más importante*** de este capítulo y el teorema fundamental en todo el análisis complejo. Para plantear el teorema de la integral de Cauchy se requieren los siguientes dos conceptos.

1. Una **trayectoria simple cerrada** es una trayectoria cerrada (sección 13.1) sin autointersecciones y que no se toca a sí misma (figura 313). Por ejemplo, una circunferencia es simple, pero una curva en forma de 8 no lo es.

2. Un **dominio simplemente conexo** D en el plano complejo es un dominio (sección 12.3) tal que toda trayectoria simple cerrada en D contiene sólo puntos de D. Un dominio que no es simplemente conexo se denomina **múltiplemente conexo**.

Por ejemplo, el interior de un círculo ("disco circular"), de una elipse o de un cuadrado es simplemente conexo. En términos más generales, el interior de una curva cerrada simple es simplemente conexo. Un anillo circular o corona (sección 12.3) es múltiplemente conexo (con mayor precisión, es doblemente conexo[5]). En la figura 314 se muestran más ejemplos.

Si se recuerda que, por definición, una función es una relación con ***un sólo valor*** (ver la sección 12.4), ahora es posible plantear el teorema de la integral de Cauchy como sigue. Algunas veces, este teorema se denomina **teorema de Cauchy-Goursat.**

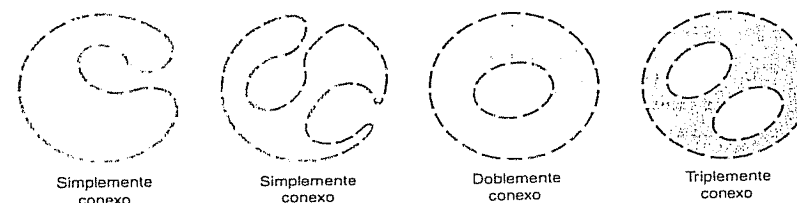


Figura 314. Dominios simple y múltiplemente conexos.

[5] Un dominio **acotado** (es decir, un dominio que está completamente contenido en algún círculo alrededor del origen) es p veces conexo si su frontera consta de p conjuntos cerrados conexos sin puntos en común. Para la corona, $p = 2$, porque la frontera consta de dos círculos que no tienen puntos en común.



Figura 315. Teorema de la integral de Cauchy.

Teorema 1 Teorema de la integral de Cauchy

Si $f(z)$ es analítica en un dominio simplemente conexo D, entonces para toda trayectoria simple cerrada C en D se cumple lo siguiente

$$\oint_C f(z)\, dz = 0. \qquad (1)$$

Ver la figura 315.

Antes de demostrar el teorema se considerarán algunos ejemplos, a fin de comprender realmente lo que sucede. Una trayectoria simple cerrada algunas veces se denomina *contorno* y una integral sobre tal trayectoria se denomina **integral de contorno**. Así, (1) y los ejemplos presentados implican integrales de contorno.

EJEMPLO 1

$$\oint_C e^z\, dz = 0, \qquad \oint_C \cos z\, dz = 0, \qquad \oint_C z^n\, dz = 0 \qquad (n = 0, 1, \cdots)$$

para cualquier trayectoria simple cerrada, ya que estas funciones son enteras (analíticas para todo z) ∎

EJEMPLO 2

$$\oint_C \sec z\, dz = 0, \qquad \oint_C \frac{dz}{z^2 + 4} = 0$$

en donde C es la circunferencia unitaria, $\sec z = 1/\cos z$ no es analítica en $z = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \cdots$, sino que todos estos puntos están fuera de C; ninguno está en C o en el interior de C. Lo mismo es cierto para la segunda integral, cuyo integrando no es analítico en $z = \pm 2i$ fuera de C. ∎

EJEMPLO 3

$$\oint_C \bar{z}\, dz = 2\pi i$$

(C es la circunferencia unitaria en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj) no contradice el teorema de Cauchy, porque $f(z) = \bar{z}$ no es analítica, de modo que el teorema no es aplicable (¡Comprobar este resultado!) ∎

EJEMPLO 4

$$\oint_C \frac{dz}{z^2} = 0,$$

donde C es la circunferencia unitaria. Este resultado *no* es una consecuencia del teorema de Cauchy, ya que $f(z) = 1/z^2$ no es analítica en $z = 0$. Por tanto, *la condición de que f sea analítica en D es suficiente más que necesaria, para que (1) sea verdadera.* ∎

EJEMPLO 5

$$\oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

para integración en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de la circunferencia unitaria (ver la sección 13.2). C está en la corona $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$ donde $1/z$ es analítica, pero este dominio no es simplemente conexo, de modo que no es posible aplicar el teorema de Cauchy. Por tanto, ***la condición de que el dominio D sea simplemente conexo es esencial.***

En otras palabras, por el teorema de Cauchy, si $f(z)$ es analítica sobre una trayectoria simple cerrada C y en todas partes en C sin excepciones, ni siquiera en un solo punto, entonces (1) se cumple. El punto que provoca problemas aquí es $z = 0$ en donde $1/z$ no es analítica. ∎

EJEMPLO 6

$$\oint_C \frac{7z - 6}{z^2 - 2z}\, dz = \oint_C \frac{3}{z}\, dz + \oint_C \frac{4}{z - 2}\, dz = 3 \cdot 2\pi i + 0 = 6\pi i$$

(C es la circunferencia unitaria en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj) por reducción a fracciones parciales, el ejemplo 1 en la sección 13.2 y el teorema de Cauchy. ∎

Demostración de Cauchy bajo la condición de que f'(z) es continua. Por (5) en la sección 13.1 se tiene

$$\oint_C f(z)\, dz = \oint_C (u\, dx - v\, dy) + i \oint_C (u\, dy + v\, dx).$$

Debido a que $f(z)$ es analítica en D, entonces su derivada $f'(z)$ existe en D. Como se supone que $f'(z)$ es continua, entonces (4) y (5) en la sección 12.5 implican que u y v tienen derivadas parciales *continuas* en D. Por tanto, es aplicable el teorema de Green (sección 9.4) (con u y $-v$ en lugar de F_1 y F_2), con lo que se obtiene

$$\oint_C (u\, dx - v\, dy) = \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\, dy$$

en donde R es la región acotada por C. La segunda ecuación de Cauchy-Riemann (sección 12.5) muestra que el integrando del miembro derecho es idénticamente cero. Así, la integral del miembro izquierdo es cero. Aplicando la primera ecuación de Cauchy-Riemann, de la misma manera se concluye que la última integral de la fórmula anterior es cero. Con esto se completa la demostración de Cauchy. ∎

La **demostración de Goursat sin la condición de que $f'(z)$ es continua**[6] es sustancialmente más complicada. Se deja como lectura opcional y se presenta en el apéndice 4.

[6] ÉDOUARD GOURSAT (1858-1936), matemático francés. Cauchy publicó el teorema en 1825. La eliminación de esta condición por Goursat (ver *Transactions Amer. Math Soc.*, vol. 1, 1900) es bastante importante, por ejemplo, en relación con el hecho de que las derivadas de funciones analíticas también son analíticas, como se demostrará en breve. Goursat también efectuó contribuciones importantes a las ecuaciones diferenciales parciales.

Independencia con respecto a la trayectoria, deformación de la trayectoria

Por la sección 13.1 se sabe que si una función $f(z)$ se integra desde un punto z_1 hasta un punto z_2, entonces en general el resultado depende de la trayectoria de integración, no sólo de z_1 y z_2. Lo anterior es inconveniente, por lo que es deseable no encontrar esta situación. En consecuencia, la integral de $f(z)$ se denomina **independiente de la trayectoria en un dominio D** si su valor depende sólo de z_1 y z_2, pero no de la elección de la trayectoria C en D (de modo que con cualquier trayectoria C_1 en D desde z_1 hasta z_2 se obtenga el mismo valor de la integral que con cualquier otra trayectoria C_2 en D desde z_1 hasta z_2). Se demostrará qué sucede si $f(z)$ es analítica en D y D es simplemente conexo.

Teorema 2 (Independencia con respecto a la trayectoria)

Si $f(z)$ es analítica en un dominio simplemente conexo D, entonces la integral de $f(z)$ es independiente de la trayectoria en D.

Demostración. Sean z_1 y z_2 dos puntos cualesquiera en D. Se consideran las dos trayectorias C_1 y C_2 en D desde z_1 hasta z_2 sin ningún otro punto en común, como se muestra en la figura 316. C^* denota la trayectoria C_2 con orientación invertida (figura 317). Se integra desde z_1 sobre C_1 hasta z_2 y sobre C_2^* de regreso a z_1. Esta es una trayectoria simple cerrada, y el teorema de Cauchy se aplica bajo las hipótesis del teorema actual, con lo que se obtiene cero:

$$(2') \qquad \int_{C_1} f\,dz + \int_{C_2^*} f\,dz = 0, \qquad \text{por tanto,} \qquad \int_{C_1} f\,dz = -\int_{C_2^*} f\,dz.$$

Sin embargo, el signo negativo del miembro derecho desaparece si se integra en dirección contraria, desde z_1 hasta z_2, lo que demuestra que las integrales de $f(z)$ sobre C_1 y C_2 son iguales.

$$(2) \qquad \int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz \qquad \text{(Figura 316).}$$

Lo anterior demuestra el teorema para trayectorias que sólo tienen en común los puntos terminales. Para trayectorias que además de tener en común los puntos terminales

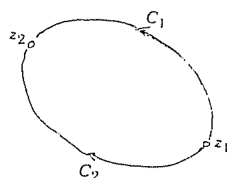


Figura 316. Fórmula (2).

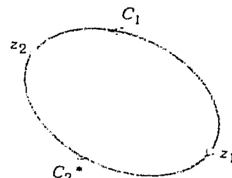


Figura 317. Fórmula (2').

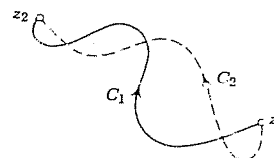


Figura 318. Trayectorias con más puntos en común.

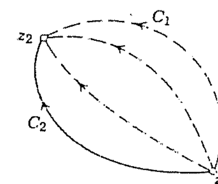


Figura 319. Deformación continua de la trayectoria.

también tienen en común un número finito de puntos, este razonamiento se aplica a cada "tramo" (porciones de C_1 y C_2 entre puntos consecutivos en común; cuatro en la figura 318). Para trayectorias que tienen una infinidad de puntos en común se requieren argumentos adicionales que no serán presentados en este libro. ∎

Principio de deformación de la trayectoria. La siguiente idea está relacionada con la independencia respecto a la trayectoria. Es posible imaginar que la trayectoria C_2 en (2) se obtuvo a partir de C_1 por medio de una deformación continua. (En la figura 319 se muestran dos de la infinidad de trayectorias intermedias.) Se concluye que para una integral dada de una función analítica es posible aplicar una deformación continua sobre la trayectoria de integración (manteniendo fijos a los puntos terminales); en la medida en que la trayectoria de deformación jamás contenga ningún punto en el que $f(z)$ no sea analítica, el valor de la integral de línea permanecerá igual bajo la deformación. Lo anterior se denomina **principio de deformación de la trayectoria.**

Teorema de Cauchy para dominios múltiplemente conexos

El teorema de Cauchy se aplica a dominios múltiplemente conexos. Primero se explicará este hecho para un **dominio doblemente conexo** D con curva frontera exterior C_1 e interior C_2 (figura 320). Si una función $f(z)$ es analítica en cualquier dominio D^* que contiene a D así como a sus curvas frontera, se afirma que

$$(3) \qquad \int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz \qquad \text{(Figura 320).}$$

ambas integrales se consideran en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (o al revés, y sin tomar en cuenta si todo el interior de C_2 pertenece o no a D^*).

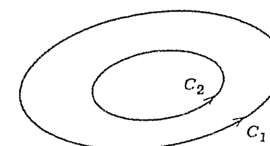


Figura 320. Trayectorias en (3).

Demostración. Mediante los cortes $\tilde{C}_1$ y $\tilde{C}_2$ (figura 321), D se divide en los dos dominios simplemente conexos D_1 y D_2, en los cuales y sobre cuyas fronteras $f(z)$ es analítica. Por el teorema de Cauchy, la integral sobre toda la frontera de C_1 (tomada en el sentido de la flechas de la figura 321) es cero, como también es cero sobre la frontera de D_2, por lo que la suma de ambas integrales es cero. En esta suma las integrales sobre los cortes $\tilde{C}_1$ y $\tilde{C}_2$ se cancelan porque s integra sobre ellos en ambas direcciones —esta es la clave— y quedan las integrales sobre C_1 (en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj) y C_2 (en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj; ver la figura 321); por tanto, al invertir la integración sobre C_2 (al sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj), se tiene

$$\int_{C_1} f\,dz - \int_{C_2} f\,dz = 0$$

y se concluye (3). ∎

Para dominios de conexidad superior la idea es la misma. Así, para un **dominio triplemente conexo** se usan tres cortes $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$ y $\tilde{C}_3$ (figura 322). Al sumar las integrales como antes, las integrales sobre los cortes se cancelan y la suma de las integrales sobre C_1 (en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj) y C_2, C_3 (en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj) es cero. Así, la integral sobre C_1 es igual a la suma de las integrales sobre C_2 y C_3, en donde ahora las tres se consideran en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, etc.

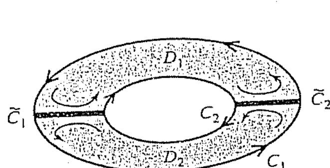


Figura 321. Dominio doblemente conexo.

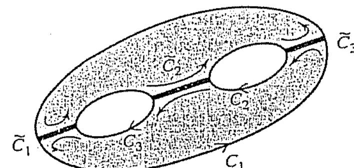


Figura 322. Dominio triplemente conexo.

EJEMPLO 7 Un resultado fundamental: la integral de potencias enteras

Con base en (3) y por el ejemplo 2 de la sección 13.2, ahora se concluye que

$$\oint_C (z - z_0)^m\,dz = \begin{cases} 2\pi i & (m = -1) \\ 0 & (m \neq -1 \text{ y entero}) \end{cases}$$

para integración en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de cualquier trayectoria simple cerrada que contiene en su interior a z_0. ∎

Problemas de la sección 13.3

1. Comprobar el teorema de la integral de Cauchy para la integral de z^2 tomada en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj sobre la frontera del rectángulo con vértices en -1, 1, $1 + i$, $-1 + i$.

2. Comprobar el teorema 2 para la integral de sen z desde 0 hasta $(1 + i)\pi$: (a) sobre el segmento de 0 a $(1 + i)\pi$, (b) sobre el eje x hasta π y luego verticalmente hacia arriba hasta $(1 + i)\pi$.
3. Comprobar el resultado del ejemplo 3.
4. ¿Para qué contornos C a partir del teorema de Cauchy se concluye lo siguiente?

(a) $\oint_C \frac{dz}{z} = 0$, (b) $\oint_C \frac{\cos z}{z^6 - z^2}\,dz = 0$, (c) $\oint_C \frac{e^{1/z}}{z^2 + 9}\,dz = 0$?

5. La integral en el ejemplo 4 es cero. ¿Es posible concluir a partir de lo anterior que es cero sobre el contorno del problema 1?
6. ¿A partir del ejemplo 2 es posible concluir que la integral de $1/(z^2 + 4)$ tomada sobre (a) $|z - 2| = 2$, (b) $|z - 2| = 3$ es cero? Justificar las respuestas.

Integrar $f(z)$ en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj sobre la circunferencia unitaria e indique si el teorema de Cauchy puede o no ser aplicado.

7. $f(z) = |z|$
8. $f(z) = e^{z^2}$
9. $f(z) = \text{Im}\, z$
10. $f(z) = 1/(2z - 5)$
11. $f(z) = 1/\bar{z}$
12. $f(z) = 1/(\pi z - 3)$
13. $f(z) = \tan z$
14. $f(z) = \bar{z}$
15. $f(z) = \bar{z}^2$
16. $f(z) = 1/|z|^3$
17. $f(z) = 1/(z^2 + 2)$
18. $f(z) = z^2 \sec z$

Calcular las siguientes integrales. (*Sugerencia*: En caso de ser necesario, representar el integrando en términos de fracciones parciales.)

19. $\oint_C \frac{dz}{z - i}$, C la circunferencia $|z| = 2$ (en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj)
20. $\oint_C \frac{dz}{\text{senh}\, z}$, C la circunferencia $|z - \frac{1}{2}\pi i| = 1$ en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj)
21. $\oint_C \frac{\cos z}{z}\,dz$, C consta de $|z| = 1$ (en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj) y $|z| = 3$ (en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj)
22. $\oint_C \frac{2z - 1}{z^2 - z}\,dz$. C es el contorno en la figura 323
23. $\oint_C \frac{dz}{z^2 - 1}$. C es el contorno en la figura 324
24. $\oint_C \text{Re}\, z\,dz$, C es el contorno en la figura 325
25. $\oint_C \frac{dz}{z^2 + 1}$, C: (a) $|z + i| = 1$, (b) $|z - i| = 1$ (en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj)

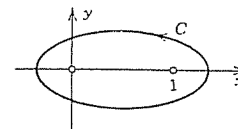


Figura 323. Problema 22.

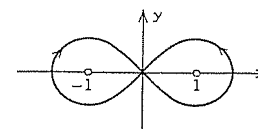


Figura 324. Problema 23.

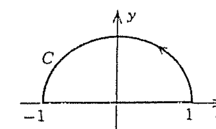


Figura 325. Problema 24.

Evaluar lo siguiente (*continuación*)

26. $\oint_C \frac{\operatorname{sen} z}{z + 3i}\, dz$, $\quad C: |z - 2 + 3i| = 1$ (en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj)

27. $\oint_C \frac{2z + 1}{z^2 + z}\, dz$, $\quad C$: (a) $|z| = \frac{1}{4}$, (b) $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{4}$, (c) $|z| = 2$ (en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj)

28. $\oint_C \frac{dz}{1 + z^3}$, $\quad C: |z + 1| = 1$ (en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj)

29. $\oint_C \frac{3z + 1}{z^3 - z}\, dz$, $\quad C$: (a) $|z| = 1/2$, (b) $|z| = 2$ (en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj)

30. $\oint_C \operatorname{Re}(z^2)\, dz$, $\quad C$ es la frontera del triángulo con vértices en 0, 2 y $2 + i$ (en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj)

13.4 EXISTENCIA DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

En esta breve sección se aplicará el teorema de la integral de Cauchy para establecer la existencia de una integral indefinida $F(z)$ de una función analítica $f(z)$, justificando, así la evaluación de integrales de línea mediante integración indefinida y sustitución de los límites de integración (ver la sección 13.2):

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\, dz = F(z_1) - F(z_0) \qquad [F'(z) = f(z)], \tag{1}$$

en donde $F(z)$ es una integral indefinida de $f(z)$; es decir, $F'(z) = f(z)$, como se indica. En casi todas las aplicaciones es posible encontrar una $F(z)$ así a partir de fórmulas de diferenciación.

Teorema 1 (Existencia de una integral indefinida)

Si $f(z)$ es analítica en un dominio simplemente conexo D (ver la sección 13.3), *entonces existe una integral indefinida $F(z)$ de $f(z)$ en D —así, $F'(z) = f(z)$— que es analítica en D, y para todas las trayectorias en D que unen dos puntos cualesquiera z_0 y z_1 en D la integral de $f(z)$ desde z_0 hasta z_1 puede evaluarse por medio de la fórmula* (1).

Demostración. Se cumplen las condiciones del teorema de la integral de Cauchy. Por tanto, la integral de línea de $f(z)$ desde cualquier z_0 en D hasta cualquier z_1 en D es independiente de la trayectoria en $F(z)$. z_0 se mantiene fijo. Así, esta integral se vuelve una función de z, denominada $F(z)$.

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z^*)\, dz^*, \tag{2}$$

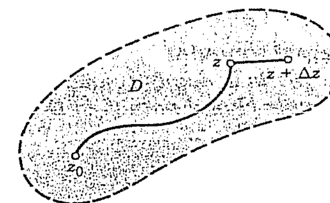


Figura 326. Trayectoria de integración.

que está determinada de manera única. Se demostrará que esta $F(z)$ es analítica en D y que $F'(z) = f(z)$. A continuación se presenta la idea para efectuar lo anterior. Se forma el cociente de diferencias

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\left[\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(z^*)\, dz^* - \int_{z_0}^{z} f(z^*)\, dz^*\right] = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z^*)\, dz^*, \tag{3}$$

$f(z)$ se resta de tal cociente y se demuestra que la expresión resultante tiende a cero cuando $\Delta z \to 0$. Enseguida se presentan los detalles.

z se mantiene fijo. Luego se elige $z + \Delta z$ en D de manera que todo el segmento con puntos terminales z y $z + \Delta z$ esté contenido en D (figura 326). Lo anterior es posible ya que D es un dominio, por lo que contiene una vecindad de z. Este segmento se usa como la trayectoria de integración en (3). Luego se resta $f(z)$. El resultado es una constante porque z se mantiene fijo. Por tanto, es posible escribir

$$\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\, dz^* = f(z)\int_{z}^{z+\Delta z} dz^* = f(z)\,\Delta z. \quad \text{por tanto,} \quad f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\, dz^*.$$

Con base en la triquiñuela anterior y a partir de (3) se obtiene una integral simple:

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} [f(z^*) - f(z)]\, dz^*.$$

Ya que $f(z)$ es analítica, entonces es continua. Dado un $\epsilon > 0$, entonces es posible encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$|f(z^*) - f(z)| < \epsilon \qquad \text{si} \qquad |z^* - z| < \delta.$$

Así, haciendo $|\Delta z| < \delta$, se observa que la desigualdad ML (sección 13.2) produce

$$\left|\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_{z}^{z+\Delta z} [f(z^*) - f(z)]\, dz^*\right| \leqq \frac{1}{|\Delta z|}\epsilon|\Delta z| = \epsilon.$$

Por definición de límite y de derivada, lo anterior demuestra que

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z).$$

Como z es cualquier punto en D, este hecho implica que $F(z)$ es analítica en D y que es una integral indefinida o antiderivada de $f(z)$ en D, lo cual se escribe como

$$F(z) = \int f(z)\, dz.$$

También, si $G'(z) = f(z)$, entonces $F'(z) = G'(z) \equiv 0$ en D; por tanto, $F'(z) - G'(z)$ es una constante en D (ver el problema 29 en los problemas de la sección 12.5). Es decir; dos integrales indefinidas de $f(z)$ pueden diferir sólo por una constante. Esta constante se cancela en (1). Por tanto, en (1) es posible usar cualquier integral indefinida de $f(z)$. Esto demuestra el teorema.

En la sección 13.2 se proporcionan ejemplos de integración indefinida y problemas adicionales.

Problemas de la sección 13.4

Evaluar las siguientes integrales.

1. $\int_{i}^{2+i} z\, dz$
2. $\int_{0}^{1+i} z^2\, dz$
3. $\int_{0}^{\pi i} e^z\, dz$
4. $\int_{-\pi i}^{\pi i} \operatorname{sen}^2 z\, dz$
5. $\int_{-\pi i}^{3\pi i} e^{2z}\, dz$
6. $\int_{-i}^{i} \operatorname{sen} z\, dz$
7. $\int_{\pi i/6}^{0} \cosh 3z\, dz$
8. $\int_{-\pi i}^{\pi i} \cos z\, dz$
9. $\int_{0}^{i} \operatorname{senh} \pi z\, dz$
10. $\int_{\pi}^{\pi i} \operatorname{sen} 2z\, dz$
11. $\int_{-1}^{1} z \cosh z^2\, dz$
12. $\int_{\pi i}^{0} z \cos z\, dz$
13. $\int_{1}^{i} z e^{z^2}\, dz$
14. $\int_{1+i}^{1} z^3 e^{z^4}\, dz$
15. $\int_{i}^{2i} (z^2 - 1)^3\, dz$

13.5 FÓRMULA DE LA INTEGRAL DE CAUCHY

La consecuencia más importante del teorema de la integral de Cauchy es la fórmula de la integral de Cauchy. Esta fórmula es de utilidad para calcular integrales (a continuación se proporcionan algunos ejemplos). Igualmente importante es su rol primordial en la demostración del sorprendente hecho de que las funciones analíticas tienen derivadas de todos los órdenes (sección 13.6), en el establecimiento de las representaciones mediante series de Taylor (sección 14.4), etc. La fórmula de la integral de Cauchy y sus condiciones de validez pueden plantearse como sigue.

Teorema 1 (Fórmula de la integral de Cauchy)

Sea $f(z)$ analítica en un dominio simplemente conexo D. Entonces para cualquier punto z_0 en D y cualquier trayectoria simple cerrada C en D que contenga a z_0 (figura 327) *se cumple lo siguiente*

(1) $$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i f(z_0)$$ **(Fórmula de la integral de Cauchy),**

en donde la integración se toma en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

Demostración. Por adición y sustracción, $f(z) = f(z_0) + [f(z) - f(z_0)]$. Al insertar lo anterior en (1) en el miembro izquierdo y sacando de la integral el factor constante $f(z_0)$, se obtiene

(2) $$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = f(z_0) \oint_C \frac{dz}{z - z_0} + \oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz.$$

El primer término del miembro derecho es igual a $f(z_0) \cdot 2\pi i$ (ver el ejemplo 7 en la sección 13.3, con $m = -1$). Lo anterior demuestra el teorema, en el supuesto de que la segunda integral del miembro derecho sea cero. Este hecho se demostrará a continuación. Su integrando es analítico, excepto en z_0. Entonces, por el principio de deformación de la trayectoria (sección 13.3), es posible sustituir C por un pequeño círculo K de radio ρ y centro z_0 (figura 328) sin modificar el valor de la integral. Como $f(z_0)$ es analítica, entonces es continua. Así, dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon \quad \text{para todo } z \text{ en el disco } |z - z_0| < \delta.$$

Al elegir el radio ρ de K menor que δ, se tiene así la desigualdad

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \frac{\epsilon}{\rho}$$

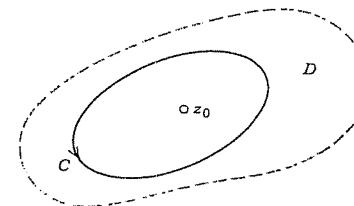


Figura 327. Fórmula de la integral de Cauchy.

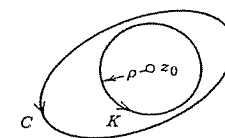


Figura 328. Demostración de la fórmula de la integral de Cauchy.

en todo punto de K. La longitud de K es $2\pi\rho$. Entonces, por la desigualdad ML en la sección 13.2, se tiene que

$$\left|\oint_K \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz\right| < \frac{\epsilon}{\rho}\, 2\pi\rho = 2\pi\epsilon.$$

Como $\epsilon(> 0)$ puede hacerse arbitrariamente pequeño, se concluye que el valor de la última integral en (2) es cero, y de esta manera se ha demostrado el teorema. ∎

Ejemplo 1 Fórmula de la integral de Cauchy

$$\oint_C \frac{e^z}{z - 2}\, dz = 2\pi i e^z \Big|_{z=2} = 2\pi i e^2$$

para cualquier contorno que contiene a $z_0 = 2$ (ya que e^z es entera), y es igual a cero para cualquier contorno tal que $z_0 = 2$ esté fuera (debido al teorema de la integral de Cauchy). ∎

Ejemplo 2 Fórmula de la integral de Cauchy

$$\oint_C \frac{z^3 - 6}{2z - i}\, dz = \oint_C \frac{\frac{1}{2}z^3 - 3}{z - \frac{1}{2}i}\, dz = 2\pi i [\tfrac{1}{2}z^3 - 3]\Big|_{z=i/2} = \frac{\pi}{8} - 6\pi i \qquad (z_0 = \tfrac{1}{2}i \text{ dentro de } C)$$ ∎

Ejemplo 3 Integración alrededor de contornos diferentes

Integrar

$$g(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}$$

en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de una circunferencia de radio 1 y con centro en el punto

(a) $z = 1$ (b) $z = \frac{1}{2}$ (c) $z = -1 + \frac{1}{2}i$ (d) $z = i$.

Solución. A fin de ver qué sucede, se localizan los puntos en que $g(z)$ no es analítica y se trazan junto con los contornos (figura 329). Estos puntos son -1 y 1. Debido al principio de deformación de la trayectoria, se observa que con (b) se obtiene el mismo resultado que con (a). También, debido al teorema de la integral de Cauchy, con (d) se obtiene cero. Primero se considerará (a) y luego (c).

(a) Aquí $z_0 = 1$, de modo que $z - z_0 = z - 1$ en (1). Así, es necesario escribir

$$g(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} = \frac{z^2 + 1}{z + 1}\,\frac{1}{z - 1}; \qquad \text{por tanto,} \qquad f(z) = \frac{z^2 + 1}{z + 1},$$

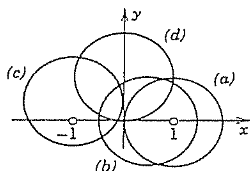


Figura 329. Ejemplo 3.

y con (1) se obtiene

$$\oint_C \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}\, dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i \left[\frac{z^2 + 1}{z + 1}\right]_{z=1} = 2\pi i.$$

(c) $g(z)$ es igual que antes, pero $f(z)$ cambia, porque ahora debe tomarse $z_0 = -1$ (en vez de 1). Con lo anterior, en (1) se obtiene un factor $z - z_0 = z + 1$. Por tanto ahora es necesario escribir

$$g(z) = \frac{z^2 + 1}{z - 1}\,\frac{1}{z + 1}; \qquad \text{por tanto,} \qquad f(z) = \frac{z^2 + 1}{z - 1}.$$

Lo anterior se compara con la expresión previa y se prosigue:

$$\oint_C \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}\, dz = 2\pi i f(-1) = 2\pi i \left[\frac{z^2 + 1}{z - 1}\right]_{z=-1} = -2\pi i.$$ ∎

Ejemplo 4 Uso de fracciones parciales.

Integrar $g(z) = (z^2 - 1)^{-1} \tan z$ alrededor del círculo C: $|z| = 3/2$ (en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj).

Solución. $\tan z$ no es analítica en $\pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \cdots$, sino que todos estos puntos están fuera del contorno $(z^2 - 1)^{-1} = 1/(z - 1)(z + 1)$ no es analítica en 1 y -1. A fin de obtener integrales de la forma (1) con *sólo* un punto dentro de C en que el integrando no sea analítico, se usan fracciones parciales

$$\frac{1}{z^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z - 1} - \frac{1}{z + 1}\right).$$

Con base en lo anterior y (1) se obtiene

$$\oint_C \frac{\tan z}{z^2 - 1}\, dz = \frac{1}{2}\left[\oint_C \frac{\tan z}{z - 1}\, dz - \oint_C \frac{\tan z}{z + 1}\, dz\right]$$

$$= \frac{2\pi i}{2}[\tan 1 - \tan(-1)] = 2\pi i \tan 1 \approx 9.785i.$$ ∎

Los **dominios múltiplemente conexos** puede manipularse como en la sección 13.3. Por ejemplo, si $f(z)$ es analítica sobre C_1 y C_2 y en el dominio en forma de anillo acotado por C_1 y C_2 (figura 330) y z_0 es cualquier punto en ese dominio, entonces

(3) $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz,$$

en donde la integral exterior (sobre C_1) se toma en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, y la interior se toma en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj, como se indica en la figura 330.

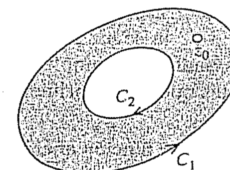


Figura 330. Fórmula (3).

Problemas de la sección 13.5

Integrar $1/(z^4 - 1)$ en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor del círculo

1. $|z - i| = 1$ 2. $|z - 1| = 1$ 3. $|z + 1| = 1$ 4. $|z + 3| = 1$

Integrar $(z^2 - 1)/(z^2 + 1)$ en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor del círculo

5. $|z - 2i| = 2$ 6. $|z - i| = 1$ 7. $|z| = \frac{1}{2}$ 8. $|z + i| = 1$

Integrar las siguientes funciones en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor del círculo unitario.

9. $(\cos z)/2z$ 10. e^z/z 11. $(z + 2)/(z - 2)$ 12. $(e^z - 1)/z$
13. $z^3/(2z - i)$ 14. $(\operatorname{sen} z)/2z$ 15. $(z - \pi)^{-1} \cos z$ 16. $e^{3z}/(3z - i)$

Integrar la función proporcionada sobre el contorno C dado (en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj o como se indique).

17. $(z^3 - i)/\pi z$, C es el círculo $|z| = 3$.
18. $e^{-3\pi z}/(2z + i)$, C es la frontera del triángulo con vértices $-1, 1, -i$.
19. $(\tan z)/(z - i)$, C es la frontera del triángulo con vértices $-1, 1, 2i$.
20. $\cosh (z^2 - \pi i)/(z - \pi i)$, C es cualquier elipse con focos 0 y πi.
21. $[\operatorname{Ln} (z - i)]/(z - 5)$, C es el círculo $|z - 4| = 2$.
22. $[\operatorname{Ln} (z + 1)]/(z^2 + 1)$, C consta de la frontera del triángulo con vértices $1 - \frac{1}{2}i$, $-1 - i$, $2i$ (en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj) y $|z| = \frac{1}{4}$ (en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj).
23. $e^{z^3}/[(z - 1 - i)z^2]$, C consta de $|z| = 3$, (en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj) y $|z| = 1$ (en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj).
24. $(\operatorname{sen} z)/(4z^2 - 8iz)$, C consta de las fronteras de los cuadrados con vértices $\pm 3, \pm 3i$ (en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj) y $\pm 1, \pm i$ (en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj).
25. Demostrar que $\oint_C (z - z_1)^{-1}(z - z_2)^{-1}\, dz = 0$ para una trayectoria simple cerrada C que contiene a z_1 y z_2, que son arbitrarios.

13.6 DERIVADAS DE FUNCIONES ANALÍTICAS

En esta sección se aplica la fórmula de la integral de Cauchy para demostrar el hecho fundamental de que las funciones analíticas complejas poseen ***derivadas de todos los órdenes***. Esto es muy sorprendente porque difiere bastante de lo que sucede en cálculo real. De hecho, si una función *real* es diferenciable una vez, nada puede concluirse acerca de la existencia de la segunda derivada o derivadas superiores. Así, en este sentido las funciones analíticas complejas se comportan mucho más sencillamente que las funciones reales que tienen primera derivada.

Teorema 1 (Derivadas de una función analítica)

Si $f(z)$ es una función analítica en un dominio D, entonces tiene derivadas de todos los órdenes en D, las cuales entonces también son funciones analíticas en D. Los valores de estas derivadas en un punto z_0 en D están dados por las siguientes fórmulas.

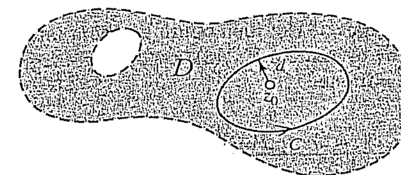


Figura 331. Teorema 1 y su demostración.

$$(1') \qquad f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\, dz,$$

$$(1'') \qquad f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3}\, dz,$$

y en general

$$(1) \qquad \boxed{f^{(n)}(z)_0 = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz} \qquad (n = 1, 2, \cdots);$$

aquí C es cualquier trayectoria simple cerrada que contiene a z_0 y cuyo interior pertenece por completo a D; la integración se efectúa en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de C (figura 331).

Comentario. Para memorizar (1), es de utilidad observar que estas fórmulas se obtienen formalmente derivando la fórmula de Cauchy (1), sección 13.5, bajo el signo integral *con respecto a z_0*.

Demostración del teorema 1. Se demostrará (1'). Por definición,

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

En el miembro derecho, $f(z_0 + \Delta z)$ y $f(z_0)$ se representan mediante la fórmula de la integral de Cauchy:

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i \Delta z} \left[\oint_C \frac{f(z)}{z - (z_0 + \Delta z)}\, dz - \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \right].$$

Las dos integrales se escriben como una sola integral. Sacando el común denominador se obtiene el numerador $f(z)\{z - z_0 - [z - (z_0 + \Delta z)]\} = f(z)\ \Delta z$, por lo que Δz se elimina y se obtiene

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)}\, dz.$$

Resulta evidente que ahora es posible establecer (1') demostrando que, cuando $\Delta z \to 0$, la integral del miembro derecho tiende a la integral en (1'). Para lograr lo anterior, se considerará la diferencia entre estas dos integrales. Esta diferencia puede escribirse como una sola integral obteniendo el común denominador y simplificando. Así, se tiene

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)}\, dz - \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\, dz$$

$$= \oint_C \frac{f(z)\Delta z}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)^2}\, dz.$$

Mediante el empleo de la desigualdad ML (sección 13.2) se demuestra que la integral del miembro derecho tiende a cero cuando $\Delta z \to 0$.

Por ser analítica, la función $f(z)$ es continua sobre C, y así está acotada en valor absoluto; por ejemplo, $|f(z)| \leqq K$. Sea d la distancia mínima de z_0 a los puntos de C (ver la figura 331). Entonces para todo $|z|$ en C se tiene que

$$|z - z_0|^2 \geqq d^2, \qquad \text{por tanto} \qquad \frac{1}{|z - z_0|^2} \leqq \frac{1}{d^2}.$$

Además, si $|\Delta z| \leqq d/2$, entonces para todo z en C también se tiene que

$$|z - z_0 - \Delta z| \geqq \frac{d}{2}, \qquad \text{por tanto} \qquad \frac{1}{|z - z_0 - \Delta z|} \leqq \frac{2}{d}.$$

Sea L la longitud de C. Entonces por la desigualdad ML, si $|\Delta z| \leqq d/2$, entonces

$$\left| \oint_C \frac{f(z)\Delta z}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)^2}\, dz \right| \leqq K|\Delta z|\, \frac{2}{d} \cdot \frac{1}{d^2}.$$

Esta expresión tiende a cero cuando $\Delta z \to 0$. Se ha demostrado la fórmula (1').

Observe que se aplicó la fórmula de la integral de Cauchy (1), sección 13.5, pero si todo lo que se hubiera sabido sobre $f(z_0)$ es el hecho de que puede representarse por (1), sección 13.5, entonces con el razonamiento seguido se hubiera establecido la existencia de la derivada $f'(z_0)$ de $f(z)$. Esto es fundamental para la continuación y

completamiento de esta demostración, ya que implica que (1") puede demostrarse siguiendo un razonamiento semejante, con f sustituida por f', y que la fórmula general se concluye por inducción. ∎

Ejemplo 1 Evaluación de integrales de línea.

A partir de (1'), para cualquier contorno que contiene al punto πi (en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj),

$$\oint_C \frac{\cos z}{(z - \pi i)^2}\, dz = 2\pi i (\cos z)' \Big|_{z = \pi i} = -2\pi i \operatorname{sen} \pi i = 2\pi \operatorname{senh} \pi.$$ ∎

Ejemplo 2 A partir de (1"), para cualquier contorno que contiene al punto $-i$ (en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj),

$$\oint_C \frac{z^4 - 3z^2 + 6}{(z + i)^3}\, dz = \pi i (z^4 - 3z^2 + 6)'' \Big|_{z = -i} = \pi i [12z^2 - 6]_{z = -i} = -18\pi i.$$ ∎

Ejemplo 3 Por (1'), para cualquier contorno para el que 1 esté dentro y $\pm 2i$ esté fuera (en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj),

$$\oint_C \frac{e^z}{(z - 1)^2(z^2 + 4)}\, dz = 2\pi i \left(\frac{e^z}{z^2 + 4}\right)' \Bigg|_{z = 1} = 2\pi i \frac{e^z(z^2 + 4) - e^z 2z}{(z^2 + 4)^2} \Bigg|_{z = 1} = \frac{6e\pi}{25} i \approx 2.050i.$$

∎

El teorema 1 también es importante para obtener resultados generales sobre funciones analíticas. A continuación se presentará este hecho mediante la demostración de la conversa del teorema de la integral de Cauchy:

Teorema de Morera[7]

Si $f(z)$ es continua en un dominio simplemente conexo D y si

(2) $$\oint_C f(z)\, dz = 0$$

para toda trayectoria cerrada en D, entonces $f(z)$ es analítica en D.

Demostración. En la sección 13.4 se demostró que si $f(z)$ es analítica en D, entonces

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z^*)\, dz^*$$

es analítica en D y $F'(z) = f(z)$. En la demostración solamente se aplicaron la continuidad de $f(z)$ y la propiedad de que su integral alrededor de cualquier trayectoria cerrada en D es cero; con base en estas hipótesis se concluyó que $F(z)$ es analítica. Por el teorema 1, la derivada de $F(z)$ es analítica; es decir, $f(z)$ es analítica en D, con lo que se ha demostrado el teorema de Morera. ∎

[7] GIACINTO MORERA (1856-1909), matemático italiano, quien trabajó en Génova y Turín.

Desigualdad de Cauchy. El teorema 1 también conduce a una desigualdad fundamental que tiene muchas aplicaciones. Para obtenerla, todo lo que es necesario hacer es elegir a C en (1) como un círculo de radio r y centro z_0 y aplicar la desigualdad ML (sección 13.2); con $|f(z)| \leqq M$ sobre C, a partir de (1) se obtiene

$$|f^{(n)}(z_0)| = \frac{n!}{2\pi}\left|\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\right| \leqq \frac{n!}{2\pi} M \frac{1}{r^{n+1}} 2\pi r.$$

Así se obtiene la **desigualdad de Cauchy**

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqq \frac{n!M}{r^n}. \tag{3}$$

A fin de adquirir una idea sobre la importancia de esta desigualdad, a continuación se demostrará un famoso teorema sobre funciones enteras. (Cuya definición se proporcionó en la sección 12.6.)

Teorema de Liouville[8]

Si una función entera $f(z)$ está acotada en valor absoluto para toda z, entonces $f(z)$ debe ser una constante.

Demostración. Por hipótesis, $|f(z)|$ está acotada; por ejemplo, $|f(z)| < K$ para todo z. Aplicando (3) se observa que $|f'(z_0)| < K/r$. Como $f(z)$ es entera, lo anterior se cumple para todo r, de modo que es posible tomar a r tan grande como se quiera y concluir que $f'(z_0) = 0$. Dado que z_0 es arbitrario, entonces $f'(z_0) = 0$ para todo z, y $f(z)$ es una constante (ver el problema 29 en los problemas de la sección 12.5). Así, se ha demostrado el teorema. ∎

Aquí se termina el capítulo 13 sobre integración compleja, con el que se obtuvo una primera aproximación a los métodos que carecen de contraparte en el cálculo integral real. Se ha visto que estos métodos resultan directa o indirectamente del teorema de la integral de Cauchy (sección 13.3). En el capítulo 15 se presenta más material sobre integración, con base en el capítulo 14.

Problemas de la sección 13.6

Integrar las siguientes funciones en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor del círculo $|z| = 2$, (n en los problemas 10 y 12-15 es un entero positivo. a en los problemas 12 y 16 es cualquier número.)

1. $z^4/(z-3i)^2$
2. $z^2/(z-i)^2$
3. $e^{\pi z}/z^2$
4. $(\cos z)/z^3$
5. $(\cos z)/z^2$
6. $e^{z^2}/(z-1)^2$
7. $z^3/(z+1)^3$
8. $(\operatorname{sen} \pi z)/z^3$
9. $(e^z \operatorname{sen} z)/z^2$
10. e^z/z^n
11. e^{z^3}/z^3
12. e^{az}/z^{n+1}
13. $z^n/(z+1)^{n+1}$
14. $(\operatorname{sen} z)/z^{2n}$
15. $(\cos z)/z^{2n}$
16. $(\operatorname{senh} az)/z^4$

[8] Ver la nota de pie de página 16 de la sección 5.8.

Integrar $f(z)$ alrededor del contorno C (en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj o como se indique).

17. $f(z) = z^{-2} \tan \pi z$, C es cualquier elipse con focos $\pm i$.
18. $f(z) = z^{-4} e^{z/2}$, C es el círculo $|z - 1 - i| = 2$.
19. $f(z) = (z - \frac{1}{2}\pi)^{-2} \cot z$, C es la frontera del triángulo con vértices $\pm i$ y 2.
20. $f(z) = (z-4)^{-3} \operatorname{Ln} z$, C es el círculo $|z-5| = 3$.
21. $f(z) = \dfrac{e^{z^2}}{z(z-2i)^2}$, C consta de la frontera del cuadrado con vértices ± 3, $\pm 3i$ (en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj) y $|z| = 1$ (en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj).
22. $f(z) = \dfrac{\operatorname{Ln}(z+3) + \cos z}{(z+1)^2}$, C es la frontera del cuadrado con vértices ± 2, $\pm 2i$.
23. Si $f(z)$ no es constante y es analítica para todo z (finito), y R y M son números reales positivos cualesquiera (sin importar cuán grandes), demostrar que existen valores de z para los cuales $|z| > R$ y $|f(z)| > M$. *Sugerencia.* Aplicar el teorema de Liouville.
24. Si $f(z)$ es un polinomio de grado $n > 0$ y M es un número real positivo arbitrario (sin importar cuán grande), demostrar que existe un número real positivo R tal que $|f(z)| > M$ para todo $|z| > R$.
25. Demostrar que $f(z) = e^z$ posee la propiedad caracterizada en el problema 23, aunque carece de aquélla caracterizada en el problema 24.
26. Demostrar el **teorema fundamental del álgebra**: Si $f(z)$ es un polinomio en z, no una constante, entonces $f(z) = 0$ para por lo menos un valor de z. *Sugerencia.* Suponer que $f(z) \neq 0$ para todo z y aplicar el resultado del problema 23 a $g = 1/f$.

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 13

1. Si una curva C se representa por $z = z(t)$, ¿qué es geométricamente $\dot{z} = dz/dt$?
2. A lo largo de este capítulo, ¿qué se supuso sobre las trayectorias de integración?
3. ¿Qué se obtiene al integrar $1/z$ en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de la circunferencia unitaria? (Este hecho es fundamental, por lo que debe memorizarlo.) ¿Y si se integra $1/z^m$ ($m = 2, 3, \cdots$)?
4. Hacer un listado de los métodos de integración presentados en este capítulo e ilustrar cada uno con un ejemplo simple.
5. ¿Qué métodos de integración presentados en este capítulo se aplican sólo a funciones analíticas y cuáles a funciones complejas continuas generales?
6. ¿Qué teorema de este capítulo considera el lector como el más importante? ¿Por qué? Escribirlo de memoria.
7. ¿Qué significa independencia de la trayectoria?
8. ¿Cuál es el principio de deformación de la trayectoria? Proporcionar un ejemplo.
9. ¿Qué es un dominio doblemente conexo? ¿Cómo se manejó en relación con el teorema de Cauchy?
10. No confundir el teorema de Cauchy con la fórmula de Cauchy. Escribir ambos. ¿Cuál es una consecuencia del otro?
11. Si la integral de una función $f(z)$ sobre la circunferencia unitaria es igual a 2 y sobre la circunferencia $|z| = 2$ es igual a 1, ¿por qué $f(z)$ no puede ser analítica en todos los puntos de la corona acotada por tales circunferencias?

12. Escribir la desigualdad con que se obtienen cotas superiores para el valor absoluto de una integral. ¿Es válida sólo para funciones analíticas o lo es de manera más general?
13. Una función analítica $f(z)$ en un dominio D es diferenciable en D. ¿Posee derivadas superiores en D? Contestar la misma pregunta para una función real $f(x)$ que es diferenciable sobre algún intervalo de la recta real.
14. ¿Es cierto que $\text{Re} \int_C f(z)\,dz = \int_C \text{Re}\, f(z)\,dz$?
15. Aplicar el teorema de Liouville para demostrar que e^z y $\cos z$ no están acotadas en el plano complejo.

Integrar las siguientes funciones:

16. $3z^2$ desde $3i$ hasta $4 - i$ sobre cualquier trayectoria.
17. $z + 1/z$ en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj alrededor de la circunferencia unitaria.
18. $\text{Im}\, z$ en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de $|z| = r$.
19. $|z|$ desde $-i$ hasta i sobre la circunferencia unitaria en el semiplano derecho.
20. $(\text{Ln}\, z)/(z - 2i)^2$ en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de $|z - 2i| = \pi/2$.
21. e^{2z} desde $14 + 3\pi i$ hasta $14 - \pi i$ a lo largo de cualquier trayectoria.
22. e^z/z^4 en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de $|z| = 1/4$.
23. $\bar{z}/|z|$ en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de $|z| = 4$.
24. $z/(z^2 + 1)$ en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj alrededor de $|z + i| = 1$
25. $z^{-2} \tan z$ en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj alrededor de cualquier contorno que contenga a cero.
26. $5 \cos iz$ a lo largo del eje real desde $-\pi$ hasta π.
27. $\cosh z$ desde 0 hasta i a lo largo del eje imaginario.
28. $(z + i)^{-1} e^z \tan z$ en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de $|z - i| = 1$
29. $|z| + z$ en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj alrededor de la circunferencia unitaria.
30. $(3z + 5)/(z^2 + z)$ en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de la elipse con focos ± 1.
31. $e^z \cos(e^z)$ desde $-\pi i$ hasta $2\pi i$ a lo largo de cualquier trayectoria.
32. e^z/z en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de $|z| = 1$ y en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj alrededor de $|z| = 0.1$
33. $z \cos z^2$ desde 0 hasta πi sobre cualquier trayectoria.
34. $(2z - 1)^{-2}(1 + z)$ sen z en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de $|z - i| = 2$.
35. $1/(z^2 + 4)$ en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj alrededor de la elipse $x^2 + 4(y - 2)^2 = 4$.
36. $z^{-3} \cosh z$ en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de la circunferencia unitaria.
37. $(2z^3 - 3)/[z(z - 1 - i)^2]$ en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de $|z| = 2$ y en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj alrededor de $|z| = 1$.
38. $(z - i)^{-3}(z^3 + \text{sen}\, z)$ en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj alrededor de cualquier elipse con focos $\pm 2i$.

39. $(\tan \pi z)/(z - 1)^2$ en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de la circunferencia $|z - 1| = 0.1$
40. $(\text{sen}\, 2\pi z)/(z - 1)^3$ en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de $|z| = 2$.

Resumen del capítulo 13

Integración compleja

La **integral de línea compleja** de una función $f(z)$ tomada sobre una trayectoria C se denota por (sección 13.1)

$$\int_C f(z)\,dz \quad \text{o, si } C \text{ está cerrada, también por} \quad \oint_C f(z)\,dz.$$

Esta integral puede evaluarse aplicando la ecuación $z = z(t)$ de C, en donde $a \leq t \leq b$ (sección 13.2):

(1) $$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)\,dt \qquad \left(\dot{z} = \frac{dz}{dt}\right).$$

Como otro método, si $f(z)$ es analítica en un dominio simplemente conexo D (sección 13.3), entonces en D existe una $F(z)$ tal que $F'(z) = f(z)$ y para toda trayectoria C en D desde un punto z_0 hasta un punto z_1 se tiene (secciones 13.2 y 13.4)

(2) $$\int_C f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0) \qquad [F'(z) = f(z)].$$

El **teorema de la integral de Cauchy** establece que si $f(z)$ es analítica en un dominio simplemente conexo D, entonces para toda trayectoria cerrada C en D (sección 13.3)

(3) $$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

Con las mismas hipótesis y para cualquier z_0 en D y cualquier trayectoria cerrada C en D que contenga a z_0 también se tiene la **fórmula de la integral de Cauchy**

(4) $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz.$$

Además, $f(z)$ tiene derivadas de todos los órdenes en D, que son funciones analíticas en D y (sección 13.6)

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{5}$$

Lo anterior implica el *teorema de Morera* (la conversa del teorema de la integral de Cauchy) y la *desigualdad de Cauchy* (sección 13.6).

Capítulo

14

Series de potencias, series de Taylor, series de Laurent

En la sección 14.1 se presentan el contenido básico y las pruebas de convergencia para las series complejas, que son semejantes a los de las series reales que suelen analizarse en cálculo. Los lectores que tengan conocimientos razonables sobre estas últimas pueden usar la sección 14.1 como referencia y empezar con la sección 14.2, en la que se presenta un análisis amplio de las **series de potencias**.

Empezando en la sección 14.3 se explica por qué las series de potencias desempeñan un papel fundamental en análisis complejo y sus aplicaciones. La razón es porque las series de potencias representan funciones analíticas (sección 14.3, teorema 5) y, recíprocamente, *toda* función analítica puede representarse mediante series de potencias, denominadas **series de Taylor**, semejantes a las del cálculo; ver la sección 14.4. En la sección 14.5 se abordan métodos prácticos para obtener series de Taylor. En la sección 14.6 se analiza la convergencia uniforme de series de potencias y otras series.

Las **series de Laurent** (sección 14.7) son series de potencias enteras positivas *y negativas* de z (o de $z - z_0$). Estas series también pueden ser útiles para clasificar singularidades (sección 14.8) y conducen a un elegante método general de integración ("integración por residuos", que se explicará en el capítulo siguiente.)

Prerrequisitos para este capítulo: Capítulos 12 y 13.
Secciones que pueden omitirse en un curso más corto: Secciones 14.5, 14.6 y 14.8 (y usar la sección 14.1 sólo como referencia).
Bibliografía: Apéndice 1, parte D.
Respuestas a los problemas: Apéndice 2.

14.1 SUCESIONES, SERIES Y PRUEBAS DE CONVERGENCIA

En esta sección se definen las conceptos fundamentales para las sucesiones y series *complejas*, y se analizan pruebas para convergencia y divergencia. Esto es bastante parecido a las sucesiones y series *reales* en cálculo. ***Si el lector tiene confianza sobre esto último y desea dar por hecho que la prueba de la razón también se cumple en los complejos, puede omitir esta sección y proseguir con la sección 14.2.***

Sucesiones

Las definiciones básicas son como en cálculo. Una *sucesión infinita* o, brevemente, una sucesión, se obtiene al asignar a cada entero positivo n un número z_n denominado **término** de la sucesión, y se escribe

$$z_1, z_2, \cdots \qquad \text{o} \qquad \{z_1, z_2, \cdots\} \quad \text{o brevemente} \quad \{z_n\}.$$

También es posible escribir $z_0, z_1, \cdots$, o $z_2, z_3, \cdots$, o bien, empezar con algún otro entero en caso de ser conveniente.

Una *sucesión real* es una sucesión cuyos términos son todos reales.

Convergencia. Una **sucesión convergente** $z_1, z_2, \cdots$ es una sucesión que tiene un límite c, lo que se escribe

$$\lim_{n\to\infty} z_n = c \qquad \text{o simplemente} \qquad z_n \to c.$$

Por definición de límite, lo anterior significa que para todo $\epsilon > 0$ es posible encontrar un N tal que

$$(1) \qquad |z_n - c| < \epsilon \qquad \text{para todo } n > N;$$

geométricamente, todos los z_n con $n > N$ están en un disco abierto de radio ϵ y centro c (figura 332) y sólo un número finito de ellos no están en ese disco. [Para una sucesión *real*, (1) proporciona un intervalo abierto de longitud 2ϵ y punto medio c sobre la recta real; ver la figura 333].

Una **sucesión divergente** es una sucesión que no converge.

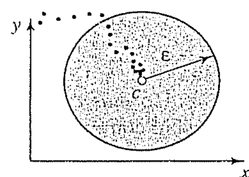


Figura 332. Sucesión compleja convergente.

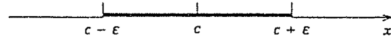


Figura 333. Sucesión real convergente.

Ejemplo 1 Sucesiones convergentes y divergentes.

La sucesión $\{i^n/n\} = \{i, -1/2, -i/3, 1/4, \cdots\}$ es convergente con límite 0. La sucesión $\{i^n\} = \{i, -1, -i, 1, \cdots\}$ es divergente, así como $\{z_n\}$ con $z_n = (1 + i)^n$. ∎

Ejemplo 2 Sucesión convergente.

La sucesión $\{z_n\}$ con $z_n = x_n + iy_n = 2 - \frac{1}{n} + i\left(1 + \frac{2}{n}\right)$ es

$$1 + 3i, \qquad \tfrac{3}{2} + 2i, \qquad \tfrac{5}{3} + \tfrac{5}{3}i, \qquad \tfrac{7}{4} + \tfrac{3}{2}i, \qquad \cdots,$$

ver la figura 334. Esta sucesión es convergente, con límite $c = 2 + i$. De hecho, en (1) se tiene

$$|z_n - c| = \left|\frac{2n-1}{n} + i\,\frac{n+2}{n} - (2+i)\right| = \left|-\frac{1}{n} + \frac{2i}{n}\right| = \frac{\sqrt{5}}{n} < \epsilon \qquad \text{si} \qquad n > \frac{\sqrt{5}}{\epsilon}.$$

Además, se observa que la sucesión $\{x_n\}$ de las partes reales converge a $2 = \operatorname{Re} c$, y $\{y_n\}$ converge a $1 = \lim c$. Este hecho es típico, e ilustra el siguiente teorema, mediante el cual la convergencia de una sucesión *compleja* puede referirse a la convergencia de las dos sucesiones *reales* de las partes reales e imaginarias. ∎

Teorema 1 (Sucesiones de las partes reales e imaginarias)

Una sucesión $z_1, z_2, \cdots, z_n, \ldots$ de números complejos $z_n = x_n + iy_n$ (en donde $n = 1, 2, \cdots$) converge a $c = a + ib$ si y sólo si la sucesión de las partes reales $x_1, x_2, \cdots$ converge a a y la sucesión de las partes imaginarias $y_1, y_2, \cdots$ converge a b.

Demostración. Si $|z_n - c| < \epsilon$, entonces $z_n = x_n + iy_n$ está dentro del círculo de radio ϵ alrededor de $c = a + ib$, de modo que necesariamente (figura 335*a*)

$$|x_n - a| < \epsilon, \qquad |y_n - b| < \epsilon.$$

Por tanto, la convergencia $z_n \to c$ implica las convergencias $x_n \to a$ y $y_n \to b$.

Recíprocamente, si $x_n \to a$ y $y_n \to b$ cuando $n \to \infty$, entonces para un $\epsilon > 0$ dado es posible elegir N tan grande que, para toda $n > N$,

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Las dos desigualdades anteriores implican que $z_n = x_n + iy_n$ está en un cuadrado con centro en c y lado ϵ. Por tanto, z_n debe estar dentro de un círculo de radio ϵ con centro c (figura 335*b*). ∎

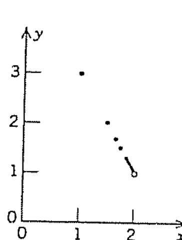


Figura 334. Ejemplo 2.

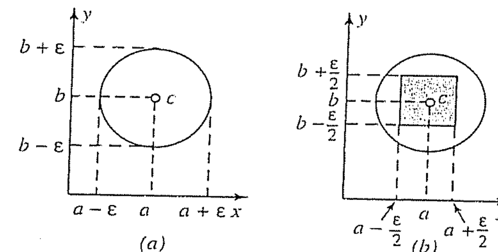


Figura 335. Demostración del teorema 1.

Series

Dada una sucesión $z_1, z_2, \cdots, z_m, \cdots$ es posible formar la sucesión de sumas

(2)
$$s_1 = z_1$$
$$s_2 = z_1 + z_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$$
$$\cdots,$$

denominada sucesión de **sumas parciales** de la *serie infinita*, o **serie**

(3)
$$\sum_{m=1}^{\infty} z_m = z_1 + z_2 + \cdots .$$

Los $z_1, z_2, \cdots$ se denominan **términos** de la serie. (La *letra* acostumbrada *para designar la sumatoria* es n, a menos que n se use para otros fines, como aquí.)

Una **serie convergente** es una serie cuya sucesión de sumas parciales converge, por ejemplo

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

s se denomina **suma** o *valor* de la serie y se escribe

$$s = \sum_{m=1}^{\infty} z_m = z_1 + z_2 + \cdots .$$

Una **serie divergente** es una serie que no converge.

Si en (3) se omiten los términos de s_n, queda

(4)
$$R_n = z_{n+1} + z_{n+2} + z_{n+3} + \cdots .$$

Lo anterior se denomina **residuo** *de la serie (3) después del término* z_n. Resulta evidente que si (3) converge y tiene la suma s, entonces

$$s = s_n + R_n, \quad \text{por tanto,} \quad R_n = s - s_n.$$

Luego, $s_n \to s$ por la definición de convergencia; por tanto, $R_n \to 0$. En aplicaciones, cuando se desconoce s y se calcula una aproximación s_n de s, entonces $|R_n|$ es el error, y $R_n \to 0$ significa que $|R_n$ puede hacerse tan pequeño como se quiera, al elegir a n suficientemente grande.

Una aplicación del teorema 1 a las sumas parciales relaciona inmediatamente la convergencia de una serie compleja con la convergencia de las dos series de sus partes reales y de sus partes imaginarias:

Teorema 2 (Partes reales e imaginarias)

Una serie (3) con $z_m = x_m + iy_m$ converge con sumas $s = u + iv$ si y sólo si $x_1 + x_2 + \cdots$ converge a la suma u y $y_1 + y_2 + \cdots$ converge a la suma v.

Pruebas para la convergencia y la divergencia de series

Las **pruebas de convergencia** en los complejos son prácticamente las mismas que en cálculo. Se aplican antes de usar una serie, a fin de asegurarse de que la serie converge.

La divergencia puede a menudo demostrarse de manera muy simple como sigue.

Teorema 3 (Divergencia)

Si una serie $z_1 + z_2 + \cdots$, converge, entonces $\lim_{m\to\infty} z_m = 0$. Por tanto, si lo anterior no se cumple, entonces la serie diverge.

Demostración. Si $z_1 + z_2 + \cdots$ converge a la suma s, entonces como $z_m = s_m - s_{m-1}$,

$$\lim_{m\to\infty} z_m = \lim_{m\to\infty} (s_m - s_{m-1}) = \lim_{m\to\infty} s_m - \lim_{m\to\infty} s_{m-1} = s - s = 0. \quad \blacksquare$$

¡Atención! $z_m \to 0$ es *necesaria* para la convergencia, aunque *no es suficiente*, como se observa a partir de la serie armónica $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$, que satisface esta condición aunque diverge, como se demuestra en cálculo (ver, por ejemplo, la obra de referencia 12 descrita en el apéndice 1).

La dificultad práctica para demostrar la convergencia es que en casi todos los casos se desconoce la suma de una serie. Cauchy resolvió este hecho al demostrar que una serie converge si y sólo si sus sumas parciales terminan por aproximarse entre sí:

Teorema 4 (Principio de convergencia de Cauchy para series)

Una serie $z_1 + z_2 + \cdots$ converge si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ dado (sin importar cuán pequeño sea) es posible encontrar una N (que en general depende de ϵ) tal que

(5)
$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p}| < \epsilon \qquad \text{para todo } n > N \text{ y } p = 1, 2, \cdots .$$

La demostración, que es algo complicada, se deja como actividad opcional (ver el apéndice 4).

Convergencia absoluta. Una serie $z_1 + z_2 + \cdots$ se denomina **absolutamente convergente** si la serie de los valores absolutos de los términos

$$\sum_{m=1}^{\infty} |z_m| = |z_1| + |z_2| + \cdots$$

es convergente.

Si $z_1 + z_2 + \cdots$ converge pero $|z_1| + |z_2| + \cdots$ diverge, entonces la serie $z_1 + z_2 + \cdots$ se denomina, con más precisión, **condicionalmente convergente**.

Ejemplo 3 Una serie condicionalmente convergente.

La serie $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + -$ converge pero sólo condicionalmente, porque la serie armónica diverge, como ya se mencionó (a continuación del teorema 3). ∎

Si una serie es absolutamente convergente, entonces es convergente en el sentido usual.

Este hecho se concluye inmediatamente del principio de Cauchy (problema 14). Este principio también conduce a la siguiente prueba general de convergencia.

Teorema 5 (Prueba de comparación)

Si se tiene una serie $z_1 + z_2 + \cdots$ y es posible encontrar una serie convergente $b_1 + b_2 + \cdots$ con términos reales no negativos tales que

$$|z_n| \leqq b_n \qquad \text{para } n = 1, 2, \cdots,$$

entonces la serie dada converge, incluso absolutamente.

Demostración. Por el principio de Cauchy, como $b_1 + b_2 + \cdots$ converge, entonces para cualquier $\epsilon > 0$ dado es posible encontrar una N tal que

$$b_{n+1} + \cdots + b_{n+p} < \epsilon \qquad \text{para todo } n > N \text{ y } p = 1, 2, \cdots.$$

Con base en lo anterior y como $|z_1| \leqq b_1$, $|z_2| \leqq b_2$, $\cdots$ se concluye que para estos n y p se tiene

$$|z_{n+1}| + \cdots + |z_{n+p}| \leqq b_{n+1} + \cdots + b_{n+p} < \epsilon.$$

Así, una vez más por el principio de Cauchy, $|z_1| + |z_2| + \cdots$ converge, de modo que $z_1 + z_2 + \cdots$ es absolutamente convergente. ∎

Una buena serie de comparación es la serie geométrica, que se comporta como sigue.

Teorema 6 (Serie geométrica)

La serie geométrica

$$\sum_{m=0}^{\infty} q^m = 1 + q + q^2 + \cdots$$

converge a la suma $1/(1-q)$ si $|q| < 1$ y diverge si $|q| \geqq 1$.

Demostración. Si $|q| \geqq 1$, entonces $|q^m| \geqq 1$ y el teorema 3 implica divergencia. Luego, sea $|q| < 1$. La n-ésima suma parcial es

$$s_n = 1 + q + \cdots + q^n.$$

A partir de lo anterior,

$$qs_n = \quad q + \cdots + q^n + q^{n+1}.$$

Al efectuar la resta, casi todos los términos del miembro derecho se cancelan por pares, por lo que se queda con

$$s_n - qs_n = (1-q)s_n = 1 - q^{n+1}.$$

Luego, $1 - q \neq 0$, ya que $q \neq 1$, y entonces es posible despejar s_n, con lo que se obtiene

$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}. \tag{6}$$

Como $|q| < 1$, entonces el último término tiende a cero cuando $n \to \infty$. Por tanto, la serie es convergente y su suma es $1/(1-q)$. Así se completa la demostración. ∎

Prueba de la razón

Esta es la prueba más importante en lo que resta del libro. Se obtiene tomando la serie geométrica como la serie de comparación $b_1 + b_2 + \cdots$ en el teorema 5:

Teorema 7 (Prueba de la razón)

Si una serie $z_1 + z_2 + \cdots$ con $z_n \neq 0$ ($n = 1, 2, \cdots$) tiene la propiedad de que para toda n mayor que alguna N,

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \leqq q < 1 \qquad (n > N) \tag{7}$$

(en donde $q < 1$ es fija), entonces esta serie converge absolutamente. Si para toda $n > N$,

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \geqq 1 \qquad (n > N), \tag{8}$$

la serie diverge.

Demostración. Si (8) se cumple, entonces $|z_{n+1}| \geqq |z_n|$ para estas n, de modo que la divergencia de la serie se concluye por el teorema 3.

Si (7) se cumple, entonces $|z_{n+1}| \leqq |z_n|q$ para $n > N$, en particular

$$|z_{N+2}| \leqq |z_{N+1}|q, \qquad |z_{N+3}| \leqq |z_{N+2}|q \leqq |z_{N+1}|q^2, \qquad \text{etc.},$$

y en general, $|z_{N+p}| \leqq |z_{N+1}|\, q^{p-1}$. Por tanto

$$|z_{N+1}| + |z_{N+2}| + |z_{N+3}| + \cdots \leqq |z_{N+1}|\,(1 + q + q^2 + \cdots).$$

La convergencia absoluta de $z_1 + z_2 + \cdots$ se concluye ahora por la prueba de comparación y la serie geométrica, ya que $q < 1$ (teoremas 5 y 6). ∎

¡Atención! La desigualdad (7) implica $|z_{n+1}/z_n| < 1$, pero esto *no* implica convergencia, como se observa en la serie armónica, que satisface $z_{n+1}/z_n = n/(n+1) < 1$ para toda n, pero diverge.

Si la sucesión de las razones (7) y (8) converge, se obtiene el más conveniente

Teorema 8 (Prueba de la razón)

Si una serie $z_1 + z_2 + \cdots$ con $z_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ *es tal que*

(9) $$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L,$$

entonces se tiene lo siguiente.

(a) *Si* $L < 1$, *la serie converge absolutamente.*
(b) *Si* $L > 1$, *diverge.*
(c) *Si* $L = 1$, *la prueba fracasa; es decir, no puede concluirse nada.*

Demostración. (a) En (9) se escribe $k_n = |z_{n+1}/z_n|$ Sea $L = 1 - b < 1$. Entonces, por la definición de límite, las k_n terminarán por aproximarse a $1 - b$, por ejemplo, $k_n \leqq q = 1 - \frac{1}{2}b < 1$ para toda n mayor que alguna N. La convergencia de $z_1 + z_2 + \cdots$ se concluye ahora a partir del teorema 7.

(b) De manera semejante, para $L = 1 + c > 1$, se tiene $k_n \geqq 1 + \frac{1}{2}c > 1$ para toda $n > N^*$ (suficientemente grande), lo que implica la divergencia de $z_1 + z_2 + \cdots$ debido al teorema 7.

(c) La serie armónica cumple $z_{n+1}/z_n = n/(n+1)$, por lo que $L = 1$ y diverge. La serie

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots \quad \text{cumple} \quad \frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2},$$

también tiene $L = 1$, aunque converge. La convergencia se concluye de (figura 336)

$$s_n = 1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leqq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^2} = 2 - \frac{1}{n},$$

de modo que $s_1, s_2, \cdots$ es una sucesión acotada y es monótona creciente (ya que todos los términos de la serie son positivos); ambas propiedades son suficientes para la convergencia de la sucesión real $s_1, s_2, \cdots$. ∎

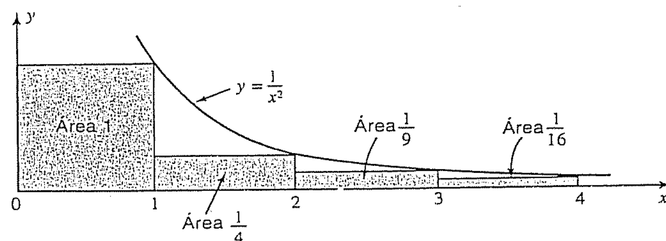


Figura 336. Convergencia de la serie 1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + · · ·.

Ejemplo 4 Prueba de la razón.

La siguiente serie, ¿converge o diverge? (Primero adivine; luego calcule.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(100 + 75i)^n}{n!} = 1 + (100 + 75i) + \frac{1}{2!}(100 + 75i)^2 + \cdots$$

Solución. Por el teorema 8, la serie es convergente, ya que

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \frac{|100 + 75i|^{n+1}/(n+1)!}{|100 + 75i|^n/n!} = \frac{|100 + 75i|}{n+1} = \frac{125}{n+1} \quad \to \quad L = 0.$$ ∎

Ejemplo 5 El teorema 7 es más general que el teorema 8.

La siguiente serie, ¿converge o diverge?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2^{3n}} + \frac{1}{2^{3n+1}}\right) = i + \frac{1}{2} + \frac{i}{8} + \frac{1}{16} + \frac{i}{64} + \frac{1}{128} + \cdots.$$

Solución. Las razones de los valores absolutos de términos consecutivos son $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots$. Por tanto, la convergencia se concluye del teorema 7. Como la sucesión de estas razones no tiene límite, entonces no es aplicable el teorema 8. ∎

Prueba de la razón

Las dos pruebas prácticamente más importantes son la prueba de la razón y la prueba de la raíz. La prueba de la razón suele ser más simple; la prueba de la raíz es algo más general.

Teorema 9 (Prueba de la raíz)

Si una serie $z_1 + z_2 + \cdots$ *es tal que para toda* n *mayor que alguna* N

(10) $$\sqrt[n]{|z_n|} \leqq q < 1 \qquad (n > N)$$

(en donde $q < 1$ *es fija), entonces esta serie converge absolutamente. Si para una infinidad de* n *se tiene que*

(11) $$\sqrt[n]{|z_n|} \geqq 1,$$

entonces la serie diverge.

Demostración. Si (10) se cumple, entonces $|z_n| \leqq q^n < 1$ para toda $n > N$. Por tanto, la serie $|z_1| + |z_2| + \cdots$ converge por comparación con la serie geométrica, de modo que $z_1 + z_2 + \cdots$ converge absolutamente. Si (11) se cumple, entonces $|z_n| \geqq 1$ para una infinidad de n. La divergencia de $z_1 + z_2 + \cdots$ se concluye ahora con base en el teorema 3. ∎

¡Atención! La ecuación (10) implica $\sqrt[n]{|z_n|} < 1$, pero no implica convergencia, como se ve en la serie armónica, que cumple $\sqrt[n]{1/n} < 1$, pero diverge.

Si la sucesión de las raíces en (10) y (11) converge, se tiene de manera más conveniente el

Teorema 10 (Prueba de la raíz)

Si una serie $z_1 + z_2 + \cdots$ *es tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L, \tag{12}$$

entonces se tiene lo siguiente.

(a) *Si* $L < 1$, *la serie converge absolutamente.*
(b) *Si* $L > 1$, *diverge.*
(c) *Si* $L = 1$, *la prueba fracasa; es decir, no puede concluirse nada.*

Demostración. La demostración es paralela a la del teorema 8.

(a) Sea $L = 1 - a^* < 1$. Entonces por la definición de límite se tiene $\sqrt[n]{|z_n|} < q = 1 - \frac{1}{2}a^* < 1$ para toda n mayor que alguna N^* (suficientemente grande). Por tanto, $|z_n| < q^n < 1$ para toda $n > N^*$. La convergencia absoluta de la serie $z_1 + z_2 + \cdots$ se concluye ahora de la comparación con la serie geométrica.

(b) Si $L > 1$, también $\sqrt[n]{|z_n|} > 1$ para toda n suficientemente grande. Por tanto, $|z_n| > 1$ para estas n. Ahora, el teorema 3 implica que $z_1 + z_2 + \cdots$ diverge.

(c) Tanto la serie armónica *divergente* como la serie *convergente* $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots$ proporcionan $L = 1$. Lo anterior puede observarse a partir de $(\ln n)/n \to 0$ y

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{1/n}} = \frac{1}{e^{(1/n)\ln n}} \to \frac{1}{e^0}, \qquad \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n^{2/n}} = \frac{1}{e^{(2/n)\ln n}} \to \frac{1}{e^0}.$$ ∎

Ejemplo 6 Prueba de la razón.

La siguiente serie, ¿es convergente o divergente?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}+3}(4-i)^n = \frac{1}{4} - \frac{1}{7}(4-i) + \frac{1}{19}(4-i)^2 - + \cdots.$$

Solución. Por el teorema 10, la serie diverge, ya que

$$\sqrt[n]{\frac{|(4-i)^n|}{2^{2n}+3}} = \frac{|4-i|}{\sqrt[n]{4^n+3}} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt[n]{4^n+3}} \to L = \frac{\sqrt{17}}{4} > 1.$$ ∎

Aquí termina el análisis de los conceptos y hechos básicos sobre series complejas y pruebas de divergencia. En la siguiente sección se inicia el trabajo verdadero.

Problemas de la sección 14.1

Sucesiones

Las siguientes sucesiones, ¿están acotadas? ¿Son convergentes? Determinar sus puntos límite.

1. $z_n = (-1)^n + 2i$
2. $z_n = e^{in\pi/2}$
3. $z_n = (-1)^n/(n+i)$
4. $z_n = (3+4i)^n/n!$
5. $(3i)^n - (1+i)^n$
6. $z_n = \frac{1}{2}\pi + e^{in\pi/4}/n\pi$
7. $z_n = (-1)^n + i/n$
8. $z_n = n\pi/(1+2in)$
9. $z_n = i^n \cos n\pi$

10. **(Unicidad del límite).** Demostrar que si una sucesión converge, entonces su límite es único.
11. Si $z_1 + z_2 + \cdots$ converge al límite l y $z_1^* + z_2^* + \cdots$ converge al límite l^*, demostrar que $z_1 + z_1^*, z_2 + z_2^*, \cdots$ converge al límite $l + l^*$.
12. Demostrar que con las hipótesis del problema 11 la sucesión $z_1z_1^*, z_2z_2^*, \cdots$, converge al límite ll^*.
13. Demostrar que una sucesión compleja $z_1 + z_2 + \cdots$ está acotada si y sólo si las dos sucesiones correspondientes de las partes reales e imaginarias están acotadas.

Series

14. **(Convergencia absoluta).** Demostrar que si una serie converge absolutamente, entonces es convergente.

Las siguientes series, ¿son convergentes o divergentes?

15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(100+200i)^n}{n!}$
16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-i}{3n+2i}$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$
18. $\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$
19. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8i}{9}\right)^n n^4$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}+i^{2n}}{n!}$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2i)^n n!}{n^n}$
22. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(10+7i)^{8n}}{(2n)!}$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n n}$
24. Suponer que $|z_{n+1}/z_n| \leqq q < 1$, de modo que la serie $z_1 + z_2 + \cdots$ converge por la prueba de la razón (teorema 7). Demostrar que el residuo $R_n = z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots$ satisface $|R_n| \leqq |z_{n+1}|/(1-q)$. (*Sugerencia.* Aplicar el hecho de que la prueba de la razón es una comparación de la serie $z_1 + z_2 + \cdots$ con la serie geométrica.)
25. Usar el problema 24 para encontrar cuántos términos bastan para calcular la suma s de la serie en el problema 23 con un error inferior a 0.05, y calcular s con esta exactitud.

14.2 SERIES DE POTENCIAS

Las series de potencias constituyen las series más importantes en análisis complejo, como se mencionó al inicio del capítulo y como se verá a continuación en detalle.

Una **serie de potencias** *en potencias de* $z - z_0$ es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots \tag{1}$$

en donde z es una variable, $a_0, a_1, \cdots$ son constantes, denominadas **coeficientes** de la serie, y z_0 es una constante, denominada **centro** de la serie.

Si $z_0 = 0$, se obtiene un caso particular de una *serie de potencias en potencias de* z:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots. \tag{2}$$

Comportamiento de las series de potencias en cuanto a convergencia

En la última sección se presentó la definición para series de *términos constantes*. Si los términos de una serie son *variables*, como funciones de una variable z (por ejemplo, potencias de z, como en una serie de potencias), entonces asumen valores definidos si se fija z, y así se aplican todas aquellas definiciones. Resulta evidente que para una serie de funciones de z, las sumas parciales, los residuos y la suma son funciones de z. En términos generales, una serie así converge para alguna z, por ejemplo, a lo largo de toda una región, y diverge para otra z. En general, tal región puede ser complicada. Para una *serie de potencias* es simple. De hecho, se verá (en el teorema 1, que se presenta a continuación), que (1) converge a lo largo de todo un disco con centro en z_0 —este es el caso general— o en todo el plano complejo; o bien, converge sólo en el centro z_0, en [cuyo caso (1) es prácticamente inútil]. Primero se ilustrarán estas tres posibilidades con tres ejemplos típicos.

Ejemplo 1 Convergencia en un disco. Serie geométrica.

La *serie geométrica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$$

converge absolutamente si $|z| < 1$ y diverge si $|z| \geqq 1$ (ver el teorema 6 en la sección 14.1). ∎

Ejemplo 2 Convergencia para todo z.

La serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

es absolutamente convergente para toda z. De hecho, por la prueba de la razón, para cualquier z fija se tiene que

$$\left|\frac{z^{n+1}/(n+1)!}{z^n/n!}\right| = \frac{|z|}{n+1} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$ ∎

Ejemplo 3 Convergencia sólo en el centro. (Serie inútil).

La serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\,z^n = 1 + z + 2z^2 + 6z^3 + \cdots$$

converge sólo en $z = 0$, pero diverge para todo $z \neq 0$. De hecho, a partir de la prueba de la razón se tiene que

$$\left|\frac{(n+1)!z^{n+1}}{n!z^n}\right| = (n+1)|z| \longrightarrow \infty \quad \text{cuando} \quad n \to \infty \quad (z \text{ fijo y } \neq 0).$$ ∎

Toda serie de potencias (1) converge en el centro porque para $z = z_0$ la serie se reduce al único término a_0. Si este no es el único punto de convergencia, de modo que (1) también converge para alguna $z_1 \neq z_0$, entonces (1) converge para toda z que esté más próxima a z_0 que a z_1:

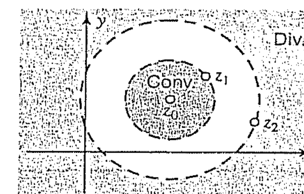


Figura 337. Teorema 1.

Teorema 1 (Convergencia de una serie de potencias)

Si la serie de potencias (1) *converge en un punto* $z = z_1 \neq z_0$, *entonces converge absolutamente para todo* z *que esté más próximo a* z_0 *que a* z_1, *es decir,* $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$. Ver la figura 337.

Si (1) *diverge en un* $z = z_2$, *entonces diverge para todo* z *que esté más lejos de* z_0 *que de* z_1. Ver la figura 337.

Demostración. Como la serie (1) converge para z_1, al aplicar el teorema 3 de la sección 14.1 se obtiene

$$a_n(z_1 - z_0)^n \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Lo anterior implica que para $z = z_1$ los términos de la serie (1) están acotados, por ejemplo,

$$|a_n(z_1 - z_0)^n| < M \qquad \text{para todo } n = 0, 1, \cdots.$$

Al multiplicar y dividir entre $(z_1 - z_0)^n$, a partir de lo anterior se obtiene

$$(3) \qquad |a_n(z - z_0)^n| = \left|a_n(z_1 - z_0)^n \left(\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right)^n\right| \leqq M \left|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right|^n.$$

Ahora la hipótesis $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ implica que

$$\left|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right| < 1. \qquad \text{Por tanto, la serie} \qquad M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right|^n$$

es una serie geométrica convergente (ver el teorema 6 en la sección 14.1). La convergencia de (1) cuando $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ se concluye ahora a partir de (3) y de la prueba de comparación en la sección 14.1.

Si la segunda afirmación del teorema fuese falsa, entonces se tendría convergencia en un z_3 tal que $|z_3 - z_0| > |z_2 - z_0|$, lo que implica convergencia en z_2 por la afirmación recientemente demostrada, lo cual contradice la divergencia asumida en z_2. ∎

Radio de convergencia de una serie de potencias

Los ejemplos 2 y 3 ilustran que una serie de potencias puede converger para todo z o sólo para $z = z_0$. Ambos casos se excluirán por el momento. Entonces, si se tiene una

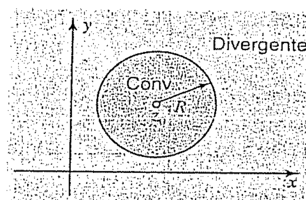


Figura 338. Círculo de convergencia.

serie de potencias (1), es posible considerar todos los puntos z en el plano complejo para los cuales la serie converge. Sea R tal que la distancia de cada uno de estos puntos al centro z_0 es menor o igual que R, y se supondrá que R es el menor número posible con esta propiedad; en otras palabras, R es el radio del *menor* círculo con centro en z_0 que contiene a todos los puntos en los cuales la serie converge. Entonces, el teorema 1 implica convergencia para todo z dentro de tal círculo; es decir, para todo z para el que

$$|z - z_0| < R. \tag{4}$$

Y como R es lo más pequeño posible, entonces la serie diverge para toda z para la que

$$|z - z_0| > R.$$

El círculo

$$\boxed{|z - z_0| = R}$$

se denomina **círculo de convergencia**, y su radio R es el **radio de convergencia** de (1). Ver la figura 338.

Para incluir los dos casos excluidos en la notación, se escribe

$R = \infty$ si la serie (1) converge para todo z (como en el ejemplo 2).

$R = 0$ si (1) converge sólo en el centro $z = z_0$ (como en el ejemplo 3).

Lo anterior es una notación conveniente, pero nada más.

Para una serie de potencias *real* (1) en potencias de $x - x_0$ con coeficientes y centro reales, (4) proporciona el **intervalo de convergencia** $|x - x_0| < R$ de longitud $2R$ sobre la recta real.

Para evitar malentendidos: no es posible hacer ninguna afirmación general acerca de la convergencia de una serie de potencias (1) ***sobre el círculo de convergencia*** mismo. La serie (1) puede converger en alguno o en ninguno de estos puntos. Los detalles carecen de importancia en este texto; por tanto, un simple ejemplo basta para darse una idea.

Ejemplo 4 Comportamiento sobre el círculo de convergencia

Sobre el círculo de convergencia (radio $R = 1$ en todas las tres series),

$\Sigma z^n/n^2$ converge en todas partes, ya que $\Sigma 1/n^2$ converge.
$\Sigma z^n/n$ converge en -1 (por la prueba de Leibnitz), pero diverge en 1.
Σz^n diverge en todas partes.

El radio de convergencia R de la serie de potencias (1) puede determinarse a partir de los coeficientes de la serie como se muestra a continuación.

Teorema 2 (Radio de convergencia R)

Suponga que la sucesión $|a_{n+1}/a_n|$, $n = 1, 2, \cdots$, *converge con límite* L^*. *Si* $L^* = 0$, *entonces* $R = \infty$; *es decir, la serie de potencias* (1) *converge para todo* z. *Si* $L^* \neq 0$, (*por tanto* $L^* > 0$), *entonces*

$$\boxed{R = \frac{1}{L^*}} \qquad \textbf{(Fórmula de Cauchy-Hadamard[1]).} \tag{5}$$

Si $|a_{n+1}/a_n| \to \infty$, *entonces* $R = 0$ (*convergencia sólo en el centro* z_0).

Demostración. La serie (1) tiene los términos $Z_n = a_n(z - z_0)^n$. Por tanto, en la prueba de la razón (teorema 8 de la sección 14.1),

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{Z_{n+1}}{Z_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}(z - z_0)^{n+1}}{a_n(z - z_0)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z - z_0|,$$

es decir,

$$L = L^*|z - z_0|.$$

Si $L^* = 0$, *entonces* $L = 0$ para todo z, y la prueba de la razón proporciona convergencia para todo z, como se afirmó. Sea $L^* > 0$. Si $|z - z_0| < 1/L^*$, entonces $L = L^*|z - z_0| < 1$, y (1) converge por la prueba de la razón. Si $|z - z_0| > 1/L^*$, entonces $L > 1$, y (1) diverge por la prueba de la razón. Por definición, lo anterior muestra que $1/L^*$ es el radio de convergencia R de (1) y demuestra (5). Si $|a_{n+1}/a_n| \to \infty$, entonces $|Z_{n+1}/Z_n| \geqq 1$ para todo $z \neq z_0$ y toda n suficientemente grande, de modo que la divergencia de (1) para todo $z \neq z_0$ ahora se concluye con base en el teorema 7 de la sección 14.1. ∎

Comentario. Si $L^* = \lim |a_{n+1}/a_n| \neq 0$, entonces con (5) se obtiene

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.} \tag{6}$$

[1] Denominada así en honor de los matemáticos franceses A. L. CAUCHY (ver la nota de pie de página de la sección 2.6) y JAQUES HADAMARD (1865-1963). Hadamard realizó contribuciones fundamentales a la teoría de la serie de potencias y dedicó su obra a las ecuaciones diferenciales parciales.

Lo anterior es plausible, ya que si $a_n \to 0$ rápidamente, entonces $|a_n/a_{n+1}|$ es grande en promedio (¿por qué?) y la serie converge en un gran disco. Si $a_n \to 0$ lentamente, entonces $|a_n/a_{n+1}|$ es relativamente pequeño y la serie converge en un disco relativamente pequeño.

Las fórmulas (5) y (6) no son de utilidad si L^* no existe, aunque siguen siendo posibles extensiones del teorema 2, como se analizará a continuación en el ejemplo 6.

Ejemplo 5 Radio de convergencia.

Determinar el radio de convergencia R de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}(z-3i)^n.$$

Solución. Por (5).

$$L^* = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!/[(n+1)!]^2}{(2n)!/(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4, \qquad R = \frac{1}{L^*} = \frac{1}{4}.$$

La serie converge en el disco abierto $|z-3i| < 1/4$ de radio $1/4$ y centro $3i$. ∎

Ejemplo 6 Extensión del teorema 2

Determinar el radio de convergencia R de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + (-1)^n + \frac{1}{2^n}\right] z^n = 3 + 2^{-1}z + (2+2^{-2})z^2 + 2^{-3}z^3 + (2+2^{-4})z^4 + \cdots.$$

Solución. Debido que la sucesión de las razones $1/6$, $2(2+2^{-2})$, $1/2^3(2+2^{-2})$, $\cdots$ no converge, entonces el teorema 2 no es de utilidad. Es posible demostrar que

$$(5^*) \qquad R = 1/\tilde{L}, \qquad \tilde{L} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Lo anterior sigue no siendo de utilidad en este caso, ya que $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ no converge porque por inspección se demuestra que tiene dos puntos límite: $1/2$ y 1. Además, es posible demostrar que

$$(5^{**}) \qquad R = 1/\tilde{l}, \qquad \tilde{l} \text{ es el mayor punto límite de la sucesión } \{\sqrt[n]{|a_n|}\}.$$

Aquí $\tilde{l} = 1$, de modo que $R = 1$. *Respuesta.* La serie converge para $|z| < 1$. ∎

Resumen. Las series de potencias convergen en un disco circular abierto o algunas incluso para todo z (o algunas sólo en el centro, aunque no son de utilidad); para el radio de convergencia, ver (5), (6) o el ejemplo 6.

Las series de potencias, excepto por las que no son de utilidad, poseen sumas que son funciones analíticas (como se demostrará en la siguiente sección); este hecho explica su importancia.

Problemas de la sección 14.2

Encontrar el centro y el radio de convergencia de las siguientes series de potencias.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} (z+4i)^n$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} n\pi^n(z-i)^n$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n z^{2n}$
4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}$
5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{5^n}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n^2}$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{10n}}{n!}(z+i)^n$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n(z+1)^n$
9. $\sum_{n=0}^{\infty} (3z-2i)^n$
10. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} z^{2n}$
11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n n^3}{2^n} z^{2n}$
12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3}(z+\pi i)^n$
13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n^n}$
15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(z+2)^n$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n-1} z^{2n}$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}(z-1)^{2n}$
19. Demostrar que si una serie de potencias $\Sigma a_n z^n$ tiene radio de convergencia R (que se supone finito), entonces $\Sigma a_n z^{2n}$ tiene el radio de convergencia $\sqrt{R}$.
20. ¿Existe una serie de potencias en potencias de z que converja en $z = 30 + 10i$ y diverja en $z = 31 - 6i$? (Justificar la respuesta.)

14.3 FUNCIONES DADAS POR SERIES DE POTENCIAS

El objetivo principal de esta sección es demostrar que las series de potencias representan funciones analíticas (teorema 5). En el proceso para lograr tal objetivo se verá que las series de potencias tienen un "buen" comportamiento bajo la suma, multiplicación, diferenciación e integración, lo cual las hace bastante útiles en análisis complejo.

Para simplificar las fórmulas de esta sección, se toma $z_0 = 0$ y se escribe

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Lo anterior no es una restricción, ya que en una serie en potencias de $z^* - z_0$ con cualquier centro z_0 siempre es posible escribir $z^* - z_0 = z$ para reducirla a la forma (1).

Si una serie de potencias (1) arbitraria tiene un radio de convergencia diferente de cero, entonces su sumatoria es una función de z, por ejemplo, $f(z)$. Así, se escribe

$$(2) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \qquad (|z| < R).$$

Se dice que $f(z)$ *está* **representada** *por la serie de potencias* o que *está* **desarrollada** *en la serie de potencias*. Por ejemplo, la serie geométrica representa la función $f(z) = 1/(1-z)$ en el interior del círculo unitario $|z| = 1$. (Ver el ejemplo 1 en la sección 14.2.)

El primer objetivo es demostrar la **unicidad** de tal representación; es decir, *una función $f(z)$ no puede representarse por dos series de potencias diferentes con el mismo centro.* Si $f(z)$ puede desarrollarse en una serie de potencias con centro z_0, entonces el desarrollo es único. Este hecho importante suele usarse frecuentemente en análisis complejo y real. Este resultado (teorema 2, que se enuncia a continuación) es una consecuencia del

Teorema 1 (Continuidad de la suma de una serie de potencias)

La función $f(z)$ en (2) con $R > 2$ es continua en $z = 0$.

Demostración. Por la definición de continuidad, debe demostrarse que

$$\lim_{z \to 0} f(z) = f(0) = a_0,$$

es decir, es necesario demostrar que para un $\epsilon > 0$ dado existe un $\delta > 0$ tal que $|z| < \delta$ implica $|f(z) - a_0| < \epsilon$. Luego, por el teorema 1 en la sección 14.2, (2) converge absolutamente para $|z| \leqq r < R$. Por tanto, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^{n-1} = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n \qquad (r > 0)$$

converge. Sea S su suma. Entonces, para $0 < |z| \leqq r$,

$$|f(z) - a_0| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \right| \leqq |z| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, |z|^{n-1}$$

$$\leqq |z| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^{n-1} = |z| S.$$

Lo anterior es menor que ϵ para $|z| < \delta$, en donde $\delta > 0$ es menor que r y que ϵ / S. ∎

Con base en este teorema ahora ya es fácil establecer el teorema de unicidad deseado (una vez más suponiendo $z_0 = 0$ sin pérdida de generalidad):

Teorema 2 (Teorema de identidad para series de potencias)

Suponer que las series de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad y \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

convergen para $|z| < R$, en donde r es positivo, y que tienen la misma suma para todos estos z. Entonces estas series son idénticas; es decir,

$$a_n = b_n \qquad \textit{para todo } n = 0, 1, \cdots.$$

Demostración. Se procederá por inducción. Por hipótesis,

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots \qquad (|z| < R).$$

Por el teorema 1, las sumas de estas dos series de potencias son continuas en $z = 0$. Así, $a_0 = b_0$; la afirmación es cierta para $n = 0$. Luego, se supone que $a_n = b_n$ para $n = 0, 1, \cdots, m$. Entonces es posible omitir en ambos miembros los términos iguales y dividir el resultado entre z^{m+1} ($\neq 0$); así se obtiene

$$a_{m+1} + a_{m+2} z + a_{m+3} z^2 + \cdots = b_{m+1} + b_{m+2} z + b_{m+3} z^2 + \cdots.$$

Por el teorema 1, cada una de estas series de potencias representa una función que es continua en $z = 0$. Por tanto, $a_{m+1} = b_{m+1}$. Así se completa la demostración. ∎

Las series de potencias representan funciones analíticas

Este hecho se demostrará como el objetivo más importante de esta sección, luego de una breve preparación. En la siguiente sección se verá que, recíprocamente, *toda* función analítica puede representarse mediante series de potencias (denominadas *series de Taylor*). Este hecho es bastante sorprendente y explica la gran importancia de las series de potencias en análisis complejo.

La **suma o resta término a término** de dos series de potencias con radios de convergencia R_1 y R_2 produce una serie de potencias con radio de convergencia por lo menos igual al menor de R_1 y R_2. *Demostración.* Las sumas parciales s_n y s_n^* se suman (restan) término a término y se usa lím $(s_n \pm s_n^*)$ = lím $s_n \pm$ lím s_n^*.

La **multiplicación término a término** de dos series de potencias

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + \cdots$$

y

$$g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m = b_0 + b_1 z + \cdots,$$

significa la multiplicación de cada término de la primera serie por cada término de la segunda serie y el agrupamiento de los términos que tienen la misma potencia de z. Con lo anterior se obtiene una serie de potencias, denominada **producto de Cauchy** de las dos series, y que está dada por

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) z^n.$$

Sin demostración, se afirma que esta serie de potencias converge absolutamente para todo z dentro del círculo de convergencia de cada una de las dos series dadas, y que su suma es $s(z) = f(z) g(z)$. Para una demostración de lo anterior, ver [D7] mencionada en el apéndice 1.

La **diferenciación e integración término a término** de una serie de potencias es permisible, como se mostrará a continuación. La serie de potencias que se obtiene al

derivar término a término (1) se denomina **serie derivada** *de la serie de potencias* (1); es decir,

$$(3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1} = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots.$$

Teorema 3 (Diferenciación término a término de una serie de potencias)

La serie derivada de una serie de potencias tiene el mismo radio de convergencia que la serie original.

Demostración. Este hecho es una conclusión de (5) en la sección 14.2 porque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

o, en caso de que el último límite no exista, a partir de (5**) en la sección 14.2, observando que $\sqrt[n]{n} \to 1$ cuando $n \to \infty$.

Ejemplo 1 Una aplicación del teorema 3.

Encontrar el radio de convergencia R de la siguiente serie, aplicando el teorema 3.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \binom{n}{2} z^n = z^2 + 3z^3 + 6z^4 + 10z^5 + \cdots.$$

Solución. La serie geométrica se deriva dos veces término a término y el resultado se multiplica por $z^2/2$. Con lo anterior se obtiene la serie dada. Por tanto, $R = 1$ debido al teorema 3. ∎

Teorema 4 (Integración término a término de una serie de potencias)

La serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} = a_0 z + \frac{a_1}{2} z^2 + \frac{a_2}{3} z^3 + \cdots$$

que se obtiene al integrar término a término la serie $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ *tiene el mismo radio de convergencia que la serie original.*

La demostración es semejante a la del teorema 3.

Con el teorema 3 como herramienta, ahora ya es fácil establecer el resultado principal de esta sección:

Teorema 5 (Funciones analíticas. Sus derivadas)

Una serie de potencias con radio de convergencia R diferente de cero representa una función analítica en todo punto interior de su círculo de convergencia. Las derivadas de esta función se obtienen por diferenciación término a término de la serie original. Todas las series así obtenidas tienen el mismo radio de convergencia que la serie original. Por tanto, en virtud de la primera afirmación, cada una de ellas representa una función analítica.

Demostración. (a) Se considerará cualquier serie de potencias (1) con radio de convergencia positivo R. Sean $f(z)$ su suma y $f_1(z)$ la suma de su serie derivada; por tanto,

$$(4) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{y} \qquad f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}.$$

Se demostrará que $f(z)$ es analítica y que su derivada es $f_1(z)$ en el interior del círculo de convergencia. Lo anterior se efectuará probando que para cualquier z fijo con $|z| < R$ y $\Delta z \to 0$, el cociente de diferencias $[f(z+\Delta z) - f(z)]/\Delta z$ tiende a $f_1(z)$. Al sumar término a término, por (4) primero se tiene que

$$(5) \qquad \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} - f_1(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left[\frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} - nz^{n-1} \right].$$

Observe que la sumatoria empieza con 2, ya que el término constante se elimina al tomar la diferencia $f(z+\Delta z) - f(z)$, y el término lineal también se elimina cuando $f_1(z)$ se resta del cociente de diferencias.

(b) Se afirma que la serie en (5) puede escribirse como

$$(6) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} a_n \Delta z[(z+\Delta z)^{n-2} + 2z(z+\Delta z)^{n-3} + \cdots + (n-1)z^{n-2}].$$

La demostración, algo técnica, se proporciona en el apéndice 4.

(c) Se considerará (6). Los corchetes contienen $n - 1$ términos, y el coeficiente más grande es $n - 1$. Como $(n-1)^2 < n(n-1)$, se observa que para $|z| \leqq R_0$ y $|z + \Delta z| \leqq R_0$, $R_0 < R$, el valor absoluto de esta serie no puede exceder

$$|\Delta z| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n(n-1) R_0^{\,n-2}.$$

Esta serie con a_n en vez de $|a_n|$ es la segunda serie derivada de (2) en $z = R_0$ y converge absolutamente debido al teorema 3 y por el teorema 1 de la sección 14.2. Por tanto, la serie actual converge. Sea $K(R_0)$ su suma. Entonces el resultado anterior puede escribirse como

$$\left| \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} - f_1(z) \right| \leqq |\Delta z|\, K(R_0).$$

Al hacer que $\Delta z \to 0$ y observando que R_0 ($< R$) es arbitrario, se concluye que $f(z)$ es analítica en cualquier punto interior del círculo de convergencia y que su derivada está representada por la serie derivada. A partir de este hecho, la afirmación sobre las derivadas superiores se concluye por inducción. ∎

Resumen. Los resultados presentados en esta sección muestran que las series de potencias son tan "bondadosas" como era de esperar; es posible diferenciarlas e integrarlas término a término (teoremas 3 y 4). El teorema 5 explica la gran importancia de las series de potencias en análisis complejo; la suma de tales series (con radio de convergencia positivo) es una función analítica y tiene derivadas de todos los órdenes, que por tanto son funciones analíticas. Sin embargo, ésta es sólo una parte de la historia. En la siguiente sección se demostrará que, recíprocamente, *toda* función analítica dada $f(z)$ puede representarse por series de potencias.

Problemas de la sección 14.3

Encontrar el radio de convergencia de las siguientes series de dos maneras: (a) directamente aplicando la fórmula de Cauchy-Hadamard (sección 14.2) y (b) aplicando el teorema 3 o el teorema 4 y una serie con coeficientes más simples.

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2^n}(z-i)^n$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(n+1)} z^n$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}(z+1)^{2n}$
4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{z}{\pi}\right)^{2n+1}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n(n+1)}{7^n} z^{2n}$
6. $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m}{m} z^n$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-6)^n}{n(n+1)(n+2)} z^n$
8. $\sum_{n=0}^{\infty} \left[\binom{n+k}{n}\right]^{-1} z^{n+k}$
9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n+1)(n!)^2} z^{n+1}$
10. En la demostración del teorema 3 se afirmó que $\sqrt[n]{n} \to 1$ cuando $n \to \infty$. Demostrar este hecho. *Sugerencia.* Sea $\sqrt[n]{n} = 1 + c_n$, donde $c_n > 0$, y demostrar que $c_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.
11. Demostrar que $(1-z)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n$ (a) usando el producto de Cauchy y (b) diferenciando una serie idónea.
12. Aplicando el teorema 2 a $(1+z)^p(1+z)^q = (1+z)^{p+q}$ (p y q enteros positivos), demostrar que
$$\sum_{n=0}^{r} \binom{p}{n}\binom{q}{r-n} = \binom{p+q}{r}.$$
13. Si $f(z)$ en (1) es par, demostrar que $a_n = 0$ para n impar. (Aplicar el teorema 2.)
14. **(Números de Fibonacci[2])** Los *números de Fibonacci* se definen de manera recurrente como $a_0 = a_1 = 1$, $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ si $n \geqq 2$. Demostrar que si una serie de potencias $a_0 + a_1 z + \cdots$ representa a $f(z) = 1/(1 - z - z^2)$, entonces sus coeficientes deben ser tales números y recíprocamente. *Sugerencia.* Empezar a partir de $f(z)(1 - z - z^2) = 1$ y aplicar el teorema 2.
15. Escribir la demostración de la suma y la resta término a término de una serie de potencias indicadas en el texto.

14.4 SERIES DE TAYLOR

La suma de cualquier serie de potencias (con radio de convergencia positivo) es una función analítica, como acaba de verse (teorema 5, sección 14.3). A continuación se

[2] LEONARDO DE PISA, llamado FIBONACCI (= hijo de Bonaccio), ca. 1180-1250, matemático italiano a quien se atribuye el primer renacimiento de las matemáticas en territorio cristiano.

demostrará que, recíprocamente, *toda* función analítica $f(z)$ puede representarse mediante series de potencias, denominadas **series de Taylor** de $f(z)$ y que son de la misma forma que en cálculo, con x sustituida por el complejo z.

Así, sea $f(z)$ analítica en una vecindad de un punto $z = z_0$; primero se obtendrá la **fórmula de Taylor** y a partir de ésta se deducirá la serie de Taylor de $f(z)$ con centro en z_0.

La herramienta crucial en la obtención de la fórmula de Taylor es la fórmula de la integral de Cauchy (1) en la sección 13.5; al escribir z y z^* en vez de z_0 y z, se tiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z^*)}{z^* - z}\, dz^*. \qquad (1)$$

z está dentro de C, por lo cual en tal vecindad se considera un círculo de radio r con centro en z_0. z^* es la variable compleja de integración (figura 339). La siguiente idea es desarrollar $1/(z^* - z)$ en (1) en potencias de $z - z_0$. Aplicando algunos pasos algebraicos (¡que merecen la pena de recordarse!), primero se obtiene

$$\frac{1}{z^* - z} = \frac{1}{z^* - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{(z^* - z_0)\left(1 - \dfrac{z - z_0}{z^* - z_0}\right)}. \qquad (2)$$

Para usar más tarde, se observa que como z^* está sobre C mientras z está en C, se tiene

$$\left|\frac{z - z_0}{z^* - z_0}\right| < 1. \qquad (2^*)$$

Ahora, a (2) se aplica la fórmula de la suma para una suma geométrica finita

$$1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q} \qquad (q \neq 1), \qquad (3^*)$$

que se usa en la forma

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + \cdots + q^n + \frac{q^{n+1}}{1-q}. \qquad (3)$$

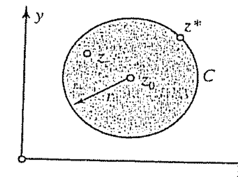


Figura 339. Fórmula de Cauchy (1).

Al aplicar (3) con $q = (z - z_0)/(z^* - z)$ al miembro derecho de (2) se obtiene

$$\frac{1}{z^* - z} = \frac{1}{z^* - z_0}\left[1 + \frac{z - z_0}{z^* - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{z^* - z_0}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z - z_0}{z^* - z_0}\right)^n\right] + \frac{1}{z^* - z}\left(\frac{z - z_0}{z^* - z_0}\right)^{n+1}.$$

La expresión anterior se inserta en (1). Las potencias de $z - z_0$ no dependen de la variable de integración z^*, de modo que es posible sacarlas del signo de la integral, con lo que se obtiene

$$(4)\quad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z^*)}{z^* - z_0}\,dz^* + \frac{z - z_0}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^2}\,dz^* + \cdots + \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}}\,dz^* + R_n(z)$$

en donde el último término está dado por la fórmula

$$(5)\quad R_n(z) = \frac{(z - z_0)^{n+1}}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}(z^* - z)}\,dz^*.$$

Usando las fórmulas de las integrales (1) en la sección 13.6 para las derivadas se obtiene

$$(6)\quad f(z) = f(z_0) + \frac{z - z_0}{1!}f'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!}f''(z_0) + \cdots + \frac{(z - z_0)^n}{n!}f^{(n)}(z_0) + R_n(z).$$

Esta representación se denomina **fórmula de Taylor**[3], $R_n(z)$ se denomina *residuo*. Como la función analítica $f(z)$ tiene derivadas de todos los órdenes, entonces n en (6) puede tomarse tan grande como se quiera. Si se deja que n tienda a infinito, a partir de (6) se obtiene la serie de potencias

$$(7)\quad \boxed{f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z - z_0)^m.}$$

Esta serie se denomina **serie de Taylor** de $f(z)$ *con centro* z_0. El caso particular de (7) con centro $z_0 = 0$ se denomina **serie de Maclaurin**[4] de $f(z)$.

[3] BROOK TAYLOR (1685-1731), matemático inglés que introdujo esta fórmula para funciones de una variable real.

[4] COLIN MACLAURIN (1698-1746), matemático escocés, profesor en Edimburgo.

Resulta evidente que la serie (7) converge y representa a $f(z)$ si y sólo si

$$(8)\quad \lim_{n\to\infty} R_n(z) = 0.$$

Para demostrar (8), se considera (5). Como z^* está sobre C mientras z está en el interior de C (figura 339), se tiene $|z^* - z| > 0$. Con base en esta expresión y en la analiticidad de $f(z)$ dentro y sobre C se concluye que el valor absoluto de $f(z^*)/(z^* - z)$ está acotado, por ejemplo,

$$\left|\frac{f(z^*)}{z^* - z}\right| \leqq \tilde{M}$$

para toda z^* sobre C. También, $|z^* - z_0| = r$, el radio de C, y la longitud de C es $2\pi r$. Por tanto, al aplicar la desigualdad ML (sección 13.2) a (5) se obtiene

$$|R_n| = \frac{|z - z_0|^{n+1}}{2\pi}\left|\int_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}(z^* - z)}\,dz^*\right| \leqq \frac{|z - z_0|^{n+1}}{2\pi}\tilde{M}\frac{1}{r^{n+1}}2\pi r = \tilde{M}r\left|\frac{z - z_0}{r}\right|^{n+1}$$

En el miembro de la derecha, $|z - z_0| < r$, ya que z está *en el interior* del círculo C. Así, $|z - z_0|/r < 1$, de modo que el miembro derecho tiende a cero cuando $n \to \infty$. Esto demuestra (8) para toda z en el interior de C. Por el teorema 2 de la última sección, la representación de $f(z)$ en la forma (7) es única en el sentido de que (7) es la única serie de potencias con centro en z_0 que representa la función $f(z)$ dada. Por tanto, es posible agregar el resultado como sigue.

Teorema 1 (Teorema de Taylor)

Sea $f(z)$ analítica en un dominio D, y sea $z = z_0$ cualquier punto en D. Entonces existe exactamente una serie de potencias con centro en z_0 que representa a $f(z)$. Esta serie es de la forma

$$(9)\quad \boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{en donde} \quad a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0).}$$

Esta representación es válida en el mayor disco abierto con centro z_0 contenido en D. Los residuos $R_n(z)$ de (9) pueden representarse en la forma (5). Estos coeficientes satisfacen la desigualdad

$$(10)\quad |a_n| \leqq \frac{M}{r^n}$$

en donde M es el máximo de $|f(z)|$ sobre la circunferencia $|z - z_0| = r$.

La desigualdad (10) se concluye de la desigualdad de Cauchy (3) en la sección 13.6. Con la fórmula (1) de la sección 13.6 también se obtienen los coeficientes en (9)

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz, \qquad (9^*)$$

en donde se integra en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de una trayectoria simple cerrada que contiene en su interior a z_0.

Prácticamente, (8) significa que para todo z para el que (9) converge, la n-ésima suma parcial (9) tenderá a $f(z)$ con la exactitud que se quiera; basta elegir a n suficientemente grande.

Los **puntos singulares** de una función analítica $f(z)$ son puntos en los que $f(z)$ deja de ser analítica. Más precisamente, $z = c$ se denomina *punto singular* de $f(z)$ si $f(z)$ no es diferenciable en $z = c$, aunque todo disco con centro en c contiene puntos en los que $f(z)$ es diferenciable. También se dice que $f(z)$ ***tiene una singularidad*** en $z = c$. *Ejemplos*: $1/(1-z)$ en $z = 1$, $\tan z$ en $\pm\pi/2$, $\pm 3\pi/2$, etc., $\cdots$.

Usando este concepto, es posible afirmar que existe por lo menos un punto singular de $f(z)$ sobre el círculo de convergencia[5] del desarrollo (9).

Importantes series de Taylor especiales

Son como en cálculo, con x sustituida por el complejo z. ¿Puede ver por qué? (*Respuesta*. Las fórmulas de los coeficientes son las mismas.)

Ejemplo 1 Series geométricas

Sea $f(z) = 1/(1-z)$. Entonces se tiene $f^{(n)}(z) = n!/(1-z)^{n+1}$, $f^{(n)}(0) = n!$ Por tanto, el desarrollo de Maclaurin de $1/(1-z)$ es la serie geométrica

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots \qquad (|z| < 1). \qquad (11)$$

$f(z)$ es singular en $z = 1$; este punto se encuentra sobre el círculo de convergencia.

Ejemplo 2 La función exponencial.

Se sabe que la función exponencial e^z (sección 12.5) es analítica para toda z, y $(e^z)' = e^z$. Así, a partir de (9) con $z_0 = 0$ se obtiene la serie de Maclaurin

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots. \qquad (12)$$

Esta serie también se obtiene si x se sustituye por z en la conocida serie de Maclaurin de e^x.

[5] En general, el radio de convergencia de (9) es igual a la distancia de z_0 al punto singular más próximo de $f(z)$, aunque puede ser mayor; por ejemplo, $\text{Ln}\, z$ es singular a lo largo del eje real negativo y la distancia de $z_0 = -1 + i$ a ese eje es igual a 1, pero la serie de Taylor de $\text{Ln}\, z$ con centro en $z_0 = -1 + i$ tiene radio de convergencia igual a 2.

Además, al hacer $z = iy$ en (12) y separando la serie en las partes reales e imaginarias (ver el teorema 2 de la sección 14.1) se obtiene

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Como las series del miembro derecho son las conocidas series de Maclaurin de las funciones reales $\cos y$ y $\operatorname{sen} y$, esto demuestra que se ha redescubierto la **fórmula de Euler**

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y. \qquad (13)$$

De hecho, (13) puede usarse para ***definir*** e^z y deducir a partir de (12) las propiedades básicas de e^z. Por ejemplo, la fórmula de diferenciación $(e^z)' = e^z$ se concluye fácilmente a partir de (12) al derivar término a término. ■

Ejemplo 3 Funciones trigonométricas e hiperbólicas.

Al sustituir (12) en (1) de la sección 12.7 se obtiene

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \cdots$$
$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \cdots. \qquad (14)$$

Cuando $z = x$, las expresiones anteriores son las conocidas series de Maclaurin de las funciones reales $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$. De manera semejante, al sustituir (12) en (11) de la sección 12.7 se obtiene

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$
$$\operatorname{senh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \cdots. \qquad (15)$$

■

Ejemplo 4 Logaritmo.

Con base en (9) se concluye que

$$\text{Ln}\,(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - + \cdots \qquad (|z| < 1). \qquad (16)$$

Al sustituir z por $-z$ y multiplicar ambos miembros por -1 se obtiene

$$-\text{Ln}\,(1 - z) = \text{Ln}\,\frac{1}{1-z} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots \qquad (|z| < 1). \qquad (17)$$

Al sumar ambas series se obtiene

$$\text{Ln}\,\frac{1+z}{1-z} = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots\right) \qquad (|z| < 1). \qquad (18)$$

■

En la siguiente sección se explicarán algunos métodos prácticos para obtener series de Taylor que evitan los farragosos cálculos de las derivadas en (9).

Relación con la última sección

El análisis presentado en la última sección puede relacionarse de manera elegante con esta sección:

Teorema 2 *Toda serie de potencias con radio de convergencia diferente de cero es la serie de Taylor de la función representada por esa serie de potencias* (más brevemente: *se trata de la serie de Taylor de su suma*).

Demostración. Considerar cualquier serie de potencias con radio de convergencia positivo R y sea $f(z)$ su suma; así,

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots .$$

Con base en el teorema 5 de la última sección se concluye que

$$f'(z) = a_1 + 2a_2(z - z_0) + \cdots$$

y más generalmente,

$$f^{(n)}(z) = n!a_n + (n + 1)n \cdots 3 \cdot 2a_{n+1}(z - z_0) + \cdots ;$$

todas estas series convergen en el disco $|z - z_0| < R$ y representan funciones analíticas. Por tanto, debido al teorema 1 de la última sección estas funciones son continuas en $z = z_0$. Si se hace $z = z_0$, entonces se obtiene

$$f(z_0) = a_0, \quad f'(z_0) = a_1, \quad \cdots, \quad f^{(n)}(z_0) = n!a_n, \quad \cdots .$$

Como estas fórmulas son idénticas a las del teorema de Taylor, la demostración está completa. ∎

Comentario. Comparación con funciones reales.
Una propiedad sorprendente de las funciones analíticas complejas es que poseen derivadas de todos los órdenes, y ahora se ha descubierto la otra propiedad sorprendente de que siempre pueden representarse por series de potencias de la forma (9). En general, este hecho no es cierto para las ***funciones reales***; existen funciones reales que tienen derivadas de todos los órdenes, pero no es posible representarlas por una serie de potencias. (Ejemplo: $f(x) = \exp(-1/x^2)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$; esta función no puede representarse por una serie de Maclaurin, ya que todas sus derivadas son 0 en cero.)

Problemas de la sección 14.4

Encontrar la serie de Taylor de la función dada con el punto dado como centro y determinar el radio de convergencia. (Más problemas de este tipo se presentan en la siguiente sección, luego del análisis de los métodos prácticos.)

1. e^{-z}, 0
2. e^{2z}, $2i$
3. $\operatorname{sen} \pi z$, 0
4. $\cos z$, $-\pi/2$
5. $\operatorname{sen} z$, $\pi/2$
6. $1/z$, 1
7. $1/(1 - z)$, -1
8. $1/(1 - z)$, i
9. $\operatorname{Ln} z$, 1
10. $\operatorname{senh}(z - 2i)$, $2i$
11. z^5, -1
12. $z^4 - z^2 + 1$, 1
13. $\operatorname{sen}^2 z$, 0
14. $\cos^2 z$, 0
15. $\cos(z - \pi/2)$, $\pi/2$

Los problemas del 16 al 26 ilustran cómo es posible obtener propiedades de funciones a partir de su serie de Maclaurin.

16. Usando (12), demostrar que $(e^z)' = e^z$.
17. Deducir (14) y (15) a partir de (12). Obtener (16) a partir del teorema de Taylor.
18. Usando (14), demostrar que $\cos z$ es par y que $\operatorname{sen} z$ es impar.
19. Usando (15), demostrar que $\cosh z \neq 0$ para todos los reales $z = x$.
20. Usando (14), demostrar que $\operatorname{sen} z \neq 0$ para todos los imaginarios puros $z = iy \neq 0$.
21. Usando (14), demostrar que $(\operatorname{sen} z)' = \cos z$ y $(\cos z)' = -\operatorname{sen} z$.
22. Usando (14), demostrar que $\cos z + i \operatorname{sen} z$ produce la serie de Maclaurin para e^{iz}, y demostrar así la fórmula de Euler para el complejo z.
23. $f(z) = (\operatorname{sen} z)/z$ está indefinida en $z = 0$. Definir $f(0)$ de modo que $f(z)$ se vuelva entera. (Justificar la respuesta.)
24. Encontrar la derivada de $\operatorname{Ln}(1 + z)$ mediante la diferenciación de (16).
25. Deducir las relaciones (14) y (15), sección 12.7, entre el seno y el coseno trigonométricos e hiperbólicos a partir de las expresiones actuales (14) y (15).
26. A partir del problema 14, obtener la serie de Maclaurin de $\cosh^2 z$.

Los problemas del 27 al'30 abordan la **función error** fer z (que está relacionada con la distribución normal de los capítulos 23 y 24), la **integral del seno** $\operatorname{Si}(z)$, y las **integrales de Fresnel**[6] $S(z)$ y $C(z)$. Estas funciones especiales no elementales están definidas por integrales que no pueden evaluarse aplicando los métodos acostumbrados del cálculo, lo cual es bueno saber porque se presentan algunas veces en aplicaciones. Encontrar su serie de Maclaurin por integración término a término de la serie de Maclaurin del integrando.

27. $\operatorname{fer} z = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^z e^{-t^2}\, dt$
28. $\operatorname{Is}(z) = \displaystyle\int_0^z \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$
29. $S(z) = \displaystyle\int_0^z \operatorname{sen} t^2\, dt$
30. $C(z) = \displaystyle\int_0^z \cos t^2\, dt$

14.5 SERIES DE POTENCIAS: MÉTODOS PRÁCTICOS

En la mayor parte de los casos puede ser complicado o consumir mucho tiempo determinar los coeficientes de la serie de Taylor a partir de la fórmula en el teorema de Taylor, y existen formas mejores y más rápidas para efectuar lo anterior, como se ilustrará en términos de ejemplos típicos. Sin importar el método usado, se obtiene ***el mismo resultado***, como se concluye a partir del teorema de unicidad (teorema 2 de la sección 14.3).

Ejemplo 1 Sustitución.

Encontrar la serie de Maclaurin de $f(z) = 1/(1 + z^2)$.

Solución. Al sustituir $-z^2$ por z en (11), sección 14.4, se obtiene

$$(1) \qquad \frac{1}{1 + z^2} = \frac{1}{1 - (-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$$

$$= 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots \qquad (|z| < 1). \quad ∎$$

[6] AUGUSTIN FRESNEL (1788-1827), físico francés, conocido por su trabajo en óptica

Ejemplo 2 Integración.

Encontrar la serie de Maclaurin de $f(z) = \tan^{-1} z$.

Solución. Se tiene $f'(z) = 1/(1 + z^2)$. Al integrar (1) término a término y usando $f(0) = 0$, se obtiene

$$\tan^{-1} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - + \cdots \qquad (|z| < 1);$$

esta serie representa el valor principal de $w = u + iv = \tan^{-1} z$, definido como el valor para el que $|u| < \pi/2$. ∎

Ejemplo 3 Desarrollo usando la serie geométrica.

Desarrollar $1/(c - bz)$ en potencias de $z - a$, en donde $c - ab \neq 0$ y $b \neq 0$.

Solución. Para obtener potencias de $z - a$, se aplica álgebra simple:

$$\frac{1}{c - bz} = \frac{1}{c - ab - b(z - a)} = \frac{1}{(c - ab)\left[1 - \dfrac{b(z-a)}{c - ab}\right]}.$$

A la última expresión se aplica (11) de la sección 14.4, con z sustituido por $b(z - a)/(c - ab)$, con lo que se encuentra

$$\frac{1}{c - bz} = \frac{1}{c - ab} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{b(z-a)}{c - ab}\right]^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{(c - ab)^{n+1}} (z - a)^n$$

$$= \frac{1}{c - ab} + \frac{b}{(c - ab)^2}(z - a) + \frac{b^2}{(c - ab)^3}(z - a)^2 + \cdots.$$

Esta serie converge para

$$\left|\frac{b(z-a)}{c - ab}\right| < 1, \qquad \text{es decir,} \qquad |z - a| < \left|\frac{c - ab}{b}\right| = \left|\frac{c}{b} - a\right|.$$ ∎

Ejemplo 4 Serie binomial, reducción por fracciones parciales.

Encontrar la serie de Taylor de la siguiente función con centro en $z_0 = 1$.

$$f(z) = \frac{2z^2 + 9z + 5}{z^3 + z^2 - 8z - 12}$$

Solución. Dada una función racional, primero es aconsejable representarla como una suma de fracciones parciales y luego aplicar la serie binomial

(2)
$$\frac{1}{(1 + z)^m} = (1 + z)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-m}{n} z^n$$

$$= 1 - mz + \frac{m(m+1)}{2!} z^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{3!} z^3 + \cdots.$$

Como la función del miembro izquierdo es singular en $z = -1$, entonces la serie converge en el disco $|z| < 1$.

En este caso primero se tiene

$$f(z) = \frac{1}{(z + 2)^2} + \frac{2}{z - 3} = \frac{1}{[3 + (z - 1)]^2} - \frac{2}{2 - (z - 1)}.$$

Lo anterior puede escribirse como

$$f(z) = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{[1 + \frac{1}{3}(z - 1)]^2}\right) - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}(z - 1)}$$

Aplicando la serie binomial, ahora se obtiene

$$f(z) = \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} \left(\frac{z - 1}{3}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - 1}{2}\right)^n.$$

Las dos series en el miembro derecho pueden sumarse término a término. Como el coeficiente binomial de la primera serie es igual a $(-2)(-3) \cdots (-[n + 1])/n! = (-1)^n(n + 1)$, se encuentra

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n(n+1)}{3^{n+2}} - \frac{1}{2^n}\right](z - 1)^n = -\frac{8}{9} - \frac{31}{54}(z - 1) - \frac{23}{108}(z - 1)^2 - \cdots.$$

Como $z = 3$ es el punto singular de $f(z)$ más próximo al centro $z = 1$, entonces la serie converge en el disco $|z - 1| < 2$. ∎

Ejemplo 5 Uso de ecuaciones diferenciales.

Encontrar la serie de Maclaurin de $f(z) = \tan z$.

Solución. Se tiene $f'(z) = \sec^2 z$ y, en consecuencia, dado que $f(0) = 0$,

$$f'(z) = 1 + f^2(z), \qquad f'(0) = 1.$$

Al observar que $f(0) = 0$, por diferenciación sucesiva se obtiene

$$\begin{aligned}
f'' &= 2ff', & f''(0) &= 0, & & \\
f''' &= 2f'^2 + 2ff'', & f'''(0) &= 2, & f'''(0)/3! &= 1/3, \\
f^{(4)} &= 6f'f'' + 2ff''', & f^{(4)}(0) &= 0, & & \\
f^{(5)} &= 6f''^2 + 8f'f''' + 2ff^{(4)}, & f^{(5)}(0) &= 16, & f^{(5)}(0)/5! &= 2/15, \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Y por tanto el resultado es

(3)
$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \cdots \qquad \left(|z| < \frac{\pi}{2}\right).$$ ∎

Ejemplo 6 Coeficientes indeterminados.

Encontrar la serie de Maclaurin de $\tan z$ usando la serie del $\cos z$ y la serie del $\operatorname{sen} z$ (sección 14.4).

Solución. Como $\tan z$ es impar, entonces el desarrollo buscado es de la forma

$$\tan z = a_1 z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \cdots.$$

Usando $\operatorname{sen} z = \tan z \cos z$ e insertando los desarrollos anteriores, se obtiene

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \cdots = (a_1 z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \cdots)\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \cdots\right).$$

Como $\tan z$ es analítica excepto en $z = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \cdots$, entonces su serie de Maclaurin converge en el disco $|z| < \pi/2$, y para estos z es posible formar el producto de Cauchy de las dos series del miembro derecho (ver la sección 14.4); es decir, multiplicar las series término a término y ordenar la serie resultante

en potencias de z. Por el teorema 2 en la sección 14.3, el coeficiente de cada potencia de z es el mismo en ambos miembros. Lo anterior conduce a

$$1 = a_1, \qquad -\frac{1}{3!} = -\frac{a_1}{2!} + a_3, \qquad \frac{1}{5!} = \frac{a_1}{4!} - \frac{a_3}{2!} + a_5, \qquad \text{etc.}$$

Por tanto, $a_1 = 1$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_5 = \frac{2}{15}$, etc., como antes.

Problemas de la sección 14.5

Encontrar la serie de Maclaurin de las siguientes funciones y determinar el radio de convergencia.

1. $\dfrac{1}{1 + z^4}$ 2. $\dfrac{1}{1 - z^5}$ 3. $\dfrac{z + 2}{1 - z^2}$

4. $\dfrac{4 - 3z}{(1 - z)^2}$ 5. $\operatorname{sen} 2z^2$ 6. $\dfrac{1}{(z + 3 - 4i)^2}$

7. $\dfrac{e^{z^4} - 1}{z^3}$ 8. $e^{z^2}\displaystyle\int_0^z e^{-t^2}\,dt$ 9. $\dfrac{2z^2 + 15z + 34}{(z + 4)^2(z - 2)}$

Encontrar la serie de Taylor de la función dada con el punto dado como centro y determinar el radio de convergencia.

10. $\dfrac{1}{z}$, 1 11. $\dfrac{1}{z}$, $1 + i$ 12. $\dfrac{1}{(z + i)^2}$, $-2i$

13. $z^5 + z^3 - z$, i 14. $(z + i)^3$, $1 - i$ 15. $\dfrac{1 + z - \operatorname{sen}(z + 1)}{(z + 1)^3}$, -1

16. e^z, $-\pi i$ 17. $\cosh z$, $\pi i/2$ 18. $\operatorname{sen} \pi z$, $1/2$

Encontrar los tres primeros términos diferentes de cero de la serie de Taylor con el punto dado como centro y determinar el radio de convergencia.

19. $e^{z^2} \operatorname{sen} z^2$, 0 20. $\dfrac{\cos 2z}{1 - 4z^2}$, 0 21. $\tan z$, $\dfrac{\pi}{4}$

22. $e^{z^2}/\cos z$, 0 23. $\cos\left(\dfrac{z}{3 - z}\right)$, 0 24. $\dfrac{4 - 6z}{2z^2 - 3z + 1}$, -1

25. **(Números de Euler)** La serie de Maclaurin

$$\text{(4)} \qquad \sec z = E_0 - \frac{E_2}{2!}z^2 + \frac{E_4}{4!}z^4 - + \cdots$$

define los *números de Euler* E_{2n}. Demostrar que[7] $E_0 = 1$, $E_2 = -1$, $E_4 = 5$, $E_6 = -61$.

26. **(Números de Bernoulli)** La serie de Maclaurin

$$\text{(5)} \qquad \frac{z}{e^z - 1} = 1 + B_1 z + \frac{B_2}{2!}z^2 + \frac{B_3}{3!}z^3 + \cdots$$

define los *números de Bernoulli* B_n. Usando coeficientes indeterminados, demostrar que[7]

$$\text{(6)} \quad B_1 = -\frac{1}{2},\; B_2 = \frac{1}{6},\; B_3 = 0,\; B_4 = -\frac{1}{30},\; B_5 = 0,\; B_6 = \frac{1}{42},\; \cdots.$$

[7] Respecto a tablas, ver la referencia 1, pág. 810, en el apéndice 1

27. Usando (1), (2) de la sección 12.7, y (5), demostrar que

$$\text{(7)} \quad \tan z = \frac{2i}{e^{2iz} - 1} - \frac{4i}{e^{4iz} - 1} - i = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)}{(2n)!} B_{2n} z^{2n-1}.$$

28. Desarrollar $1/\sqrt{1 - 2z}$ e integrar para demostrar que

$$\operatorname{sen}^{-1} z = z + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{z^3}{3} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)\frac{z^5}{5} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)\frac{z^7}{7} + \cdots \qquad (|z| < 1).$$

Demostrar que esta serie representa al valor principal de $\operatorname{sen}^{-1} z$ (definido en el problema 45 de la sección 12.8).

29. A partir de la forma de la función dada, ¿el radio de convergencia en el ejemplo 3 era de esperar?

30. Encontrar una serie de Maclaurin para la cual la función correspondiente tenga más de una singularidad sobre el circulo de convergencia.

14.6 CONVERGENCIA UNIFORME

Se sabe que las series de potencias son *absolutamente convergentes* (sección 14.2, teorema 1), y, como otra propiedad básica, a continuación se demostrará que son *uniformemente convergentes*. Debido a que la convergencia uniforme es de gran importancia general, por ejemplo en relación con la integración término a término de series, se analizará con bastante detalle.

Para definir la convergencia uniforme, se considerará una serie cuyos términos son funciones de $f_0(z), f_1(z), \cdots$:

$$\text{(1)} \qquad \sum_{m=0}^{\infty} f_m(z) = f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \cdots.$$

(Para el especial $f_m(z) = a_m(z - z_0)^m$, se trata de una serie de potencias.) Se supone que esta serie converge para todo z en alguna región G. Su suma se denomina $s(z)$ y su n–ésima suma parcial se denomina $s_n(z)$; así

$$s_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \cdots + f_n(z).$$

Convergencia en G significa lo siguiente. Si se elige un $z = z_1$ en G, entonces, por la definición de convergencia en z_1, para $\epsilon > 0$ dado es posible encontrar un $N_1(\epsilon)$ tal que

$$|s(z_1) - s_n(z_1)| < \epsilon \qquad \text{para todo } n > N_1(\epsilon).$$

Si se elige un $z = z_2$ en G, manteniendo a ϵ como antes, es posible encontrar un $N_2(\epsilon)$ tal que

$$|s(z_2) - s_n(z_2)| < \epsilon \qquad \text{para todo } n > N_2(\epsilon),$$

etcétera. Por tanto, dado un $\epsilon > 0$, a cada z en G corresponde un número $N_z(\epsilon)$. Este número establece cuántos términos son necesarios (qué s_n se requiere) en una z a fin de obtener $|s(z) - s_n(z)|$ más pequeño que ϵ. Mide la rapidez de convergencia.

Un $N_z(\epsilon)$ pequeño significa convergencia rápida; un $N_z(\epsilon)$ grande, convergencia lenta. Luego, si es posible encontrar un $N(\epsilon)$ más grande que *todos* estos $N_z(\epsilon)$, se dice que la convergencia de la serie (1) en G *es uniforme*:

Definición (convergencia uniforme)

Una serie (1) con suma $s(z)$ se denomina **uniformemente convergente** en una región G si para todo $\epsilon > 0$ es posible encontrar un $N = N(\epsilon)$, ***no dependiente de*** z, tal que

$$|s(z) - s_n(z)| < \epsilon \qquad \text{para todo } n > N(\epsilon) \textit{ y para todo } z \textit{ en } G.$$

La uniformidad de la convergencia es entonces una propiedad que siempre se refiere a un *conjunto infinito* en el plano z.

Ejemplo 1 Serie geométrica.

Demostrar que la serie geométrica $1 + z + z^2 + \cdots$ es (a) uniformemente convergente en cualquier disco cerrado $|z| \leqq r < 1$. (b) no uniformemente convergente en todo su disco de convergencia $|z| < 1$.

Solución. (a) Para z en este disco cerrado se tiene $|1 - z| \geqq 1 - r$ (dibújelo). Lo anterior implica que $1/|1 - z| \leqq 1/(1 - r)$ Por tanto (recuerde (3') o (3) en la sección 14.4 con $q = z$)

$$|s(z) - s_n(z)| = \left|\sum_{m=n+1}^{\infty} z^m\right| = \left|\frac{z^{n+1}}{1 - z}\right| \leqq \frac{r^{n+1}}{1 - r}.$$

Como $r < 1$, el miembro derecho puede hacerse tan pequeño como se quiera, eligiendo un n suficientemente grande. y como el miembro derecho no depende de z (en el disco cerrado considerado), entonces lo anterior significa convergencia uniforme

(b) Para un K real dado (sin importar cuán grande sea) y n, siempre es posible encontrar un z en el disco $|z| < 1$ tal que

$$\left|\frac{z^{n+1}}{1 - z}\right| = \frac{|z|^{n+1}}{|1 - z|} > K,$$

simplemente tomando z suficientemente próximo a 1. Por tanto, ningun $N(\epsilon)$ basta para hacer $|s(z) - s_n(z)|$ menor que un $\epsilon > 0$ dado *en todo el disco* Por definición, lo anterior muestra que la convergencia de la serie geométrica en $|z| < 1$ es no uniforme ∎

Este ejemplo sugiere que para una serie de potencias, la uniformidad de convergencia puede cuando mucho ser perturbada cerca del círculo de convergencia. Este hecho es cierto:

Teorema 1 (Convergencia uniforme de series de potencias)

Una serie de potencias

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m(z - z_0)^m \tag{2}$$

con radio de convergencia R diferente de cero es uniformemente convergente en todo disco circular $|z - z_0| \leqq r$ *de radio* $r < R$.

Demostración. Para $|z - z_0| \leqq r$ y enteros positivos n y p cualesquiera se tiene

$$\begin{aligned} &|a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \cdots + a_{n+p}(z - z_0)^{n+p}| \\ &\qquad \leqq |a_{n+1}|r^{n+1} + \cdots + |a_{n+p}|r^{n+p}. \end{aligned} \tag{3}$$

Luego, (2) converge absolutamente si $|z - z_0| = r < R$ (por el teorema 1 en la sección 14.2). Así, por el principio de convergencia de Cauchy (sección 14.1) se concluye que, dado $\epsilon > 0$, es posible encontrar un $N(\epsilon)$ tal que

$$|a_{n+1}|r^{n+1} + \cdots + |a_{n+p}|r^{n+p} < \epsilon \quad \text{para } n > N(\epsilon) \quad \text{y} \quad p = 1, 2, \cdots.$$

A partir de lo anterior y por (3) se obtiene

$$|a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \cdots + a_{n+p}(z - z_0)^{n+p}| < \epsilon$$

para todo z en el disco $|z - z_0| \leqq r$, todo $n > N(\epsilon)$ y todo $p = 1, 2, \cdots$. Como $N(\epsilon)$ es independiente de z, lo anterior muestra convergencia uniforme, y así se ha demostrado el teorema. ∎

El teorema 1 satisface la necesidad e interés inmediatos, que son las series de potencias. El resto de esta sección debe proporcionar un conocimiento más profundo sobre el concepto de convergencia uniforme.

Propiedades de las series uniformemente convergentes (*Opcional*)

La convergencia uniforme obtiene su importancia primordial de dos hechos:

1. Si una serie de términos *continuos* es uniformemente convergente, entonces su suma también es continua (teorema 2, que se enuncia a continuación).

2. Con las mismas hipótesis, la integración término a término es permisible (teorema 3).

Lo anterior plantea tres preguntas:

1. ¿Cómo es posible que una serie convergente de términos continuos tenga una suma discontinua? (Ejemplo 2), y

2. ¿Cómo es posible que haya algo erróneo en la integración término a término? (Ejemplo 3).

3. ¿Cuál es la relación entre convergencia absoluta y convergencia uniforme? La respuesta sorprendente: Ninguna. (Ejemplo 4).

Si se suma una *cantidad finita* de funciones continuas, se obtiene una función continua. El ejemplo 2 demostrará que este hecho deja de ser verdadero para una serie infinita, inclusive si converge absolutamente. Sin embargo, si converge *uniformemente*, lo anterior no puede suceder, como se muestra en seguida.

Teorema 2 (Continuidad de la suma)

Sea la serie

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_m(z) = f_0(z) + f_1(z) + \cdots$$

uniformemente convergente en una región G. Sea F(z) su suma. Entonces si cada término $f_m(z)$ es continuo en un punto z_1 en G, la función F(z) es continua en z_1.

Demostración. Sea $s_n(z)$ la n-ésima suma parcial de la serie y sea $R_n(z)$ el residuo correspondiente:

$$s_n = f_0 + f_1 + \cdots + f_n, \qquad R_n = f_{n+1} + f_{n+2} + \cdots.$$

Como la serie converge uniformemente, entonces para un $\epsilon > 0$ dado es posible encontrar un $n = N(\epsilon)$ tal que

$$|R_N(z)| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{para todo } z \text{ en } G.$$

Como $s_N(z)$ es una suma de un número finito de funciones que son continuas en z_1, esta suma es continua en z_1. Por consiguiente, es posible encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$|s_N(z) - s_N(z_1)| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{para todo } z \text{ en } G \text{ para el cual } |z - z_1| < \delta.$$

Usando $F = s_N + R_N$ y la desigualdad del triángulo (sección 12.2), entonces para estos z se obtiene

$$|F(z) - F(z_1)| = |s_N(z) + R_N(z) - [s_N(z_1) + R_N(z_1)]|$$

$$\leqq |s_N(z) - s_N(z_1)| + |R_N(z)| + |R_N(z_1)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Lo anterior implica que $F(z)$ es continua en z_1, y se ha demostrado el teorema. ∎

Ejemplo 2 Series de términos continuos con una suma discontinua.

Considerar la serie

$$x^2 + \frac{x^2}{1 + x^2} + \frac{x^2}{(1 + x^2)^2} + \frac{x^2}{(1 + x^2)^3} + \cdots \qquad (x \text{ real}).$$

Usando la fórmula (3') de la sección 14.4 para una suma geométrica finita con $q = 1/(1 + x^2)$, así $1/(1 - q) = (1 + x^2)/x^2$, para la n-ésima suma parcial, se obtiene que

$$s_n(z) = 1 + x^2 - \frac{1}{(1 + x^2)^n}.$$

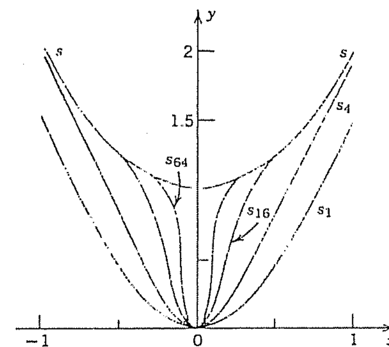


Figura 340. Sumas parciales en el ejemplo 2.

La interesante figura 340 "explica" qué sucede. Se observa que si $x \neq 0$, entonces la suma es

$$s(x) = \lim s_n(x) = 1 + x^2,$$

pero para $x = 0$ se tiene

$$s_n(0) = 1 - 1 = 0 \quad \text{para todo } n.$$

y así

$$s(0) = 0.$$

De modo que se tiene el sorprendente hecho de que la suma es discontinua (en $x = 0$), aunque todos los términos son continuos y la serie converge inclusive absolutamente (¡sus términos son no negativos, por lo que son iguales a su valor absoluto!).

Así, el teorema 2 establece que la convergencia no puede ser uniforme en un intervalo que contiene a $x = 0$. Este hecho también puede comprobarse directamente. De hecho, para $x \neq 0$, el valor absoluto del residuo es

$$|R_n(x)| = |s(x) - s_n(x)| = \frac{1}{(1 + x^2)^n}$$

y se observa que para un $\epsilon (< 1)$ dado no es posible encontrar un N dependiente sólo de ϵ tal que $|R_n| < \epsilon$ para todo $n > N(\epsilon)$ y todo x, por ejemplo, en el intervalo $0 \leqq x \leqq 1$. ∎

Integración término a término (*Opcional*)

Este es el segundo tema en relación con la convergencia uniforme, y se empezará con un ejemplo que servirá de advertencia.

Ejemplo 3 Una serie para la que no es permisible la integración término a término.

Sea

$$u_m(x) = mxe^{-mx^2}$$

y se considera la serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_m(x) \qquad \text{en donde} \qquad f_m(x) = u_m(x) - u_{m-1}(x)$$

en el intervalo $0 \leqq x \leqq 1$. La n-ésima suma parcial es

$$s_n = u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + \cdots + u_n - u_{n-1} = u_n - u_0 = u_n.$$

Por tanto, la suma de la serie es

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = 0 \qquad (0 \leqq x \leqq 1).$$

Con base en lo anterior se obtiene

$$\int_0^1 F(x)\,dx = 0.$$

Por otra parte, al integrar término a término y usando $f_1 + f_2 + \cdots + f_n = s_n$,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 f_m(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \int_0^1 f_m(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 s_n(x)\,dx.$$

Luego, $s_n = u_n$ y la expresión del miembro derecho se vuelve

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 u_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 nxe^{-nx^2}\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(1 - e^{-n}) = \frac{1}{2},$$

pero no 0. Esto muestra que la serie en consideración no puede integrarse término a término desde $x = 0$ hasta $x = 1$. ∎

La serie del ejemplo 3 no es uniformemente convergente en el intervalo de integración, y a continuación se demostrará que en el caso de una serie uniformemente convergente de funciones continuas es posible integrar término a término.

Teorema 3 (Integración término a término)

Sea

$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(z) = f_0(z) + f_1(z) + \cdots$$

una serie uniformemente convergente de funciones continuas en una región G. Sea C cualquier trayectoria en G. Entonces la serie

$$(4) \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \int_C f_m(z)\,dz = \int_C f_0(z)\,dz + \int_C f_1(z)\,dz + \cdots$$

es convergente y su suma es $\int_C F(z)\,dz$.

Demostración. Por el teorema 2 se concluye que $F(z)$ es continua. Sean $s_n(z)$ la n-ésima suma parcial de la serie dada y $R_n(z)$ el residuo correspondiente. Entonces $F = s_n + R_n$ y por integración,

$$\int_C F(z)\,dz = \int_C s_n(z)\,dz + \int_C R_n(z)\,dz.$$

Sea L la longitud de C. Como la serie dada converge uniformemente, entonces para todo $\epsilon > 0$ dado es posible encontrar un número N tal que

$$|R_n(z)| < \frac{\epsilon}{L} \qquad \text{para todo } n > N \text{ y todo } z \text{ en } G.$$

Al aplicar la desigualdad ML (sección 13.2), entonces se obtiene

$$\left|\int_C R_n(z)\,dz\right| < \frac{\epsilon}{L} L = \epsilon \qquad \text{para todo } n > N.$$

Como $R_n = F - s_n$, esto significa que

$$\left|\int_C F(z)\,dz - \int_C s_n(z)\,dz\right| < \epsilon \qquad \text{para todo } n > N.$$

Entonces, la serie (4) converge y su suma es la indicada en el teorema. Así se completa la demostración. ∎

Los teoremas 2 y 3 caracterizan las dos propiedades más importantes de las series uniformemente convergentes.

Por supuesto, dado que la diferenciación y la integración son procesos inversos, entonces a partir del teorema 3 se concluye fácilmente que una serie convergente puede diferenciarse término a término, en el supuesto de que los términos de la serie dada tengan derivadas continuas y la serie resultante sea uniformemente convergente; más precisamente,

Teorema 4 (Diferenciación término a término)

Sea la serie $f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \cdots$ convergente en una región G, y sea F(z) su suma. Suponer que la serie $f_0'(z) + f_1'(z) + f_2'(z) + \cdots$ converge uniformemente en G y que sus términos son continuos en G. Entonces

$$F'(z) = f_0'(z) + f_1'(z) + f_2'(z) + \cdots \qquad \textit{para todo } z \textit{ en } G.$$

La sencilla demostración se deja para el estudiante (problema 18).

Prueba para convergencia uniforme (*Opcional*)

La convergencia uniforme suele demostrarse aplicando la siguiente prueba de comparación.

Teorema 5 (Prueba *M* de Weierstrass[8] para convergencia uniforme)

Considerar una serie de la forma (1) en una región G del plano z. Suponer que es posible encontrar una serie convergente de términos constantes,

$$(5) \qquad M_0 + M_1 + M_2 + \cdots,$$

tal que $|f_m(z)| \leqq M_m$ *para todo z en G y todo* $m = 0, 1, \cdots$. *Entonces (1) es uniformemente convergente en G.*

La sencilla demostración se deja para el estudiante (problema 17).

Ejemplo 4 Prueba *M* de Weierstrass.

¿La siguiente serie converge uniformemente en el disco $|z| \leqq 1$?

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m + 1}{m^2 + \cosh m|z|}.$$

Solución. La convergencia uniforme se concluye inmediatamente por la prueba *M* de Weierstrass y por la convergencia de $\Sigma 1/m^2$ (ver la sección 14.1, en la demostración del teorema 8) porque

$$\left|\frac{z^m + 1}{m^2 + \cosh m|z|}\right| \leqq \frac{|z|^m + 1}{m^2} \leqq \frac{2}{m^2}.$$

Inexistencia de relación entre convergencia absoluta y convergencia uniforme (*Opcional*)

Por último, se demostrará el sorprendente hecho de que existen series que convergen absolutamente aunque no uniformemente, y otras que convergen uniformemente aunque no absolutamente, de modo que no existe ninguna relación entre estos dos conceptos.

Ejemplo 5 Inexistencia de relación entre convergencia absoluta y convergencia uniforme.

La serie del ejemplo 2 converge absolutamente pero no uniformemente, como ya se demostró. Por otra parte, la serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{x^2 + m} = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 2} + \frac{1}{x^2 + 3} - + \cdots \qquad (x \text{ real})$$

converge uniformemente sobre toda la recta real, pero no absolutamente.

[8] KARL WEIERSTRASS (1815-1897), gran matemático alemán cuya obra fue el desarrollo del análisis complejo basado en el concepto de series de potencias (ver la nota de pie de página de la sección 12.5). También efectuó contribuciones fundamentales al cálculo, al cálculo de variaciones, a la teoría de la aproximación y a la geometría diferencial. Obtuvo el concepto de convergencia uniforme en 1841 (publicado en 1894); las primeras publicaciones sobre este concepto fueron hechas por G. G. STOKES (ver la sección 9.9) en 1847 y por PHILIPP LUDWIG VON SEIDEL (1821-1896), en 1848.

Demostración. Con base en la conocida prueba de Leibnitz de cálculo (ver el apéndice A3.3), el residuo R_n no excede en valor absoluto a su primer término, ya que se tiene una serie de términos alternos cuyos valores absolutos constituyen una sucesión monótona decreciente con límite cero. Por tanto, dado $\epsilon > 0$, para toda x se tiene que

$$|R_n(x)| \leqq \frac{1}{x^2 + n + 1} < \frac{1}{n} < \epsilon \qquad \text{si } n > N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}.$$

Así se demuestra la convergencia uniforme, ya que $N(\epsilon)$ no depende de x.

La convergencia no es absoluta porque

$$\left|\frac{(-1)^{m-1}}{x^2 + m}\right| = \frac{1}{x^2 + m} > \frac{k}{m}$$

(k es una constante idónea) y $k\,\Sigma 1/m$ diverge. ∎

Problemas de la sección 14.6

Demostrar que las siguientes series convergen uniformemente en las regiones dadas.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$, $|z| \leqq 0.999$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $|z| \leqq 10^{10}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{n^4} z^{2n}$, $|z| \leqq 0.56$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$, $|z| \leqq 1$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n|z|}{n^2}$, todo z
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^n |\pi z|}{n(n+1)}$, todo z.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^n}{n^3 + |z|}$, $|z| \leqq 1$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2 \cosh n|z|}$, $|z| \leqq 1$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh^n |z|}{n(n+1)}$, todo z
10. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{|z|^{2n} + 2}$, $2 \leqq |z| \leqq 3$

¿En dónde convergen uniformemente las siguientes series de potencias?

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + 2i)^{2n}}{3^n}$
12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - 1 + i)^n}{n!}$

¿En dónde convergen uniformemente las siguientes series de potencias?

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n n} z^n$
14. $\sum_{n=2}^{\infty} \binom{n}{2} (2z + i)^n$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2} (z - i)^n$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} (2^n \tanh n) z^{2n}$
17. Demostrar la prueba *M* de Weierstrass (teorema 5).
18. Deducir el teorema 4 a partir del teorema 3.
19. Si la serie (1) converge uniformemente en una región G, demostrar que converge uniformemente en cualquier porción de G. ¿La conversa es verdadera?
20. Encontrar la región precisa de convergencia de la serie del ejemplo 2, con x sustituida por una variable compleja z.

21. Determinar el menor entero n tal que $|R_n| < 0.01$ en el ejemplo 1, si $z = x = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$. ¿Qué significa el resultado desde el punto de vista de calcular $1/(1-x)$ con un error absoluto menor que 0.01 mediante la serie geométrica?
22. Demostrar que $x^2 \sum_{m=1}^{\infty} (1-x^2)^m = 1$ si $x \neq 0$ y 0 si $x = 0$. Comprobar por cálculo que las sumas parciales s_1, s_2, s_3 se ven como se muestra en la figura 341 y calcular y graficar s_4, s_5, s_6.

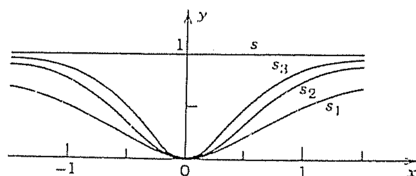


Figura 341. Suma s y sumas parciales en el problema 22.

Ecuación del calor. Demostrar que (10), sección 11.5, con coeficientes (11) es una solución de la ecuación del calor para $t > 0$, suponiendo que $f(x)$ es continua en el intervalo $0 \leq x \leq L$ y que tiene derivadas unilaterales en todos los puntos interiores de tal intervalo. Proceder como sigue.

23. Demostrar que $|B_n|$ está acotado, por ejemplo, $|B_n| < K$ para toda n. Concluir que

$$|u_n| < Ke^{-\lambda_n^2 t_0} \quad \text{si} \quad t \geqq t_0 > 0$$

y, por la prueba de Weierstrass, la serie (10) converge uniformemente con respecto a x y t para $t \geqq t_0$, $0 \leqq x \leqq L$. Aplicando el teorema 2, demostrar que $u(x, t)$ es continua para $t \geqq t_0$ y que entonces satisface las condiciones en la frontera (2) para $t \geqq t_0$.

24. Demostrar que $|\partial u_n/\partial t| < \lambda_n^2 K e^{-\lambda_n^2 t_0}$ si $t \geqq t_0$ y que la serie de las expresiones del miembro derecho converge, aplicando la prueba de la razón. Con base en lo anterior, en la prueba de Weierstrass y en el teorema 4, concluir que la serie (10) puede diferenciarse término a término con respecto a t, y que la suma de la serie resultante es $\partial u/\partial t$. Demostrar que (10) puede diferenciarse dos veces con respecto a x y que la suma de la serie resultante es $\partial^2 u/\partial x^2$. Con base en lo anterior y en el resultado del problema 23, concluir que (10) es una solución de la ecuación del calor para todo $t \geqq t_0$. (La demostración de que (10) satisface la condición inicial dada puede encontrarse en la referencia [C12] que se presenta en el apéndice 1.)

14.7 SERIES DE LAURENT

En aplicaciones, a menudo es necesario desarrollar una función $f(z)$ alrededor de puntos en los cuales ya no es analítica, sino singular (según se definió en la sección 14.4). Así, el teorema de Taylor deja de ser aplicable, por lo que se requiere un nuevo tipo de series, denominadas *series de Laurent*, que constan de potencias enteras positivas *y negativas* de $z - z_0$ y que son convergentes en alguna corona (acotada por dos círculos con centro en z_0) en donde $f(z)$ es analítica. $f(z)$ puede tener puntos singulares no sólo fuera del círculo más grande (como en las series de Taylor), sino también dentro del círculo más pequeño, lo cual es una nueva característica.

Teorema 1 Teorema de Laurent

Si $f(z)$ es analítica sobre dos círculos concéntricos[9] *C_1 y C_2 con centro en z_0 y en la corona entre éstos, entonces $f(z)$ puede representarse mediante la **serie de Laurent***

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

$$= a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots \tag{1}$$

$$\cdots + \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \cdots .$$

Los coeficientes de esta serie de Laurent están definidos por las integrales[10]

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^*-z_0)^{n+1}}\, dz^*, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C (z^* - z_0)^{n-1} f(z^*)\, dz^*, \tag{2}$$

cada integral se toma en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de cualquier trayectoria simple cerrada C que esté en la corona y abarque el círculo interior (figura 342).

Esta serie converge y representa a $f(z)$ en la corona abierta que se obtiene a partir de la corona dada al incrementar de manera continua el círculo C_1 y reducir C_2 hasta que ambos círculos llegan a un punto en donde $f(z)$ es singular.

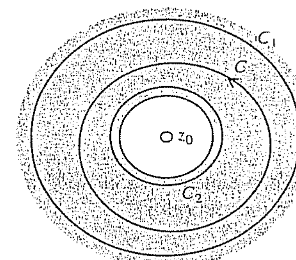


Figura 342. Teorema de Laurent.

[9] Recuerde que por la definición de analiticidad, esto significa que $f(z)$ es analítica en algún dominio que contiene a la corona, así como a sus círculos frontera.
El teorema se denomina así en honor del ingeniero y matemático francés PIERRE ALPHONSE LAURENT (1813-1854), quien lo publicó en 1843.

[10] La variable de integración se denota por z^* porque z se utiliza en $f(z)$.

En el importante caso especial en que z_0 es el único punto singular de $f(z)$ dentro de C_2, este círculo puede reducirse hasta el punto z_0, con lo que se obtiene convergencia en un disco, excepto en el centro.

Comentario. Resulta evidente que en vez de (1) y (2) es posible escribir (denotando a b_n por a_{-n})

(1′)
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

en donde

(2′)
$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}}\,dz^*.$$

Demostración del teorema de Laurent. Sea z cualquier punto en la corona dada. Entonces por la fórmula de la integral de Cauchy [(3) en la sección 13.5], se concluye que

(3)
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(z^*)}{z^* - z}\,dz^* - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(z^*)}{z^* - z}\,dz^*,$$

en donde se integra en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj sobre C_1 y también sobre C_2. Cada una de las integrales anteriores se trasforma como se hizo en la sección 14.4. La primera integral es *precisamente* como en la sección 14.4, por lo que se obtiene exactamente el mismo resultado

(4)
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(z^*)}{z^* - z}\,dz^* = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

con coeficientes [ver (9*) en la sección 14.4, integración en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj]

(5)
$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}}\,dz^*.$$

Aquí es posible sustituir C_1 por C (ver la figura 342), debido al principio de deformación de la trayectoria, ya que z_0, el punto en donde el integrando de (5) no es analítico, no es un punto de la corona. Lo anterior demuestra la fórmula para la a_n en (2).

Ahora se considerará la segunda integral en (3) y a partir de ella se obtendrá una fórmula para la b_n. Como z pertenece a la corona, entonces está *fuera* de la trayectoria

C_2. Por tanto, la situación difiere de la que se encontró con la primera integral. La cuestión esencial es que en vez de (2*) en la sección 14.4 ahora se tiene

(6)
$$\left|\frac{z^* - z_0}{z - z_0}\right| < 1;$$

por consiguiente, es necesario desarrollar $1/(z^* - z)$ en el integrando en potencias de $(z^* - z_0)/(z - z_0)$ [en vez del recíproco de esto] a fin de obtener una serie *convergente*. Se encuentra

$$\frac{1}{z^* - z} = \frac{1}{z^* - z_0 - (z - z_0)} = \frac{-1}{(z - z_0)\left(1 - \dfrac{z^* - z_0}{z - z_0}\right)}.$$

Esta expresión se compara con (2) en la sección 14.4 para comprender realmente la diferencia. Luego, se aplica la fórmula (3), sección 14.4, para una suma geométrica finita, a fin de obtener

$$\frac{1}{z^* - z} = -\frac{1}{z - z_0}\left\{1 + \frac{z^* - z_0}{z - z_0} + \left(\frac{z^* - z_0}{z - z_0}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z^* - z_0}{z - z_0}\right)^n\right\}$$
$$- \frac{1}{z - z^*}\left(\frac{z^* - z_0}{z - z_0}\right)^{n+1}.$$

Al multiplicar por $-f(z^*)/2\pi i$ e integrar sobre C_2 en ambos miembros, ahora se obtiene

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(z^*)}{z^* - z}\,dz^*$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\left\{\frac{1}{z - z_0}\oint_{C_2} f(z^*)\,dz^* + \frac{1}{(z - z_0)^2}\oint_{C_2} (z^* - z_0)f(z^*)\,dz^*\right.$$
$$\left. + \cdots + \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}}\oint_{C_2} (z^* - z_0)^n f(z^*)\,dz^*\right\} + R_n^*(z)$$

en donde el último término del miembro derecho está dado por

(7)
$$R_n^*(z) = \frac{1}{2\pi i(z - z_0)^{n+1}}\oint_{C_2} \frac{(z^* - z_0)^{n+1}}{z - z^*} f(z^*)\,dz^*.$$

Como antes, en las integrales del miembro derecho es posible integrar sobre C en vez de sobre C_2. Se observa que en el miembro derecho la potencia $1/(z - z_0)^n$ está multiplicada por b_n, según está dado en (2). Así se establece el teorema de Laurent, en el supuesto de que

(8)
$$\lim_{n\to\infty} R_n^*(z) = 0.$$

A continuación se demostrará (8). La expresión $f(z^*)/(z - z^*)$ en (7) está acotada en valor absoluto, por ejemplo, como

$$\left|\frac{f(z^*)}{z - z^*}\right| < \tilde{M} \qquad \text{para todo } z^* \text{ en } C_2$$

debido a que $f(z^*)$ es analítica en la corona y sobre C_2, y z^* está sobre C_2 y z está fuera, de modo que $z - z^* \neq 0$. Con base en este hecho y por la desigualdad ML (sección 13.2) aplicada a (7) se obtiene (L = longitud de C_2) que

$$|R_n^*(z)| \leqq \frac{1}{2\pi|z - z_0|^{n+1}}|z^* - z_0|^{n+1}\tilde{M}L = \frac{\tilde{M}L}{2\pi}\left|\frac{z^* - z_0}{z - z_0}\right|^{n+1}.$$

Con base en (6) se observa que la expresión de la derecha tiende a cero cuando n tiende a infinito. Esto demuestra (8). La representación (1) con coeficientes (2) se establece ahora en la corona dada.

Por último, se demostrará la convergencia en (1) en la corona abierta caracterizada al final del teorema.

Las sumas de las dos series en (1) se denotan por $g(z)$ y $h(z)$, y los radios de C_1 y C_2 por r_1 y r_2, respectivamente. Así, $f = g + h$. La primera serie es una serie de potencias. Como converge en la corona, debe converger en todo el disco acotado por C_1, y g es analítica en ese disco.

Si se hace $Z = 1/(z - z_0)$, entonces la última serie se vuelve una serie de potencias en Z. La corona $r_2 < |z - z_0| < r_1$ corresponde entonces a la corona $1/r_1 < |Z| < 1/r_2$, la nueva serie converge en esta corona y, por consiguiente, en todo el disco $|Z| < 1/r_2$. Como este disco corresponde a $|z - z_0| > r_2$, el exterior de C_2, entonces la serie dada converge para todo z en el exterior de C_2 y h es analítica para todos estos z.

Como $f = g + h$, se concluye que g debe ser singular en todos estos puntos fuera de C_1 en donde f es singular, y que h debe ser singular en todos estos puntos dentro de C_2 en donde f es singular. En consecuencia, la primera serie converge para toda z dentro del círculo alrededor de z_0 cuyo radio es igual a la distancia de tal singularidad de f fuera de C_1 que está más próxima a z_0. De manera semejante, la segunda serie converge para todo z fuera del círculo alrededor de z_0 cuyo radio es igual a la distancia máxima de las singularidades de f dentro de C_2. El dominio común a estos dos dominios de convergencia es la corona abierta caracterizada cerca del final del teorema, y la demostración del teorema de Laurent ya está completa. ∎

Unicidad. *La serie de Laurent de una función analítica dada $f(z)$ en su corona de convergencia es única* (ver el problema 35). *Sin embargo, $f(z)$ puede tener diferentes series de Laurent en dos coronas con el mismo centro*; ver los ejemplos que se muestran a continuación. La unicidad es esencial. Así como para las series de Taylor, para obtener los coeficientes de las series de Laurent en términos generales no se utilizan las fórmulas de integración (2), sino varios otros métodos, algunos de los cuales se ilustrarán con ejemplos. Si mediante un procedimiento así se encuentra una serie de Laurent, entonces la unicidad garantiza que debe ser *la* serie de Laurent de la función dada en la corona dada.

Ejemplo 1 Uso de la serie de Maclaurin.

Encontrar la serie de Laurent de z^{-5} sen z con centro en 0.

Solución. Por (14), sección 14.4, se obtiene

$$z^{-5}\,\text{sen}\, z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n-4} = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{6z^2} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040}z^2 + - \cdots \qquad (|z| > 0).$$

Aquí la "corona" de convergencia es todo el plano complejo sin el origen. ∎

Ejemplo 2 Sustitución.

Encontrar la serie de Laurent de $z^2e^{1/z}$ con centro en 0.

Solución. Por (12), sección 14.4, con z sustituido por $1/z$, se obtiene

$$z^2e^{1/z} = z^2\left(1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots\right) = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!z} + \frac{1}{4!z^2} + \cdots \qquad (|z| > 0).$$ ∎

Ejemplo 3 Desarrollar $1/(1 - z)$ (a) en potencias no negativas de z. (b) en potencias negativas de z.

Solución.

(a) $$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad \text{válido si } |z| < 1).$$

(b) $$\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z(1 - z^{-1})} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \cdots \qquad \text{válido si } |z| > 1).$$ ∎

Ejemplo 4 Desarrollos de Laurent en coronas concéntricas diferentes.

Encontrar todas las series de Laurent de $1/(z^3 - z^4)$ con centro en 0.

Solución. Al multiplicar por $1/z^3$, por el ejemplo 3 se obtiene que

(I) $$\frac{1}{z^3 - z^4} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-3} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + \cdots \qquad (0 < |z| < 1),$$

(II) $$\frac{1}{z^3 - z^4} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+4}} = -\frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5} - \cdots \qquad (|z| > 1).$$ ∎

Ejemplo 5 Uso de fracciones parciales.

Encontrar todas las series de Taylor y de Laurent de $f(z) = \dfrac{-2z + 3}{z^2 - 3z + 2}$ con centro en 0.

Solución. En términos de fracciones parciales,

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}.$$

(a) y (b) en el ejemplo 3 se encargan de la primera fracción. Para la segunda fracción,

(c) $$-\frac{1}{z-2} = \frac{1}{2\left(1 - \frac{1}{2}z\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n \qquad (|z| < 2),$$

(d) $$-\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{z\left(1 - \frac{2}{z}\right)} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} \qquad (|z| > 2).$$

(I) Por (a) y (c), válida para $|z| < 1$ (ver la figura 343)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n = \frac{3}{2}+\frac{5}{4}z+\frac{9}{8}z^2+\cdots.$$

(II) Por (c) y (b), válida para $1 < |z| < 2$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}z+\frac{1}{8}z^2+\cdots-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\cdots.$$

(III) Por (d) y (b), válida para $|z| > 2$,

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+1)\frac{1}{z^{n+1}} = -\frac{2}{z}-\frac{3}{z^2}-\frac{5}{z^3}-\frac{9}{z^4}-\cdots.$$

Ejemplo 6 Encontrar la serie de Laurent de $f(z) = 1/(1-z^2)$ que converge en la corona $1/4 < |z-1| < 1/2$, y determinar la región precisa de convergencia.

Solución. La corona tiene centro 1, de modo que es necesario desarrollar

$$f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z+1)}$$

en potencias de $z-1$. Se calcula

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2+(z-1)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\left[1-\left(-\dfrac{z-1}{2}\right)\right]}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n;$$

esta serie converge en el disco $|(z-1)/2| < 1$; es decir, $|z-1| < 2$. Al multiplicar por $-1/(z-1)$ se obtiene ahora la serie buscada

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-1)^{n-1} = \frac{-1/2}{z-1}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}(z-1)+\frac{1}{16}(z-1)^2-+\cdots.$$

La región precisa de convergencia es $0 < |z-1| < 2$; ver la figura 344. Lo anterior se confirma al observar que $1/(z+1)$ en $f(z)$ es singular en -1, a la distancia de 2 del centro de la serie. ∎

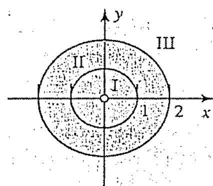


Figura 343. Regiones de convergencia en el ejemplo 5.

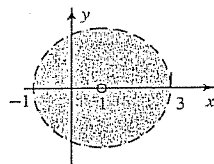


Figura 344. Región de convergencia en el ejemplo 6.

Si $f(z)$ en el teorema de Laurent es analítica dentro de C_2, entonces los coeficientes b_n en (2) son cero por el teorema de la integral de Cauchy, de modo que la serie de Laurent se reduce a una serie de Taylor. Los ejemplos 3(a) y 5(I) ilustran este hecho.

Problemas de la sección 14.7

Desarrollar cada una de las siguientes funciones en una serie de Laurent que converja para $0 < |z| < R$ y determinar la región de convergencia precisa.

1. $\dfrac{e^z}{z^2}$
2. $\dfrac{\operatorname{sen} 4z}{z^4}$
3. $\dfrac{\cosh 2z}{z}$
4. $\dfrac{1}{z^3(1-z)}$
5. $\dfrac{1}{z(1+z^2)}$
6. $\dfrac{8-2z}{4z-z^3}$
7. $z\cos\dfrac{1}{z}$
8. $\dfrac{e^{-1/z^2}}{z^5}$
9. $\dfrac{1}{z^6(1+z)^2}$

Desarrollar cada una de las siguientes funciones en una serie de Laurent que converja para $0 < |z-z_0| < R$ y determinar la región de convergencia precisa.

10. $\dfrac{e^z}{z-1}$, $z_0 = 1$
11. $\dfrac{1}{z^2+1}$, $z_0 = i$
12. $z^2 \operatorname{senh}\dfrac{1}{z}$, $z_0 = 0$
13. $\dfrac{\cos z}{(z-\pi)^3}$, $z_0 = \pi$
14. $\dfrac{z^4}{(z+2i)^2}$, $z_0 = -2i$
15. $\dfrac{z^2-4}{z-1}$, $z_0 = 1$
16. $\dfrac{\operatorname{sen} z}{(z-\frac{1}{4}\pi)^3}$, $z_0 = \dfrac{\pi}{4}$
17. $\dfrac{1}{(z+i)^2-(z+i)}$, $z_0 = -i$
18. $\dfrac{1}{1-z^4}$, $z_0 = -1$

Encontrar la serie de Taylor o la serie de Laurent de $1/(1-z^2)$ en la región

19. $0 \leqq |z| < 1$
20. $|z| > 1$
21. $0 < |z-1| < 2$

Usar fracciones parciales para encontrar la serie de Laurent de $(3z^2-6z+2)/(z^3-3z^2+2z)$ en la región

22. $0 < |z| < 1$
23. $1 < |z| < 2$
24. $|z| > 2$

Encontrar todas las series de Taylor o las series de Laurent con centro $z = z_0$ y determinar la región de convergencia precisa.

25. $\dfrac{1}{1-z^3}$, $z_0 = 0$
26. $\dfrac{2}{1-z^2}$, $z_0 = 1$
27. $\dfrac{z^2}{1-z^4}$, $z_0 = 0$
28. $\dfrac{1}{z^2}$, $z_0 = i$
29. $\dfrac{1}{z}$, $z_0 = 1$
30. $\dfrac{\operatorname{senh} z}{(z-1)^2}$, $z_0 = 1$
31. $\dfrac{\operatorname{sen} z}{z+\frac{1}{2}\pi}$, $z_0 = -\dfrac{1}{2}\pi$
32. $\dfrac{z^3-2iz^2}{(z-i)^2}$, $z_0 = i$
33. $\dfrac{4z-1}{z^4-1}$, $z_0 = 0$
34. ¿$\tan(1/z)$ tiene una serie de Laurent convergente en una región $0 < |z| < R$?
35. Demostrar que el desarrollo de Laurent de una función analítica dada en una corona dada es único.

14.8 SINGULARIDADES Y CEROS. INFINITO

En términos generales, una *singularidad* de una función analítica $f(z)$ es un z en donde $f(z)$ deja de ser analítica, y un *cero* es un z en donde $f(z) = 0$. A continuación se proporcionan definiciones precisas. Las singularidades pueden analizarse y clasificarse por medio de las series de Laurent. Esto es lo que se hará en primer lugar. Luego se demostrará que los ceros pueden analizarse por medio de las series de Taylor.

Se dice que una función[11] $f(z)$ es **singular** o **tiene una singularidad** en un punto $z = z_0$ si $f(z)$ no es analítica (y quizá ni siquiera esté definida) en $z = z_0$, aunque toda vecindad de $z = z_0$ contiene puntos en los cuales $f(z)$ es analítica.

$z = z_0$ se denomina **singularidad aislada** de $f(z)$ si $z = z_0$ tiene una vecindad sin ninguna otra singularidad de $f(z)$. *Ejemplo*: tan z tiene singularidades aisladas en $\pm\pi/2$, $\pm 3\pi/2$, etc.; tan $(1/z)$ tiene una singularidad no aislada en 0. (¡Explicar por qué!). Las singularidades aisladas de $f(z)$ en $z = z_0$ pueden clasificarse mediante la serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \qquad \text{(Sec. 14.7)} \tag{1}$$

válida *en la vecindad inmediata* del punto singular $z = z_0$, excepto en z_0 mismo; es decir, en una región de la forma

$$0 < |z - z_0| < R.$$

La suma de la primera serie es analítica en $z = z_0$, como se sabe por la última sección. La segunda serie, que contiene las potencias negativas, se denomina **parte principal** de (1). Si sólo contiene un número finito de términos, entonces es de la forma

$$\frac{b_1}{z - z_0} + \cdots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m} \qquad (b_m \neq 0). \tag{2}$$

Entonces, la singularidad de $f(z)$ en $z = z_0$ se denomina **polo**, y m se denomina su **orden**. Los polos de primer orden también se denominan *polos simples*.

Si la parte principal de (1) tiene una infinidad de términos, entonces se dice que $f(z)$ tiene una **singularidad esencial aislada** en $z = z_0$.

Las singularidades no aisladas se dejarán a un lado (ver el ejemplo anterior).

Ejemplo 1 Polos. Singularidades esenciales.

La función

$$f(z) = \frac{1}{z(z - 2)^5} + \frac{3}{(z - 2)^2}$$

[11] Recuerde que, por definición, una función es una relación *de un solo valor* (*uniforme*, también *univaluada*). (Ver la sección 12.4.)

tiene un polo simple en $z = 0$ y un polo de quinto orden en $z = 2$. Algunos ejemplos de funciones que tienen una singularidad esencial aislada en $z = 0$ son

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\, z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\, z^2} + \cdots$$

y

$$\operatorname{sen} \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\, z^{2n+1}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!\, z^3} + \frac{1}{5!\, z^5} - + \cdots.$$

En la sección 14.7. se proporcionan más ejemplos. Así, el ejemplo 1 muestra que z^{-5} sen z tiene un polo de cuarto orden en 0. El ejemplo 4 muestra que $1/(z^3 - z^4)$ tiene un polo de tercer orden en 0 y una serie de Laurent con una infinidad de potencias negativas. Lo anterior no es una contradicción, ya que esta serie es válida para $|z| > 1$; simplemente establece que es bastante importante considerar la serie de Laurent válida *en la vecindad inmediata* de una singularidad. ∎

La clasificación de las singularidades en polos y singularidades esenciales no es una mera cuestión formal, ya que el comportamiento de una función analítica en una vecindad de una singularidad esencial es completamente diferente del que tiene en la vecindad de un polo.

Ejemplo 2 Comportamiento cerca de un polo.

La función $f(z) = 1/z^2$ tiene un polo en $z = 0$, y $|f(z)| \to \infty$ cuando $z \to 0$ de cualquier manera. ∎

Este ejemplo ilustra el

Teorema 1 (Polos)

Si $f(z)$ es analítica y tiene un polo en $z = z_0$, entonces $|f(z)| \to \infty$ cuando $z \to z_0$ de cualquier manera. (Ver el problema 16.)

Ejemplo 3 Comportamiento cerca de una singularidad esencial.

La función $f(z) = e^{1/z}$ tiene una singularidad esencial en $z = 0$. No tiene límite cuando tiende a lo largo del eje imaginario; se vuelve infinito si $z \to 0$ a lo largo de valores reales positivos, pero tiende a cero si $z \to 0$ a lo largo de valores reales negativos. Asume cualquier valor dado $c = c_0 e^{i\alpha} \neq 0$ en una vecindad arbitrariamente pequeña de $z = 0$. De hecho, al dejar $z = re^{i\theta}$, es necesario resolver la ecuación

$$e^{1/z} = e^{(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)/r} = c_0 e^{i\alpha}$$

para r y θ. Al igualar los valores absolutos y los argumentos se obtiene $e^{(\cos\theta)/r} = c_0$; es decir,

$$\cos\theta = r \ln c_0,$$

y

$$\operatorname{sen}\theta = -\alpha r.$$

Con base en estas dos ecuaciones y la identidad $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$ se obtienen las fórmulas

$$r^2 = \frac{1}{(\ln c_0)^2 + \alpha^2}$$

y

$$\tan \theta = -\frac{\alpha}{\ln c_0}.$$

Por tanto, r puede hacerse arbitrariamente pequeño sumando múltiplos de 2π a α, dejando sin modificar a c. ∎

Este ejemplo ilustra el siguiente famoso teorema.

Teorema 2 (Teorema de Picard[12])

Si $f(z)$ es analítica y tiene una singularidad esencial aislada en un punto z_0, entonces asume todos los valores, con cuando mucho un valor excepcional, en una vecindad arbitrariamente pequeña de z_0.

En el ejemplo 3, el valor excepcional es $z = 0$. La demostración del teorema de Picard es algo complicada; puede encontrarse en la referencia [D10].

Singularidades removibles. Se dice que una función $f(z)$ tiene una *singularidad removible* en $z = z_0$ si $f(z)$ no es analítica en $z = z_0$, aunque puede hacerse analítica ahí mediante la asignación de un valor idóneo $f(z_0)$. Tales singularidades carecen de interés, ya que pueden eliminarse como acaba de describirse. *Ejemplo*: $f(z) = (\text{sen } z)/z$ se vuelve analítica en $z = 0$ si se define $f(0) = 1$.

Ceros de funciones analíticas

Se dice que una función $f(z)$ que es analítica en algún dominio D tiene un **cero** en un punto $z = z_0$ en D si $f(z_0) = 0$. También se dice que este cero es de **orden** n si no sólo f sino también todas las derivadas $f', f'', \cdots, f^{(n-1)}$ son iguales a cero en $z = z_0$ pero $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

Un cero de primer orden también se denomina *cero simple*; para éste, $f(z_0) = 0$ pero $f'(z_0) \neq 0$. Para un cero de segundo orden, $f(z_0) = 0, f'(z_0) = 0$ pero $f''(z_0) \neq 0$, etc.

Ejemplo 4 Ceros.

La función $1 + z^2$ tiene ceros simples en $\pm i$. La función $(1 - z^4)^2$ tiene ceros de segundo orden en ± 1 y $\pm i$. La función $(z - a)^3$ tiene un cero de tercer orden en $z = a$. La función e^z no tiene ceros (ver la sección 12.6). La función sen z tiene ceros simples en $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots$, y sen$^2 z$ tiene ceros de segundo orden en estos puntos. La función $1 - \cos z$ tiene ceros de segundo orden en $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \cdots$, y $(1 - \cos z)^2$ tiene ceros de cuarto orden en estos puntos. ∎

La serie de Taylor en un cero. Por definición, en un cero de n–ésimo orden $z = z_0$ de $f(z)$, las derivadas $f'(z_0), \cdots, f^{(n-1)}(z_0)$ son cero. Así, los primeros coeficientes $a_0, \cdots, a_{n-1}$ de

[12] Ver la nota de pie de página en la sección 1.10.

la serie de Taylor (9), sección 14.4, también son cero en tanto $a_n \neq 0$, de modo que la serie asume la forma

$$(3)\qquad \begin{aligned} f(z) &= a_n(z - z_0)^n + a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \cdots \\ &= (z - z_0)^n[a_n + a_{n+1}(z - z_0) + a_{n+2}(z - z_0)^2 + \cdots] \end{aligned} \qquad (a_n \neq 0).$$

Lo anterior es característico de un cero así, porque si $f(z)$ posee tal serie de Taylor, entonces tiene un cero de n–ésimo orden en $z = z_0$, como se concluye por diferenciación.

Aunque es posible que ocurran singularidades no aisladas, para los ceros se tiene

Teorema 3 (Ceros)

Los ceros de una función analítica $f(z)$ ($\not\equiv 0$) son aislados; es decir, cada uno de ellos tiene una vecindad que no contiene ceros adicionales de $f(z)$.

Demostración. En (3), el factor $(z - z_0)^n$ es cero sólo en $z = z_0$. La serie de potencias entre corchetes representa una función analítica (por el teorema 5 de la sección 14.3) que se denominará $g(z)$. Así, $g(z_0) = a_n \neq 0$, ya que una función analítica es continua, debido a esta continuidad también se tiene que $g(z) \neq 0$ en alguna vecindad de $z = z_0$. Así, lo mismo se cumple para $f(z)$. ∎

Este teorema se ilustra con las funciones del ejemplo 4.

Los polos a menudo son provocados por ceros en el denominador. (*Ejemplo*: tan z tiene polos donde cos z es cero.) Esta es una de las razones primordiales que explican la importancia de los ceros. La clave de la relación es el

Teorema 4 (Polos y ceros)

Sea $f(z)$ analítica en $z = z_0$ tal que tiene un cero de n-ésimo orden en $z = z_0$. Entonces $1/f(z)$ tiene un cero de n-ésimo orden en $z = z_0$.

Lo mismo se cumple para $h(z)/f(z)$ si $h(z)$ es analítica en $z = z_0$ y $h(z_0) \neq 0$.

La demostración se concluye a partir de (3) (ver el problema 27).

Esfera de números de Riemann. Infinito

El estudio del comportamiento de las funciones analíticas $f(z)$ para $|z|$ grande es una tarea natural de importancia práctica. Cuando $|z|$ es grande, el plano complejo se vuelve algo inconveniente de utilizar. En este caso, es preferible usar una representación de los números complejos en una esfera sugerida por Riemann y que se obtiene como sigue.

Sea S una esfera de diámetro 1 que toca el plano complejo z en el origen (figura 345). Sea N el "polo norte" de S (el punto diametralmente opuesto al punto de contacto entre la esfera y el plano). Sea P cualquier punto en el plano complejo. Entonces el segmento de recta con puntos terminales P y N corta a S en un punto P^*. Se hace que P y P^* correspon-

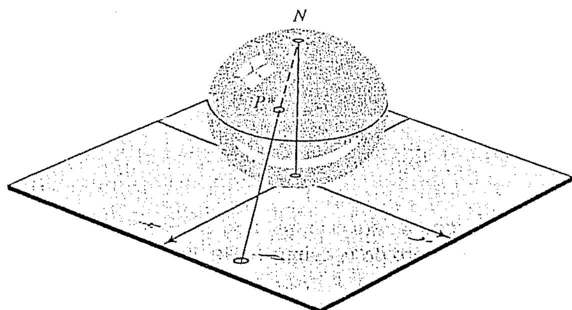


Figura 345. Esfera de números de Riemann.

dan entre sí. De esta manera se obtiene un mapeo del plano complejo en la esfera S, y P^* es el punto imagen de P con respecto a este mapeo. Los números complejos, primero representados en el plano, ahora se representan por puntos sobre S. A cada z corresponde un punto en S.

Recíprocamente, cada punto en S representa un números complejo z, excepto por el punto N, que no corresponde a ningún punto en el plano complejo. Lo anterior sugiere la introducción de un punto adicional, denominado **punto en el infinito** y denotado por el símbolo ∞ (*infinito*). El plano complejo junto con el punto ∞ se denomina **plano complejo extendido**. El plano complejo sin el punto ∞ suele denominarse *plano complejo finito*, para distinguirlo, o simplemente *plano complejo*, como antes.

Por supuesto, ahora se hace que el punto $z = \infty$ corresponda a N. Así, el mapeo se vuelve una transformación uno a uno del plano complejo extendido sobre S. La esfera S se denomina **esfera de números de Riemann**. El mapeo particular que se ha utilizado se denomina **proyección estereográfica**.

Resulta evidente que el círculo unitario es mapeado sobre el "ecuador" de S. El interior del círculo unitario corresponde al "hemisferio sur" y el exterior, al "hemisferio norte". Los números z cuyos valores absolutos son grandes están próximos al polo norte N. Los ejes x y y (y, de manera más general, todas las rectas que pasan por el origen) son mapeadas sobre los "meridianos", mientras que los círculos con centro en el origen son transformados sobre los "paralelos". Es posible demostrar que cualquier círculo o recta en el plano z es mapeado sobre un círculo sobre S.

Analítica o singular en el infinito

Si se desea analizar una función $f(z)$ para $|z|$ grande, ahora es necesario hacer $z = 1/w$ e investigar $f(z) = f(1/w) \equiv g(w)$ en una vecindad de $w = 0$. $f(z)$ se define como **analítica o singular en el infinito** si $g(w)$ es analítica o singular, respectivamente, en $w = 0$. También se define

$$g(0) = \lim_{w \to 0} g(w) \tag{4}$$

si este límite existe.

Además, se dice que $f(z)$ tiene un *cero de n-ésimo orden en el infinito* si $f(1/w)$ tiene tal cero en $w = 0$. Lo anterior es semejante para los polos y las singularidades esenciales.

Ejemplo 5 Funciones analíticas o singulares en el infinito.

La función $f(z) = 1/z^2$ es analítica en el infinito porque $g(w) = f(1/w) = w^2$ es analítica en $w = 0$ y $f(z)$ tiene un cero de segundo orden en ∞. La función $f(z) = z^3$ es singular en ∞ y tiene un polo de tercer orden, ya que $g(w) = f(1/w) = 1/w^3$ tiene tal polo en $w = 0$. La función e^z tiene una singularidad esencial en ∞, ya que $e^{1/w}$ tiene tal singularidad en $w = 0$. De manera semejante, $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ tienen una singularidad esencial en ∞.

Recuerde que una **función entera** es aquella que es analítica en todas partes en el plano complejo (finito). El teorema de Liouville (sección 13.6) establece que las únicas funciones enteras *acotadas* son las constantes, por lo que cualquier función entera no constante no está acotada. Así, tiene una singularidad en ∞, un polo si se trata de un polinomio, o una singularidad esencial en caso contrario. Las funciones recientemente consideradas son típicas en este sentido. ∎

Una **función meroforma** es una función analítica cuyas únicas singularidades en el plano finito son polos.

Ejemplo 6 Funciones meroformas.

Las funciones racionales con denominador no constante, $\tan z$, $\cot z$, $\sec z$ y $\csc z$ son funciones meroformas. ∎

Aquí termina el capítulo 14 en que se estudian series de potencias, principalmente las series de Taylor (que desempeñan un rol aun más importante aquí que en cálculo) y las series de Laurent. Suficientemente interesantes, las segundas constituyen otro poderoso método de integración que será abordado en el siguiente capítulo.

Problemas de la sección 14.8

Singularidades. Determinar la ubicación y el tipo de las singularidades de las siguientes funciones, incluyendo aquéllas en el infinito. (En el caso de polos, también especificar el orden.)

1. $\cot z$
2. $1/(z + a)^4$
3. $z + 1/z$
4. $\dfrac{3}{z} - \dfrac{1}{z^2} - \dfrac{2}{z^3}$
5. $\dfrac{\cos 4z}{(z^4 - 1)^3}$
6. $\dfrac{\operatorname{sen}^2 z}{z^4 \cos 2z}$
7. $e^{\pi z}/(z^2 - iz + 2)^2$
8. $e^{1/(z+i)} + z^2$
9. $(e^z - 1 - z)/z^3$
10. $\cosh [1/(z^2 + 1)]$
11. $\tan 1/z$
12. $(\cos z - \operatorname{sen} z)^{-1}$
13. $\cos z - \operatorname{sen} z$
14. $1/\operatorname{senh} \frac{1}{2}z$
15. $e^{1/(z-1)}/(e^z - 1)$
16. Comprobar el teorema 1 para $f(z) = z^{-3} - z^{-1}$. Demostrar el teorema 1.

Ceros. Determinar la ubicación y el orden de los ceros de las siguientes funciones.

17. $(z^4 - 16)^2$
18. $(z - 16)^8$
19. $z \operatorname{sen}^2 \pi z$
20. $e^z - e^{2z}$
21. $z^{-2} \cos^3 \pi z$
22. $\cosh^2 z$
23. $(3z^2 - 1)/(z^2 - 2iz + 3)^2$
24. $(z^2 - 1)^2(e^{z^2} - 1)$
25. $(1 - \cos z)^2$
26. Si $f(z)$ tiene un cero de orden n en $z = z_0$, demostrar que $f^2(z)$ tiene un cero de orden $2n$, y que la derivada $f'(z)$ tiene un cero de orden $n - 1$ en $z = z_0$ (en el supuesto de que $n > 1$).
27. Demostrar el teorema 4.
28. Si $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son analíticas en un dominio D y son iguales en una sucesión de puntos z_n en D que converge en D, demostrar que $f_1(z) \equiv f_2(z)$ en D.
29. Demostrar que los puntos en los cuales una función analítica no constante $f(z)$ asume un valor dado k son aislados.

Esfera de números de Riemann. En el supuesto de que la imagen del eje x sean los meridianos 0° y 180°, describir y trazar las imágenes de las siguientes regiones sobre la esfera de números de Riemann.

30. $|z| \leq 1$ **31.** El primer cuadrante. **32.** El segundo cuadrante.

33. $|z| > 100$ **34.** El semiplano inferior. **35.** $\frac{1}{2} \leq |z| \leq 2$

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 14

1. ¿Qué es una serie de potencias? ¿Por qué estas series son tan importantes en análisis complejo?
2. Escribir de memoria la prueba de la razón, la prueba de la raíz y la fórmula de Cauchy-Hadamard para el radio de convergencia.
3. ¿Qué es la convergencia absoluta? ¿La convergencia condicional? ¿La convergencia uniforme?
4. ¿Qué sabe acerca de la convergencia de una serie de potencias?
5. ¿Es permisible la diferenciación término a término de una serie de potencias? ¿Y la integración término a término?
6. ¿Qué es una serie de Taylor? ¿Cuál fue la idea para obtenerla a partir de la fórmula de la integral de Cauchy?
7. Escribir la serie de Maclaurin de e^z, cos z, sen z, cosh z, senh z.
8. ¿Ln z tiene una serie de Maclaurin? Explicar la respuesta.
9. Si x se sustituye por z en la serie de Maclaurin de una función real $f(z)$, ¿se obtiene una función analítica?
10. Proporcionar ejemplos que ilustren los métodos prácticos para obtener una serie de Taylor.
11. ¿Qué es una serie de Laurent? ¿Qué sabe acerca de su convergencia?
12. ¿Es única la serie de Taylor de una función dada con un centro dado? Contestar la misma pregunta para una serie de Laurent.
13. ¿Qué es una singularidad? ¿Qué rol juega en relación con la convergencia de las series de Taylor y de Laurent?
14. ¿Cómo se aplican las series de Laurent en la clasificación de las singularidades?
15. ¿Qué es un polo? ¿Y una singularidad esencial aislada?
16. ¿Una función entera tiene polos? ¿Y singularidades esenciales? (Piense el lector en ejemplos típicos).
17. ¿Qué es un cero de una función analítica? ¿Qué sabe acerca de los ceros de las funciones analíticas?
18. ¿Conoce el lector alguna función analítica no constante sin ceros?
19. ¿Qué es una función meroforma? Proporcionar ejemplos.
20. ¿Qué es la esfera de números de Riemann? ¿Cuándo debe usarse?

Encontrar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias. ¿Puede el lector identificar la suma como una función conocida en algunos de los problemas?

21. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-2)^{2n+1}$ **22.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$ **23.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{2n} z^n$

24. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{10}}{n!}(z-1+2i)^n$ **25.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^{100}} z^n$ **26.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(3+4i)^n}$

27. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{2n}$ **28.** $\sum_{n=0}^{\infty} \pi^n (z-2i)^{2n}$ **29.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(2n)!}$

Encontrar la serie de Taylor de las siguientes funciones con el punto dado como centro y determinar el radio de convergencia.

30. e^z, πi **31.** e^{-2z}, 0 **32.** Ln z, 2

33. $\frac{1}{1-z}$, -1 **34.** $\frac{1}{2z-i}$, -1 **35.** $\frac{1}{z}$, $2+3i$

36. sen πz^2, 0 **37.** $\frac{1}{(1-z)^3}$, 0 **38.** $\frac{1}{4-3z}$, $1+i$

Desarrollar las funciones dadas en una serie de Laurent que converge para $0 < |z - z_0| < R$ y determinar la región de convergencia precisa, así como el tipo de singularidad de la función en z_0.

39. $\frac{\cos z}{(z - \frac{1}{2}\pi)^3}$, $z_0 = \frac{\pi}{2}$ **40.** $\frac{1-z^2}{z^4}$, $z_0 = 0$

41. $\frac{1}{z^4 - z^5}$, $z_0 = 0$ **42.** $\frac{e^z}{(z-1)^2}$, $z_0 = 1$

43. $z^3 \cosh \frac{1}{z}$, $z_0 = 0$ **44.** $\frac{z+1+i}{(z+i)^2}$, $z_0 = -i$

45. $(z-1)^{-3}$ Ln z, $z_0 = 1$ **46.** $\frac{1}{z^4}$ sen $2z^2$, $z_0 = 0$

47. $\frac{1}{z^2}\int_0^z \frac{e^t - 1}{t}\, dt$, $z_0 = 0$ **48.** $\frac{\text{senh } z + \text{sen } z}{z^3}$, $z_0 = 0$

49. $\frac{e^z}{(z-i)^5}$, $z_0 = i$ **50.** $(z+i)^3$ sen $\frac{1}{2z+2i}$, $z_0 = -i$

Resumen del capítulo 14

Series de potencias, series de Taylor y series de Laurent

Las sucesiones, series y pruebas de convergencia se analizaron en la sección 14.1. Una **serie de potencias** es de la forma (sección 14.2)

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots;$$

z_0 es su *centro*. La serie (1) converge para $|z - z_0| < R$ y diverge para $|z - z_0| > R$. Algunas series de potencias convergen para todo z (entonces se escribe $R = \infty$). R es el *radio de convergencia*. También, $R = \lim |a_n / a_{n+1}|$ si este límite existe. La serie (1) converge absolutamente (sección 14.2) y **uniformemente** (sección 14.6) en todo disco cerrado $|z - z_0| \leq r < R$. Si $R > 0$, entonces representa una función analítica $f(z)$ para $|z - z_0| < R$. Las derivadas $f'(z)$, $f''(z)$, $\cdots$ se obtienen por diferenciación término a término de (1), y estas series tienen el mismo radio de convergencia R que (1). Ver la sección 14.3.

Recíprocamente, *toda* función analítica $f(z)$ puede representarse por series de potencias. Estas **series de Taylor** de $f(z)$ son de la forma (sección 14.4)

$$(2) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n \qquad (|z - z_0| < R),$$

como en cálculo. Convergen para todo z si $f(z)$ es **entera** (= analítica para todo z) o en el disco abierto con centro en z_0 y radio igual a la distancia de z_0 a la **singularidad** más próxima de $f(z)$ (= punto en el que $f(z)$ deja de ser analítica; ver la sección 14.8). Las funciones e^z, cos z, sen z, etc. tienen series de Taylor y de Maclaurin semejantes a las del cálculo (sección 14.4).

Una **serie de Laurent** es de la forma (sección 14.7)

$$(3) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

o, escrito más brevemente [¡aunque significa lo mismo que (3)!]

$$(3^*) \qquad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}}\, dz^*.$$

Esta serie converge en una corona (anillo) abierta(o) A con centro en z_0. En A, la función $f(z)$ es analítica. Un punto que no está en A puede tener singularidades. La primera serie en (3) es una serie de potencias. La segunda serie se denomina **parte principal** de la serie de Laurent. En una corona dada, una serie de Laurent de $f(z)$ es única, pero $f(z)$ puede tener una serie de Laurent diferente en coronas diferentes con el mismo centro.

Si $f(z)$ tiene una singularidad aislada (sección 14.8) en $z = z_0$, entonces la serie de Laurent de $f(z)$ que converge para $0 < |z - z_0| < R$ (R idóneo) puede usarse para clasificar esta singularidad, que se denomina **polo** si la parte principal de esta serie de Laurent es una suma finita, y en caso contrario se denomina **singularidad esencial** (aislada).

Se dice que un polo es de **orden** n si $1/(z - z_0)^n$ es la máxima potencia negativa de la parte principal en (3). Un polo de primer orden también se denomina *polo simple*.

De manera semejante, la serie de Taylor (2) puede usarse para clasificar los **ceros** de $f(z)$. La función $f(z)$ definida por (2) tiene un cero de **n-ésimo orden** en z_0 si f y todas sus derivadas $f', f'', \cdots, f^{(n-1)}$ son cero en z_0, en tanto $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Un cero de primer orden también se denomina *cero simple*. Ver la sección 14.8.

En la sección 14.8 también se incluye un análisis del **plano complejo extendido**, que se obtiene a partir del plano complejo al agregar el punto impropio ∞ ("*infinito*").

Capítulo

15

Integración por el método de residuos

Debido a que existen varios métodos para determinar los coeficientes de una serie de Laurent (1), sección 14.7, sin usar las fórmulas integrales (2), sección 14.7, es posible utilizar la fórmula para b_1 a fin de evaluar integrales complejas de manera muy elegante y simple. b_1 se denominará **residuo** de $f(z)$ en $z = z_0$. Este poderoso método también puede aplicarse para evaluar ciertas integrales reales, como se verá en las secciones 15.3 y 15.4.

Prerrequisitos para este capítulo: Capítulos del 12 al 14.
Bibliografía: Apéndice 1, parte D.
Respuestas a los problemas: Apéndice 2.

15.1 RESIDUOS

Primero se explicará qué es un residuo y cómo puede usarse para evaluar integrales

$$\oint_C f(z)\, dz.$$

Estas serán integrales de contorno tomadas alrededor de una trayectoria simple cerrada C.

Si $f(z)$ es analítica en todas partes sobre C y dentro de C, entonces tal integral es cero debido al teorema de la integral de Cauchy (sección 13.3), con lo que ya se ha terminado.

Si $f(z)$ tiene una singularidad en un punto $z = z_0$ en el interior de C, pero de otra forma es analítica sobre C y dentro de C, entonces $f(z)$ tiene una serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots$$

que converge para todos los puntos próximos a $z = z_0$ (excepto en $z = z_0$ mismo), en algún dominio de la forma $0 < |z - z_0| < R$. Ahora sigue la idea crucial: El coeficiente b_1 de la primera potencia negativa $1/(z - z_0)$ de esta serie de Laurent está dado por la fórmula integral (2), sección 14.7, con $n = 1$; es decir,

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\, dz,$$

pero como las series de Laurent puede obtenerse por varios métodos, sin usar las fórmulas integrales para los coeficientes (ver los ejemplos en la sección 14.7), b_1 puede encontrarse aplicando uno de tales métodos y luego aplicar la fórmula para b_1 a fin de evaluar la integral:

(1) $$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i b_1.$$

Aquí se integra en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de la trayectoria simple cerrada C que contiene a $z = z_0$ en su interior.

El coeficiente b_1 se denomina **residuo** de $f(z)$ en $z = z_0$, y se denota por

(2) $$b_1 = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z).$$

Ejemplo 1 Evaluación de una integral por medio de un residuo

Integrar la función $f(z) = z^{-4}$ sen z en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor del círculo unitario C.

Solución. Por (14) de la sección 14.4 se obtiene la serie de Laurent

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^4} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + - \cdots$$

que converge para $|z| > 0$ (es decir, para todo $z \neq 0$). Esta serie muestra que $f(z)$ tiene un polo de tercer orden en $z = 0$ y el residuo

$$b_1 = -1/3!.$$

A partir de (1), entonces se obtiene la respuesta

$$\oint_C \frac{\operatorname{sen} z}{z^4}\, dz = 2\pi i b_1 = -\frac{\pi i}{3}.$$

Ejemplo 2 ¡Debe tenerse cuidado en aplicar la serie de Laurent *correcta*!

Integrar $f(z) = 1/(z^3 - z^4)$ en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj alrededor del círculo C: $|z| = 1/2$.

Solución. $z^3 - z^4 = z^3(1 - z)$ muestra que $f(z)$ es singular en $z = 0$ y en $z = 1$. Así, $z = 1$ está fuera de C, por lo que carece de interés aquí. Entonces se requiere el residuo de $f(z)$ en 0, que se encuentra a partir de la serie de Laurent que converge para $0 < |z| < 1$; se trata de la serie (I) del ejemplo 4 en la sección 14.7:

$$\frac{1}{z^3 - z^4} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + \cdots \qquad (0 < |z| < 1).$$

A partir de lo anterior se observa que el residuo es 1. Así, al integrar en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj se obtiene

$$\oint_C \frac{dz}{z^3 - z^4} = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = -2\pi i.$$

¡Atención! Si se hubiese aplicado la serie errónea (II) en el ejemplo 4 de la sección 14,7,

$$\frac{1}{z^3 - z^4} = -\frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5} - \frac{1}{z^6} - \cdots \qquad (|z| > 1),$$

se hubiera obtenido una respuesta errónea, 0, porque esta serie no tiene potencia $1/z$

Dos fórmulas para obtener residuos en polos simples

Antes de proseguir con la integración, se pregunta lo siguiente. Para obtener un residuo, un simple coeficiente de una serie de Laurent, ¿es necesario obtener toda la serie o existe una manera más económica? Para polos, la respuesta es que sí existe una manera más económica. De una vez y por todas, se deducirán algunas fórmulas para obtener residuos en los polos, de modo que en este caso ya no será necesario obtener las series completas.

Sea $f(z)$ con un polo simple en $z = z_0$. Entonces, la serie de Laurent correspondiente es [ver (2) con $m = 1$ en la sección 14.8].

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \qquad (0 < |z - z_0| < R).$$

Aquí $b_1 \neq 0$ (¿por qué?). Al multiplicar ambos miembros por $z - z_0$ se obtiene

$$(z - z_0)f(z) = b_1 + (z - z_0)[a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots].$$

Ahora se hace $z \to z_0$. Entonces el miembro derecho tiende a b_1. Así se obtiene

(3) $$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1 = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)f(z).$$

Ejemplo 3 Residuo en un polo simple.

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{9z + i}{z(z^2 + 1)} = \lim_{z \to i} (z - i) \frac{9z + i}{z(z + i)(z - i)} = \left[\frac{9z + i}{z(z + i)}\right]_{z=i} = \frac{10i}{-2} = -5i.$$

Otra fórmula, que algunas veces es más simple, para obtener el residuo en un polo simple se obtiene empezando con

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

con $p(z)$ y $q(z)$ analíticas, en donde se supone que $p(z_0) \neq 0$ y $q(z)$ tiene un cero simple en $z = z_0$ (de modo que, por el teorema 4 en la sección 14.8, $f(z)$ tiene un polo simple en $z = z_0$, como se desea). Por la definición de cero simple, $q(z)$ tiene una serie de Taylor de la forma

$$q(z) = (z - z_0)q'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!} q''(z_0) + \cdots .$$

Esta serie se sustituye en $f = p/q$ y después f se sustituye en (3), con lo que se encuentra

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{p(z)}{q(z)}$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)p(z)}{(z - z_0)[q'(z_0) + (z - z_0)q''(z_0)/2 + \cdots]} .$$

Ahora se ve que en el miembro derecho se cancela un factor $z - z_0$, y que el denominador resultante tiene el límite $q'(z_0)$. Por tanto, la segunda fórmula para obtener el residuo en un polo simple es

(4) $$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} .$$

Ejemplo 4 Residuo en un polo simple calculado a partir de la fórmula (4).

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{9z + i}{z(z^2 + 1)} = \left[\frac{9z + i}{3z^2 + 1}\right]_{z=i} = \frac{10i}{-2} = -5i \quad \text{(ver el ejemplo 3)}$$

Ejemplo 5 Otra aplicación de la fórmula (4).

Encontrar todos los polos y los residuos correspondientes de la función

$$f(z) = \frac{\cosh \pi z}{z^4 - 1} .$$

Solución. $p(z) = \cosh \pi z$ es entera, y $q(z) = z^4 - 1$ tiene ceros simples en $1, i, -1, -i$. Por tanto, $f(z)$ tiene polos simples en estos puntos (y ningún otro polo). Como $q'(z) = 4z^3$, por (4) se observa que los residuos son iguales a los valores de $(\cosh \pi z)/4z^3$ en tales puntos; es decir,

$$\frac{\cosh \pi}{4} \approx 2.8980, \quad \frac{\cosh \pi i}{4i^3} = \frac{\cos \pi}{-4i} = -\frac{i}{4}, \quad -\frac{\cosh \pi}{4}, \quad \frac{\cosh(-\pi i)}{4(-i)^3} = \frac{i}{4} .$$

Fórmula para el residuo de un polo de cualquier orden

Sea $f(z)$ una función analítica que tiene un polo de cualquier orden $m > 1$ en un punto $z = z_0$. Entonces, por definición de tal polo (sección 14.8), la serie de Laurent de $f(z)$ que converge cerca de $z = z_0$ (excepto en $z = z_0$ mismo) es

$$f(z) = \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \frac{b_{m-1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \frac{b_1}{z - z_0}$$
$$+ a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots ,$$

en donde $b_m \neq 0$. Al multiplicar ambos miembros por $(z - z_0)^m$, se obtiene

$$(z - z_0)^m f(z) = b_m + b_{m-1}(z - z_0) + \cdots + b_2(z - z_0)^{m-2} + b_1(z - z_0)^{m-1}$$
$$+ a_0(z - z_0)^m + a_1(z - z_0)^{m+1} + \cdots .$$

Se observa que el residuo b_1 de $f(z)$ en $z = z_0$ es ahora el coeficiente de la potencia $(z - z_0)^{m-1}$ en la serie de Taylor de la función

$$g(z) = (z - z_0)^m f(z)$$

del miembro izquierdo, con centro $z = z_0$. Así, por el teorema de Taylor (sección 14.4),

$$b_1 = \frac{1}{(m - 1)!} g^{(m-1)}(z_0).$$

Por tanto, si $f(z)$ tiene un polo de m–ésimo orden en $z = z_0$, entonces el residuo está dado por

(5) $$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m - 1)!} \lim_{z \to z_0} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] \right\}.$$

En particular, para un polo de segundo orden ($m = 2$),

(5*) $$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \left\{ [(z - z_0)^2 f(z)]' \right\}.$$

Ejemplo 6 Residuo en un polo de orden superior.

La función

$$f(z) = \frac{50z}{(z + 4)(z - 1)^2}$$

tiene un polo de segundo orden en $z = 1$, y por (5*) se obtiene el residuo correspondiente

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}[(z-1)^2 f(z)] = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left(\frac{50z}{z+4}\right) = 8.$$

Ejemplo 7 Residuos de fracciones parciales.

Si $f(z)$ es racional, entonces sus residuos también pueden determinarse a partir de fracciones parciales. En el ejemplo 6,

$$f(z) = \frac{50z}{(z+4)(z-1)^2} = \frac{-8}{z+4} + \frac{8}{z-1} + \frac{10}{(z-1)^2}.$$

Lo anterior muestra que el residuo en $z = 1$ es 8 (como antes), y que en $z = -4$ (polo simple) es -8.

¿Por qué sucede lo anterior? Considerar $z = 1$. Ahí, la serie de Laurent tiene las dos últimas fracciones como su parte principal, y la primera fracción como la suma de su otra parte. Esta primera fracción es analítica en $z = 1$, de modo que tiene una serie de Taylor con centro $z = 1$, como debe ser. De manera semejante, en $z = -4$ la primera fracción es la parte principal de la serie de Laurent.

Ejemplo 8 Integración alrededor de un polo de segundo orden.

Al integrar $f(z)$ en los ejemplos 6 y 7 en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de cualquier trayectoria simple cerrada C tal que $z = 1$ está dentro de C y $z = -4$ está fuera de C se obtiene (ver el ejemplo 6 o el ejemplo 7)

$$\oint_C \frac{50z}{(z+4)(z-1)^2}\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=1} \frac{50z}{(z+4)(z-1)^2} = 2\pi i \cdot 8 = 16\pi i \approx 50.27i.$$

Problemas de la sección 15.1

Encontrar los residuos en los puntos singulares de las siguientes funciones.

1. $\dfrac{3}{1-z}$
2. $\dfrac{4}{z^3} - \dfrac{1}{z^2}$
3. $\dfrac{\operatorname{sen} z}{z^4}$
4. $\dfrac{z^2+1}{z^2-z}$
5. $\dfrac{z^4}{z^2 - iz + 2}$
6. $\dfrac{e^z}{(z-\pi i)^5}$
7. $\cot z$
8. $\sec z$
9. $2/(z^2-1)^2$

Encontrar los residuos en aquellos puntos singulares que están dentro del círculo $|z| = 1$.

10. $\dfrac{z^2}{z^4-1}$
11. $\dfrac{2z-3}{z^3+3z^2}$
12. $\dfrac{z-23}{z^2-4z-5}$
13. $\dfrac{3}{(z^4-1)^2}$
14. $\dfrac{-z^2-22z+8}{z^3-5z^2+4z}$
15. $\dfrac{3z+6}{(z+1)(z^2+16)}$

Evaluar las siguientes integrales, en donde C es la circunferencia unitaria (en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj).

16. $\oint_C e^{1/z}\,dz$
17. $\oint_C \tan z\,dz$
18. $\oint_C \csc 2z\,dz$
19. $\oint_C \cot z\,dz$
20. $\oint_C \dfrac{dz}{\operatorname{senh} \frac{1}{2}\pi z}$
21. $\oint_C \dfrac{z^4+6}{z^2-2z}\,dz$
22. $\oint_C \dfrac{\operatorname{sen} \pi z}{z^6}\,dz$
23. $\oint_C \dfrac{z^3+2}{4z+\pi}\,dz$
24. $\oint_C \dfrac{\tanh(z+1)}{e^z \operatorname{sen} z}\,dz$
25. **Otra deducción de (5).** Obtener (5) sin aplicar el teorema de Taylor, derivando $m-1$ veces la fórmula $(z-z_0)^m f(z)$.

15.2 TEOREMA DEL RESIDUO

Hasta el momento es posible evaluar integrales de funciones analíticas $f(z)$ sobre curvas cerradas C cuando $f(z)$ tiene *un* solo punto singular dentro de C. A continuación se verá que el método de integración por residuos puede extenderse al caso en que haya varios puntos singulares de $f(z)$ dentro de C. Esta extensión es sorprendentemente sencilla, como se muestra a continuación.

Teorema 1 Teorema del residuo

Sea $f(z)$ una función analítica dentro de una trayectoria simple cerrada C y sobre C, excepto por un número finito de puntos singulares $z_1, z_2, \cdots, z_k$ dentro de C. Entonces

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z), \tag{1}$$

la integral se efectúa en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de la trayectoria C.

Demostración. Cada uno de los puntos singulares z_j se encierra en un círculo C_j con radio suficientemente pequeño, de modo que todos estos k círculos y C sean ajenos (figura 346). Así, $f(z)$ es analítica en el dominio múltiplemente conexo D acotado por C y $C_1, \cdots, C_k$, y sobre toda la frontera de D. Por el teorema de la integral de Cauchy se tiene

$$\oint_C f(z)\,dz + \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz + \cdots + \oint_{C_k} f(z)\,dz = 0, \tag{2}$$

la integral a lo largo de C se toma en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj y las otras integrales, en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj (ver la sección 13.3). Ahora se invierte el sentido de la integración a lo largo de $C_1, \cdots, C_k$. Así, los signos de los valores de estas integrales cambian, y por (2) se obtiene que

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz + \cdots + \oint_{C_k} f(z)\,dz. \tag{3}$$

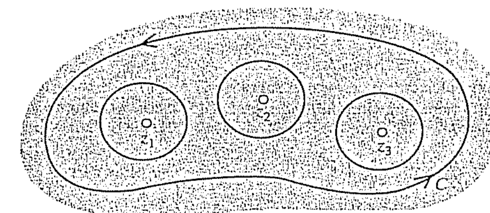


Figura 346. Teorema del residuo.

Ahora, todas estas integrales se toman en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Por (1) de la última sección,

$$\oint_{C_j} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z),$$

de modo que con (3) se obtiene (1), y se ha demostrado el teorema. ∎

Este teorema importante tiene varias aplicaciones en relación con integrales complejas y reales. Primero se considerarán algunas integrales complejas.

Ejemplo 1 Integración por el teorema del residuo.

Evaluar la siguiente integral en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de cualquier trayectoria simple cerrada tal que (a) 0 y 1 estén dentro de C, (b) 0 esté dentro y 1 esté fuera, (c) 1 esté dentro y 0 esté fuera, (d) 0 y 1 estén fuera de C

$$\oint_C \frac{4-3z}{z^2-z}\, dz.$$

Solución. El integrando tiene polos simples en 0 y 1, con residuos [(por (3) en la sección 15.1]

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{4-3z}{z(z-1)} = \left[\frac{4-3z}{z-1}\right]_{z=0} = -4, \qquad \operatorname*{Res}_{z=1} \frac{4-3z}{z(z-1)} = \left[\frac{4-3z}{z}\right]_{z=1} = 1.$$

Confirmar lo anterior aplicando (4) en la sección 15.1. *Respuesta.* (a) $2\pi i(-4+1) = -6\pi i$, (b) $-8\pi i$, (c) $2\pi i$, (d) 0. ∎

Ejemplo 2 Polos y singularidades esenciales.

Evaluar la siguiente integral (en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj), en donde C es la elipse $9x^2 + y^2 = 9$

$$\oint_C \left(\frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} + ze^{\pi/z}\right) dz$$

Solución. Como $z^4 - 16 = 0$ en $\pm 2i$ y ± 2, entonces el primer término del integrando tiene polos simples en $\pm 2i$ dentro de C, con residuos [por (4) de la sección 15.1; observe que $e^{2\pi i} = 1$]

$$\operatorname*{Res}_{z=2i} \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} = \left[\frac{ze^{\pi z}}{4z^3}\right]_{z=2i} = -\frac{1}{16}, \qquad \operatorname*{Res}_{z=-2i} \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} = \left[\frac{ze^{\pi z}}{4z^3}\right]_{z=-2i} = -\frac{1}{16}$$

y polos simples en ± 2, que están fuera de C, por lo que carecen de interés aquí. El segundo término del integrando tiene una singularidad esencial en 0, con residuo $\pi^2/2$, según se obtiene a partir de

$$ze^{\pi/z} = z\left(1 + \frac{\pi}{z} + \frac{\pi^2}{2!z^2} + \frac{\pi^3}{3!z^3} + \cdots\right) = z + \pi + \frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{1}{z} + \cdots.$$

Respuesta $2\pi i(-1/16 - 1/16 + \pi^2/2) = \pi(\pi^2 - 1/4)i = 30.221i$, por el teorema del residuo ∎

Ejemplo 3 Confirmación de un resultado básico anterior.

Integrar $1/(z-z_0)^m$ (m es un entero positivo) en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de cualquier trayectoria simple cerrada C que contenga al punto $z = z_0$.

Solución. $1/(z-z_0)^m$ tiene su propia serie de Laurent con centro $z = z_0$, que consta de esta parte principal de un solo término, y

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{1}{z-z_0} = 1,$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{1}{(z-z_0)^m} = 0 \qquad (m = 2, 3, \cdots).$$

En concordancia con el ejemplo 2 de la sección 13.2, así se obtiene

$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^m} = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } m = 1 \\ 0 & \text{si } m = 2, 3, \cdots. \end{cases}$$ ∎

Problemas de la sección 15.2

Integrar $\dfrac{15z+9}{z^3-9z}$ en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de las siguientes trayectorias C.

1. $|z| = 1$ **2.** $|z| = 4$ **3.** $|z + 2 + i| = 3$

4. $|z - 3| = 2$ **5.** $|z - \frac{3}{2} + 2i| = 2.4$ **6.** $|z - 1| = 3$

Evaluar las siguientes integrales, en donde C es cualquier trayectoria simple cerrada tal que todas las singularidades están dentro de C (en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj).

7. $\oint_C \dfrac{5z}{z^2+4}\, dz$ **8.** $\oint_C \dfrac{z}{1+9z^2}\, dz$ **9.** $\oint_C \dfrac{z\cosh \pi z}{z^4+13z^2+36}\, dz$

10. $\oint_C \dfrac{\operatorname{senh} z}{2z-i}\, dz$ **11.** $\oint_C \dfrac{z+e^z}{z^3-z}\, dz$ **12.** $\oint_C \dfrac{z^2 \operatorname{sen} z}{4z^2-1}\, dz$

Evaluar las siguientes integrales, en donde C es la circunferencia unitaria (en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj).

13. $\oint_C \dfrac{z}{z^2-\frac{1}{4}}\, dz$ **14.** $\oint_C \dfrac{7z}{z^2+\frac{1}{9}}\, dz$ **15.** $\oint_C \dfrac{dz}{z^2+6iz}$

16. $\oint_C \dfrac{e^{-z^2}}{\operatorname{sen} 4z}\, dz$ **17.** $\oint_C \dfrac{e^{-z^2}}{\operatorname{sen} 2z}\, dz$ **18.** $\oint_C \dfrac{30z^2-23z+5}{(2z-1)^2(3z-1)}\, dz$

19. $\oint_C \cot \dfrac{z}{4}\, dz$ **20.** $\oint_C e^z \cot 4z\, dz$ **21.** $\oint_C \dfrac{\operatorname{senh} z}{4z^2+1}\, dz$

22. $\oint_C \dfrac{e^z}{z(z-\pi i/4)^2}\, dz$ **23.** $\oint_C \tan 2\pi z\, dz$ **24.** $\oint_C \dfrac{1-4z+6z^2}{(z^2+\frac{1}{4})(2-z)}\, dz$

25. $\oint_C \tan \pi z \, dz$

26. $\oint_C \coth z \, dz$

27. $\oint_C \frac{\tan \pi z}{z^3} \, dz$

28. $\oint_C \frac{\cosh z}{z^2 - 3iz} \, dz$

29. $\oint_C \frac{e^z}{\cos \pi z} \, dz$

30. $\oint_C \frac{(z + 4)^3}{z^4 + 5z^3 + 6z^2} \, dz$

15.3 EVALUACIÓN DE INTEGRALES REALES

A continuación se demostrará el bastante sorprendente hecho de que el teorema del residuo también constituye un método muy elegante y simple para evaluar ciertas clases de integrales *reales* complicadas.

Integrales de funciones racionales de cos θ y sen θ

Primero se considerarán integrales del tipo

(1)
$$I = \int_0^{2\pi} F(\cos \theta, \text{ sen } \theta) \, d\theta$$

en donde $F(\cos \theta, \text{sen } \theta)$ es una función racional de cos θ y sen θ, por ejemplo $(\text{sen}^2 \theta)/(5 - 4 \cos \theta)$], y es finita sobre el intervalo de integración. Al hacer $e^{i\theta} = z$ se obtiene

(2)
$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$
$$\text{sen } \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

y se observa que el integrando se vuelve una función racional de z, por ejemplo $f(z)$. A medida que θ varía desde o hasta 2π, la variable z varía una vez alrededor de la circunferencia unitaria $|z| = 1$ en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Como $dz/d\theta = ie^{i\theta}$, se tiene que $d\theta = dz/iz$, y la integral dada asume la forma

(3)
$$I = \oint_C f(z) \frac{dz}{iz},$$

la integración se efectúa en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de la circunferencia unitaria.

Ejemplo 1 Una integral del tipo (1).

Aplicando el método actual, demostrar que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \cos \theta} = 2\pi.$$

Solución. Se usa $\cos \theta = \frac{1}{2}(z + 1/z)$ y $d\theta = dz/iz$. Así, la integral se vuelve

$$\oint_C \frac{dz/iz}{\sqrt{2} - \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} = \oint_C \frac{dz}{-\frac{i}{2}(z^2 - 2\sqrt{2}z + 1)} = -\frac{2}{i}\oint_C \frac{dz}{(z - \sqrt{2} - 1)(z - \sqrt{2} + 1)}.$$

Se observa que el integrando tiene dos polos simples, uno en $z_1 = \sqrt{2} + 1$, que está fuera de la circunferencia unitaria C: $|z| = 1$ y por tanto carece de interés; y el otro en $z_2 = \sqrt{2} - 1$ dentro de C, en donde el residuo es [por (3) de la sección 15.1]

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2} \frac{1}{(z - \sqrt{2} - 1)(z - \sqrt{2} + 1)} = \left[\frac{1}{z - \sqrt{2} - 1}\right]_{z=\sqrt{2}-1} = -\frac{1}{2}.$$

Junto con el factor $-2/i$ antes de la integral, lo anterior conduce al resultado deseado $2\pi i(-2/i)(-1/2) = 2\pi$. ∎

Integrales impropias de funciones racionales

A continuación se considerarán integrales reales del tipo

(4)
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx.$$

Tal integral, para la que el intervalo de integración no es finito, se denomina **integral impropia**, y significa que

(5')
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 f(x) \, dx + \lim_{b \to \infty} \int_0^b f(x) \, dx.$$

Si ambos límites existen, entonces es posible acoplar los dos pasajes independientes a $-\infty$ y ∞, y escribir[1]

(5)
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x) \, dx.$$

Se supone que la función $f(x)$ en (4) es una función racional real cuyo denominador es diferente de cero para todo x real, y que su grado es por lo menos dos unidades mayor que el grado del denominador. Así, el límite en (5') existe y es posible empezar a partir de (5). Se considerará la integral de contorno correspondiente

(5*)
$$\oint_C f(z) \, dz$$

[1] La expresión del miembro derecho de (5) se denomina **valor principal de Cauchy** de la integral y puede existir incluso si los límites en (5') no existen. Por ejemplo,

$$\lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} x \, dx = \lim_{R \to \infty} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right) = 0, \quad \text{pero} \quad \lim_{b \to \infty} \int_0^b x \, dx = \infty.$$

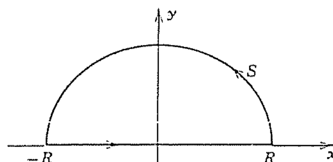


Figura 347. Trayectoria C de la integral de contorno en (5').

alrededor de una trayectoria C en la figura 347. Como $f(x)$ es racional, entonces $f(z)$ tiene una infinidad de polos en el semiplano superior, y si se elige R suficientemente grande, entonces C abarca a todos estos polos. Entonces, por el teorema del residuo se obtiene

$$\oint_C f(z)\,dz = \int_S f(z)\,dz + \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f(z)$$

en donde la suma consta de todos estos residuos de $f(z)$ en los puntos en el semiplano superior en donde $f(z)$ tiene un polo. A partir de lo anterior se obtiene

$$(6) \qquad \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f(z) - \int_S f(z)\,dz.$$

Se demostrará que, si $R \to \infty$, entonces el valor de la integral sobre el semicírculo S tiende a cero. Si se hace $z = Re^{i\theta}$, entonces S está representado por R = constante, y a medida que z varía a lo largo de S, la variable θ varía desde 0 hasta π. Como, por hipótesis, el grado del denominador de $f(z)$ es por lo menos dos unidades mayor que el grado del numerador, entonces se tiene

$$|f(z)| < \frac{k}{|z|^2} \qquad (|z| = R > R_0)$$

para constantes k y R_0 suficientemente grandes. Por la desigualdad ML de la sección 13.2, se tiene

$$\left|\int_S f(z)\,dz\right| < \frac{k}{R^2}\pi R = \frac{k\pi}{R} \qquad (R > R_0).$$

Por tanto, cuando R tiende a infinito, el valor de la integral sobre S tiende a cero y (5) y (6) producen el resultado

$$(7) \qquad \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f(z),}$$

en donde se suma sobre todos los residuos de $f(z)$ correspondientes a los polos de $f(z)$ en el semiplano superior.

Ejemplo 2 Una integral impropia desde 0 hasta ∞

Aplicar (7) para demostrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Solución. De hecho, $f(z) = 1/(1+z^4)$ tiene cuatro polos simples en los puntos

$$z_1 = e^{\pi i/4}, \qquad z_2 = e^{3\pi i/4}, \qquad z_3 = e^{-3\pi i/4}, \qquad z_4 = e^{-\pi i/4}.$$

Los dos primeros de estos polos están en el semiplano superior (figura 348). A partir de (4) en la sección 15.1 se encuentra que

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \left[\frac{1}{(1+z^4)'}\right]_{z=z_1} = \left[\frac{1}{4z^3}\right]_{z=z_1} = \frac{1}{4}e^{-3\pi i/4} = -\frac{1}{4}e^{\pi i/4},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) = \left[\frac{1}{(1+z^4)'}\right]_{z=z_2} = \left[\frac{1}{4z^3}\right]_{z=z_2} = \frac{1}{4}e^{-9\pi i/4} = \frac{1}{4}e^{-\pi i/4}.$$

Por (1) en la sección 12.7 y (7) de esta sección,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{2\pi i}{4}(-e^{\pi i/4} + e^{-\pi i/4}) = \pi \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Como $1/(1+x^4)$ es una función par, entonces se obtiene, como se afirmó,

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

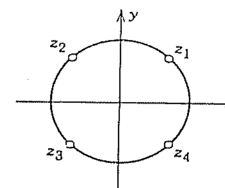


Figura 348. Ejemplo 2.

Ejemplo 3 Otra integral impropia.

Aplicar (7) para demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-1}{x^4+5x^2+4}\,dx = \frac{\pi}{6}.$$

Solución. El grado del denominador es dos unidades mayor que el del numerador, de modo que el método actual es aplicable. Así, se tiene

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{z^2-1}{z^4+5z^2+4} = \frac{z^2-1}{(z^2+4)(z^2+1)}$$

que tiene polos simples en $2i$ e i en el semiplano superior (y en $-2i$ y $-i$ en el semiplano inferior, que carecen de interés aquí). A partir de (4), sección 15.1, se calculan los residuos observando que $q'(z) = 4z^3 + 10z$.

$$\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) = \left[\frac{z^2 - 1}{4z^3 + 10z}\right]_{z=2i} = \frac{5}{12i}, \qquad \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \left[\frac{z^2 - 1}{4z^3 + 10z}\right]_{z=i} = \frac{-2}{6i}.$$

Respuesta. $2\pi i(5/12i - 1/3i) = \pi/6$, como se afirmó.

En retrospectiva, es posible darse cuenta de que las ideas cruciales de los métodos actuales son éstas. En el primer método, el intervalo de integración en el eje real se mapeó sobre una curva cerrada en el plano complejo (la circunferencia unitaria). En el segundo método, a un intervalo sobre el eje real se asoció un semicírculo, de modo que se obtuvo una curva cerrada en el plano complejo, que después se "deshizo". Este segundo método puede aplicarse a más tipos de integrales, como se mostrará en la siguiente sección, que es la última de este capítulo.

Problemas de la sección 15.3

Evaluar las siguientes integrales que implican funciones coseno y seno.

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \frac{1}{2}\cos\theta}$ 2. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\pi + \cos\theta}$ 3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{37 - 12\cos\theta}$

4. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 3\,\mathrm{sen}\,\theta}$ 5. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5/4 - \mathrm{sen}\,\theta}$ 6. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{3 + \mathrm{sen}\,\theta}\,d\theta$

7. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{17 - 8\cos\theta}\,d\theta$ 8. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{sen}^2\,\theta}{5 - 4\cos\theta}\,d\theta$ 9. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{13 - 12\cos 2\theta}\,d\theta$

10. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1 + 4\cos\theta}{17 - 8\cos\theta}\,d\theta$ *Sugerencia.* $\cos 2\theta = \frac{1}{2}(z^2 + z^{-2})$.

Evaluar las siguientes integrales impropias.

11. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2}$ 12. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^3}$ 13. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1 + x^2}{1 + x^4}\,dx$

14. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^4 + 1}\,dx$ 15. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^6}$ 16. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 16}$

17. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 - 2x + 2)^2}\,dx$ 18. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}$ 19. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(4 + x^2)^2}$

20. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - 2x + 5)^2}$

15.4 OTROS TIPOS DE INTEGRALES REALES

Existen más clases de integrales que pueden evaluarse aplicando el teorema del residuo a integrales complejas idóneas. En las aplicaciones, estas integrales pueden surgir en relación con transformaciones o representaciones integrales de funciones espe-

ciales. En esta sección se considerarán dos clases de estas integrales. Una de ellas es importante en problemas que implican la representación integral de Fourier (sección 10.9). La otra clase consiste en integrales reales cuyo integrando es infinito en algún punto del intervalo de integración.

Integrales de Fourier

Integrales reales de la forma

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos sx\,dx \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{sen}\,sx\,dx \qquad (s \text{ real})$$

se presentan en relación con la integral de Fourier (sección 10.9).

Si $f(x)$ es una función racional que cumple las hipótesis sobre el grado enunciadas en relación con (4), sección 15.3, entonces la integral (1) puede evaluarse de manera semejante a la que se usó para la integral (4) de la sección anterior. De hecho, es posible considerar entonces la integral correspondiente

$$\oint_C f(z)e^{isz}\,dz \qquad (s \text{ real y positivo})$$

sobre el contorno C en la figura 347 (sección 15.3): En vez de (7), sección 15.3, se obtiene

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx}\,dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res}\,[f(z)e^{isz}] \qquad (s > 0)$$

en donde se suman los residuos de $f(z)e^{isz}$ en sus polos del semiplano superior. Al igualar las partes reales e imaginarias de ambos miembros de (2), se obtiene

$$(3) \qquad \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos sx\,dx &= -2\pi \sum \operatorname{Im}\operatorname{Res}\,[f(z)e^{isz}], \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{sen}\,sx\,dx &= 2\pi \sum \operatorname{Re}\operatorname{Res}\,[f(z)e^{isz}]. \end{aligned} \qquad (s > 0)$$

Es necesario recordar que (7), sección 15.3, se estableció al demostrar que el valor de la integral sobre el semicírculo S en la figura 347 tiende a cero cuando $R \to \infty$. A fin de establecer (2) es necesario demostrar lo mismo para la integral de contorno actual, como sigue. Como $s > 0$ y S está en el semiplano superior $y \geqq 0$, se observa que

$$|e^{isz}| = |e^{isx}|\,|e^{-sy}| = e^{-sy} \leqq 1 \qquad (s > 0, \quad y \geqq 0).$$

A partir de lo anterior se obtiene la desigualdad

$$|f(z)e^{isz}| = |f(z)|\ |e^{isz}| \leqq |f(z)| \qquad (s > 0, \quad y \geqq 0).$$

Lo anterior reduce el problema actual al de la sección anterior. Prosiguiendo como antes se observa que la integral sobre S tiende a cero cuando R tiende a infinito. Así se establece (2), que implica a (3).

Ejemplo 1 Una aplicación de (3).

Demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos sx}{k^2 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{k} e^{-ks}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} sx}{k^2 + x^2}\, dx = 0 \qquad (s > 0, \quad k > 0).$$

Solución. De hecho, $e^{isz}/(k^2 + z^2)$ sólo tiene un polo en el semiplano superior; a saber, un polo simple en $z = ik$, y por (4) de la sección 15.1 se tiene que

$$\operatorname*{Res}_{z=ik} \frac{e^{isz}}{k^2 + z^2} = \left[\frac{e^{isz}}{2z}\right]_{z=ik} = \frac{e^{-ks}}{2ik}.$$

Por consiguiente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isx}}{k^2 + x^2}\, dx = 2\pi i \frac{e^{-ks}}{2ik} = \frac{\pi}{k} e^{-ks}.$$

Como $e^{isx} = \cos sx + i \operatorname{sen} sx$, con ésto se llega a los resultados anteriores [ver también (15) en la sección 10.9].

Otros tipos de integrales impropias reales

Otro tipo de integral impropia es una integral definida

(4) $$\int_A^B f(x)\, dx$$

cuyo integrando se vuelve infinito en un punto a del intervalo de integración, es decir

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = \infty.$$

Entonces la integral (4) significa que

(5) $$\int_A^B f(x)\, dx = \lim_{\epsilon\to 0} \int_A^{a-\epsilon} f(x)\, dx + \lim_{\eta\to 0} \int_{a+\eta}^B f(x)\, dx$$

en donde tanto ϵ como η tienden a cero independientemente y a través de valores positivos. Puede suceder que ninguno de estos límites exista si ϵ y $\eta \to 0$ de manera independiente, pero que

(6) $$\lim_{\epsilon\to 0} \left[\int_A^{a-\epsilon} f(x)\, dx + \int_{a+\epsilon}^B f(x)\, dx\right]$$

exista. Lo anterior se denomina **valor principal de Cauchy** de la integral y a menudo se escribe

$$\text{v. pr.} \int_A^B f(x)\, dx.$$

Por ejemplo,

$$\text{v. pr.} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3} = \lim_{\epsilon\to 0} \left[\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{dx}{x^3} + \int_{\epsilon}^{1} \frac{dx}{x^3}\right] = 0;$$

el valor principal existe, aunque la integral en sí no significa nada. La situación completa es bastante semejante a la que se analizó en la segunda parte de la sección 15.3.

Con la intención de evaluar una integral impropia cuyo integrando tiene polos sobre el eje real se usa una trayectoria que evita estas singularidades al describir pequeños semicírculos con centros en los puntos singulares; este método puede ilustrarse con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2 Integrando que tiene un polo sobre el eje real. Integral senoidal.

Demostrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

(Éste es el límite de la integral senoidal Si(x) cuando $x \to \infty$; ver la sección 10.9.)

Solución. (a) No se considera $(\operatorname{sen} z)/z$ porque esta función no se comporta de manera idónea en el infinito. Se considerará e^{iz}/z, que tiene un polo simple en $z = 0$ y se integrará alrededor del contorno de la figura 349. Como e^{iz}/z es analítica en el interior y sobre C, al aplicar el teorema de la integral de Cauchy se obtiene

(7) $$\oint_C \frac{e^{iz}}{z}\, dz = 0.$$

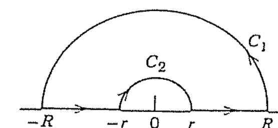


Figura 349. Contorno en el ejemplo 2.

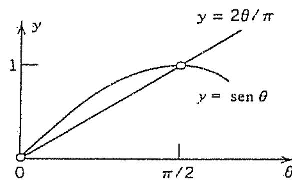


Figura 350. Desigualdad del ejemplo 2.

(b) Se demostrará que el valor de la integral sobre el gran semicírculo C_1 tiende a cero cuando R tiende a infinito. Al hacer $z = Re^{i\theta}$, se tiene $dz = iRe^{i\theta}\,d\theta$, $dz/z = i\,d\theta$ y por consiguiente

$$\left|\int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| = \left|\int_0^{\pi} e^{iz}\,i\,d\theta\right| \leqq \int_0^{\pi} |e^{iz}|\,d\theta \qquad (z = Re^{i\theta}).$$

En el integrando del miembro derecho,

$$|e^{iz}| = |e^{iR(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)}| = |e^{iR\cos\theta}|\,|e^{-R\,\mathrm{sen}\,\theta}| = e^{-R\,\mathrm{sen}\,\theta}.$$

Lo anterior se inserta en la integral y se aplica sen $(\pi - \theta)$ = sen θ a fin de obtener una integral desde 0 hasta $\pi/2$:

$$\int_0^{\pi} |e^{iz}|\,d\theta = \int_0^{\pi} e^{-R\,\mathrm{sen}\,\theta}\,d\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\,\mathrm{sen}\,\theta}\,d\theta.$$

Así, en la figura 350 se observa que sen $\theta \geqq 2\theta/\pi$ si $0 \leqq \theta \leqq \pi/2$. Por tanto, $-$ sen $\theta \leqq -2\theta/\pi$. Con base en este hecho y por integración se obtiene que

$$2\int_0^{\pi/2} e^{-R\,\mathrm{sen}\,\theta}\,d\theta \leqq 2\int_0^{\pi/2} e^{-2R\theta/\pi}\,d\theta = \frac{\pi}{R}(1 - e^{-R}) \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad R \longrightarrow \infty.$$

Por tanto, el valor de la integral sobre C_1 tiende a 0 cuando $R \to \infty$.

(c) Para la integral sobre el pequeño semicírculo C_2 en la figura 349 se tiene

$$\int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int_{C_2} \frac{dz}{z} + \int_{C_2} \frac{e^{iz} - 1}{z}\,dz.$$

La primera integral de la derecha es igual a $-\pi i$. El integrando de la segunda integral es analítico y por tanto está acotado, por ejemplo, es menor que alguna constante M en valor absoluto para todo z sobre C_2 y entre C_2 y el eje x. Así, por la desigualdad ML (sección 13.2), el valor absoluto de esta integral no puede exceder a $M\pi r$. Esta expresión tiende a 0 cuando $r \to 0$. Debido al inciso (b), entonces con base en (7) se obtiene

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \text{v. pr.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \lim_{r\to 0}\int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \text{v. pr.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx - \pi i = 0.$$

Por tanto, el valor principal es igual a πi; su parte real es 0 y su parte imaginaria es

(8) $$\text{v. pr.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\,dx = \pi.$$

(d) Ahora, el integrando en (8) es no singular en $x = 0$. Además, ya que para x positiva la función $1/x$ decrece, el área bajo la curva del integrando entre dos ceros positivos consecutivos decrece de manera monótona; es decir, los valores absolutos de las integrales

$$I_n = \int_{n\pi}^{n\pi+\pi} \frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\,dx \qquad (n = 0, 1, \cdots)$$

constituyen una sucesión decreciente monótona $|I_1|, |I_2|, \cdots$, e I_n tiende a 0 cuando $n \to \infty$. Como el signo de estas integrales es alterno (¿por qué?), con base en la prueba de Leibnitz (que se presenta en el apéndice 3), se concluye que la serie infinita $I_0 + I_1 + \cdots$ converge. Resulta evidente que la suma de la serie es la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\,dx$$

que, por consiguiente, existe. De manera semejante, la integral desde 0 hasta $-\infty$ existe. Así, no es necesario considerar el valor principal en (8), y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\,dx = \pi.$$

En virtud de que el integrando es una función par, se concluye el resultado deseado. ∎

En el inciso (c) del ejemplo 2 se evitó el polo simple al integrar a lo largo de un pequeño semicírculo C_2, y después se hizo que C_2 se redujera a un punto. Este proceso sugiere el siguiente

Teorema 1 Polos simples sobre el eje real

Si $f(z)$ tiene un polo simple en $z = a$ sobre el eje real, entonces (Figura 351)

$$\lim_{r\to 0} \int_{C_2} f(z)\,dz = \pi i \operatorname*{Res}_{z=a} f(z).$$

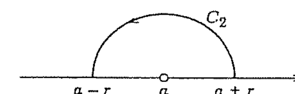


Figura 351. Teorema 1.

Demostración. Por la definición de polo simple (sección 14.8), el integrando $f(z)$ tiene en $z = a$ la serie de Laurent

$$f(z) = \frac{b_1}{z - a} + g(z), \qquad b_1 = \operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$$

en donde $g(z)$ es analítica sobre el semicírculo de integración (figura 351)

$$C_2: \quad z = a + re^{i\theta}, \qquad 0 \leqq \theta \leqq \pi,$$

y para todo z entre C_2 y el eje x. Por integración,

$$\int_{C_2} f(z)\,dz = \int_0^{\pi} \frac{b_1}{re^{i\theta}}\, ire^{i\theta}\,d\theta + \int_{C_2} g(z)\,dz.$$

La primera integral del miembro derecho es igual a $b_1\pi i$. Debido a la desigualdad ML (sección 13.2), la segunda integral no puede ser mayor que $M\pi r$ en valor absoluto, y $M\pi r \to 0$ cuando $r \to 0$. ∎

Es posible combinar este teorema con (7) de la sección 15.3 o con (3) de esta sección. Así, [ver (7), sección 15.3],

$$\text{v. pr.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f(z) + \pi i \sum \operatorname{Res} f(z) \tag{9}$$

(en la primera sumatoria la suma es sobre todos los polos que hay en el semiplano superior, y en la segunda, sobre el eje x), válida para la función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ con grado $q \geqq$ grado $p + 2$, que tiene polos simples sobre el eje x.

Problemas de la sección 15.4

1. Deducir (3) a partir de (2).

Evaluar las siguientes integrales reales.

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+1}\,dx$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{1+x^4}\,dx$
4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+x+1}\,dx$
5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+x+1}\,dx$
6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x^2+x+1}\,dx$
7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx$
8. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2}\,dx$
9. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{1+x^4}\,dx$
10. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 4x}{x^4+5x^2+4}\,dx$
11. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+2x+4}\,dx$
12. $\displaystyle\int_{\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+4)^2}\,dx$
13. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos 2x}{4x^4+13x^2+9}\,dx$
14. Integrar e^{-z^2} alrededor de la frontera del rectángulo con vértices $-a$, a, $a + ib$, $-a + ib$, haciendo $a \to \infty$, y usando

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \text{demostrar que} \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-b^2}.$$

Polos en el eje real. Encontrar el valor principal de Cauchy de las siguientes integrales.

15. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-ix}$
16. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x^2+2)}$
17. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{8-x^3}\,dx$
18. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-2ix}$
19. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x-1)}$
20. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4-1}$
21. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{4}\pi x}{2x-x^2}\,dx$
22. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \frac{1}{2}\pi x}{x^2-1}\,dx$
23. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x-x^5}\,dx$
24. Demostrar que el resultado en el ejemplo 2 sigue siendo el mismo si el semicírculo superior C_2 se sustituye por el semicírculo inferior correspondiente.

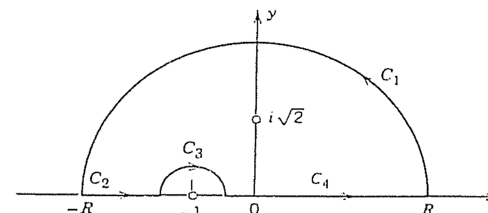


Figura 352. Problema 16.

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 15

1. ¿Qué es una singularidad de una función analítica $f(z)$ y cuál es el residuo de $f(z)$ en un punto singular?
2. ¿Cuál es la idea de la integración por residuos?
3. ¿Por qué en la integración por residuos es importante usar la serie de Laurent que converge en una vecindad del punto singular z_0 (excepto en z_0 mismo)?
4. ¿Puede el lector recordar alguno de los métodos con los cuales se determinan residuos?
5. ¿Es posible que el residuo en un punto singular sea cero? Justificar la respuesta.
6. ¿Es posible que el residuo en un polo simple sea cero?
7. ¿Es posible aplicar integración por residuos en el caso de una función que no sea analítica, sino simplemente continua?
8. ¿Es posible aplicar integración por residuos para evaluar la integral de tan $(1/z)$ alrededor de un contorno cerrado que contiene a $z = 0$ en su interior? Contestar la misma pregunta para $e^{1/z}$.
9. En la integración por residuos se requieren trayectorias *cerradas*. A pesar de ello, ¿cómo sería posible evaluar integrales (reales) sobre intervalos?
10. ¿Cuál es el valor principal de Cauchy de una integral, y por qué ocurre en este capítulo?

Integrar la función dada sobre la trayectoria C dada, usando integración por residuos o uno de los métodos analizados en el capítulo 13, e indique si es posible aplicar la integración por residuos

11. $z^{-4}\cos 2z$, C es cualquier círculo $|z| = constante$, en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.
12. $z^{-4}\,\text{sen}\,2z$, C es el círculo unitario, en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj.
13. $5z/(2z + i)$, C es el círculo $|z - 2i| = 3$, en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.
14. $(z^2 + 1)/(z^2 - 2z)$, C es la elipse $x^2 + 2y^2 = 2$, en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.
15. $(9z - 8)/(z^2 + z - 6)$, C es el círculo $|z - i| = 4$, en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj.
16. $(iz + 1)/(z^2 - iz + 2)$, C es el círculo $|z - 1| = 3$, en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj.
17. $z/\bar{z}^2$, C es el círculo unitario, en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.
18. $z^3 \exp z^{-4}$, C es cualquier trayectoria desde $1 + i$ hasta 1.
19. $z^n e^{1/z}$, C es el círculo unitario, en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. $n = 1, 2, \cdots$
20. $z/\text{sen}^2 z$, C es el círculo $|z| = 0.1$, en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.
21. $\text{Re}\, z$, C: en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj alrededor del triángulo con vértices $0, 1, 1 + i$.
22. $(z \cosh z^2)/(z - 2i)^3$, C es el círculo $|z - 2i| = 1$, en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.
23. $(z - \pi/4)^{-3}\cos 8z$, C es el círculo unitario, en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.
24. $(4z^3 + 7z)/\cos z$, C es el círculo $|z + 1| = 1$, en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.
25. $\cot 8z$, C es el círculo $|z| = 0.3$, en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

Evaluar las siguientes integrales aplicando los métodos presentados en este capítulo.

26. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{k + \cos\theta}\ (k > 1)$
27. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{25 - 24\cos\theta}$
28. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{13 - 5\,\text{sen}\,\theta}$
29. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - \frac{1}{2}\text{sen}\,\theta}$
30. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\text{sen}\,\theta}{3 + \cos\theta}$
31. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\text{sen}\,\theta}{34 - 16\,\text{sen}\,\theta}$
32. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{2} + 2\,\text{sen}\,\theta}{17 - 8\,\text{sen}\,\theta}\,d\theta$
33. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + 4x^4}$
34. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + 4x^2}$
35. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(1 + x^2)^2}\,dx$
36. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^2}$
37. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 5x^2 + 4}\,dx$
38. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 13x^2 + 36}\,dx$
39. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1 + 2x^2}{1 + 4x^4}\,dx$
40. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 10x^2 + 9}$

Resumen del capítulo 15

Integración por el método de residuos

El **residuo** de una función analítica $f(z)$ en un punto $z = z_0$ es el coeficiente de b_1 de la potencia $1/(z - z_0)$ en la serie de Laurent

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots$$

de $f(z)$ que converge cerca de z_0 (excepto en z_0 mismo). Este residuo está dado por la integral (sección 15.1)

$$(1) \qquad b_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz$$

aunque puede obtenerse de varias otras formas, de modo que es posible aplicar (1) para evaluar integrales sobre curvas cerradas. En términos más generales, el **teorema del residuo** (sección 15.2) establece que si $f(z)$ es analítica en un dominio D excepto en un número finito de puntos z_j y C es una trayectoria simple cerrada en D tal que ningún z_j está sobre C y todo el interior de C pertenece a D, entonces

$$(2) \qquad \oint_C f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_j \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)$$

(la sumatoria es sólo sobre aquellos z_j que están *dentro* de C).

Este método de integración es elegante y poderoso. Las fórmulas para el residuo en los **polos** son (m = orden del polo) (sección 15.1))

$$(3) \qquad \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z - z_0)^m f(z)]\right),$$

en donde $m = 1, 2, \cdots$. Por tanto, para un polo simple ($m = 1$),

$$(3^*) \qquad \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z).$$

Otra fórmula para el residuo en un polo simple de $f(z) = p(z)/q(z)$ es

$$(3^{**}) \qquad \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

La integración por residuos implica curvas *cerradas*, aunque el intervalo real de integración $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ se transforma en el círculo unitario al hacer $z = e^{i\theta}$, de modo que por integración por residuos es posible efectuar **integrales reales** de la forma (sección 15.3)

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\, d\theta,$$

en donde F es una función racional de $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$, como por ejemplo $(\operatorname{sen}^2\theta)/(5 - 4\cos\theta)$, etc.

Otro método para efectuar integrales *reales* por residuos es el empleo de un contorno cerrado que consiste de un intervalo $-R \leqq x \leqq R$ en el eje real y un semicírculo $|z| = R$. Con base en el teorema del residuo, si se hace $R \to \infty$, entonces para $f(x) = p(x)/q(x)$ ($f(x)$ racional con $q(x) \neq 0$ y grado $q \geqq$ grado $p + 2$) se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f(z) \qquad \text{(Sección 15.3)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos sx\, dx = -2\pi \sum \operatorname{Im} \operatorname{Res}\,[f(z)e^{isz}]$$

(Sección 15.4)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\operatorname{sen} sx\, dx = 2\pi \sum \operatorname{Re} \operatorname{Res}\,[f(z)e^{isz}]$$

(la sumatoria de todos los residuos en los polos en el semiplano superior). En la sección 15.4 también se extendió este método a integrales reales cuyos integrandos se vuelven infinito en algún punto del intervalo de integración.

Capítulo

16

Mapeo conforme

Si una función compleja $w = f(z)$ está definida en un dominio D del plano z, entonces a cada punto en D le corresponde un punto en el plano w. De esta manera se tiene un *mapeo* (aplicación o transformación) de D sobre el rango de valores de $f(z)$ en el plano w. Este "enfoque geométrico" del análisis complejo ayuda a "visualizar" la naturaleza de una función compleja, al considerar el modo en que la función transforma ciertas curvas y regiones. Este hecho ya se ha observado para funciones especiales en la sección 12.9, que quizá sería conveniente volver a repasar antes de proseguir.

En este capítulo se presenta un método sistemático para analizar los mapeos mediante funciones *analíticas* generales $w = f(z)$. En la sección 16.1 se demuestra que tal mapeo es **conforme**; es decir, que preserva la magnitud y la dirección de los ángulos, excepto en "*puntos críticos*" (puntos en los que la derivada $f'(z)$ es cero).

El mapeo conforme es importante en las matemáticas de ingeniería, ya que constituye un método estándar para resolver problemas con valor en la frontera en la teoría bidimensional del potencial, al transformar una región complicada dada en otra más sencilla (los detalles se presentan en el capítulo 17). Para esta tarea de mapeo, las transformaciones fraccionarias lineales desempeñan un rol fundamental (secciones 16.2 y 16.3), y a menudo es posible usar otras funciones especiales (sección 16.4). En la última sección (sección 16.5) se analizará el concepto de superficie de Riemann.

En el capítulo 17 se presentan aplicaciones de la teoría del potencial.

Prerrequisitos para este capítulo: Capítulo 12.
Secciones que pueden omitirse en un curso más corto: Secciones 16.3 y 16.4.
Bibliografía: Apéndice 1, parte D.
Respuestas a los problemas: Apéndice 2.

16.1 MAPEO CONFORME

Una función con valores complejos

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \qquad (z = x + iy)$$

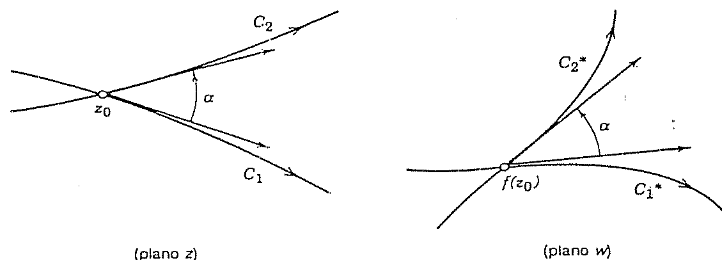


Figura 353. Las curvas C_1 y C_2 y sus imágenes respectivas C_1^* y C_2^* bajo un mapeo conforme.

de una variable compleja z proporciona un **mapeo** (transformación o aplicación) de su dominio de definición en el plano complejo z sobre[1] su rango de valores en el plano complejo w. Algunos ejemplos se muestran en la sección 12.9, que sería conveniente volver a repasar rápidamente antes de continuar. Si $f(z)$ es *analítica*, entonces su propiedad más importante de mapeo es su *conformidad*, que se define como sigue.

El mapeo (1) se denomina **conforme** si preserva la magnitud y la dirección de los ángulos entre curvas orientadas.

En la figura 353 se muestra el significado de lo anterior: Las imágenes C_1^* y C_2^* de dos curvas orientadas forman el mismo **ángulo** α (este es el ángulo α $(0 \leqq \alpha \leqq \pi)$ entre las tangentes orientadas en el punto de intersección) que el formado por las curvas C_1 y C_2 mismas, en magnitud y dirección.

La conformidad afirmada se demostrará para el caso de una función *analítica* $f(z)$, excepto en un **punto crítico**; este es un punto en que la derivada $f'(z)$ es cero. *Ejemplo.* $f(z) = z^2$ tiene el punto crítico $z = 0$, en donde $f'(z) = 2z = 0$ y los ángulos se duplican (ver el ejemplo 2, sección 12.9), de modo que ciertamente el mapeo no es conforme ahí. Los puntos críticos de $f(z) = \cos z$ son $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots$, etc.

Teorema 1 (Mapeo conforme)

El mapeo definido por una función analítica $f(z)$ es conforme excepto en puntos críticos, es decir, en puntos donde la derivada $f'(z)$ es cero.

Demostración. La idea es considerar una curva

$$(1) \qquad C: \quad z(t) = x(t) + iy(t)$$

en el dominio de $f(z)$ y demostrar que el mapeo $w = f(z)$ rota la tangente de C en cualquier punto z_0 de C [con $f'(z) \neq 0$] un ángulo que es independiente de C, de modo que las tangentes de *dos* curvas C_1 y C_2 que pasan por z_0 (figura 353) son rotadas el mismo ángulo, de manera que las imágenes de estas curvas forman el mismo ángulo en tamaño y dirección que las curvas mismas, lo que, por definición, significa conformidad. A continuación se proporcionan los detalles.

[1] La terminología general es como sigue. Un mapeo de un conjunto A hacia un conjunto B se denomina **suprayectivo** o mapeo de A sobre B si todo elemento de B es la imagen de por lo menos un elemento de A. Se denomina **inyectivo** o **uno a uno** si elementos diferentes de A tienen imágenes diferentes en B. Por último, se denomina **biyectivo** si es suprayectivo e inyectivo.

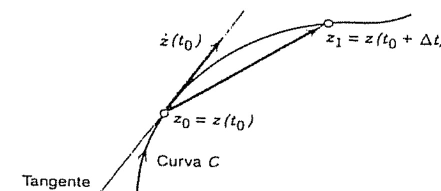


Figura 354. Fórmula (2).

Se supone que C es una **curva suave**; es decir, que $z(t)$ en (1) es diferenciable y que la derivada $\dot{z}(t) = dz/dt$ es continua y diferente de cero en todas partes. Entonces, se afirma que C tiene una tangente única que rota de manera continua. De hecho, por definición,

$$(2) \qquad \dot{z}(t_0) = \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z_1 - z_0}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t} \qquad \text{(Fig. 354).}$$

Así, el numerador $z_1 - z_0$ representa una cuerda de C (ver la figura 354), y $(z_1 - z_0)/\Delta t$ con Δt positivo tiene la misma dirección. Cuando $\Delta t \to 0$, el punto z_1 tiende a z_0 a lo largo de la curva, y

$$(z_1 - z_0)/\Delta t \quad \to \quad \dot{z}(t_0).$$

Por tanto, $\dot{z}(t_0)$ es tangente a C en z_0, y de manera breve se denomina **vector tangente** de C en z_0, y la afirmación está demostrada.

Ahora, cada tangente está *orientada*; el *sentido positivo* sobre ésta y sobre C es la dirección de crecimiento de t en (1), en la que también apunta el vector tangente.

A continuación se analizará la imagen C^* de C bajo $w = f(z)$ (no constante). C^* es una curva representada por

$$w = f[z(t)]$$

debido a que $z(t)$ proporciona C y f lo transforma. A $z_0 = z(t_0)$ en C corresponde el punto $w_0 = w(t_0)$ en C^* y un vector tangente a C^* en este punto es $\dot{w}(t_0)$. Así, por la regla de la cadena, se tiene que

$$(3) \qquad \frac{dw}{dt} = \frac{df}{dz}\frac{dz}{dt}, \quad \text{brevemente,} \quad \dot{w}(t) = f'[z(t)]\dot{z}(t),$$

Sea $f'(z_0) \neq 0$. Entonces $\operatorname{Arg} f'(z_0)$ está definido, y al tomar los argumentos en (3) se obtiene por (9) de la sección 12.2

$$(4) \qquad \arg \dot{w}(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg \dot{z}(t_0).$$

Entonces, el ángulo entre la tangente de C en z_0 y la tangente a C^* en w_0, es decir, el ángulo α que la transformación hace girar la tangente, es

$$\alpha = \arg \dot{w}(t_0) - \arg \dot{z}(t_0) = \arg f'(z_0).$$

Ahora viene la cuestión fundamental: Debido a que el miembro de la derecha es independiente de la elección de C (depende sólo de z_0), entonces este ángulo es independiente de C; es el mismo para todas las curvas que pasan por z_0 y sus imágenes, de modo que dos imágenes C_1^* y C_2^* forman el mismo ángulo que forman las curvas originales C_1 y C_2. Pero por definición esto significa conformidad, con lo que se ha demostrado el teorema. ∎

Ejemplo 1 Conformidad de $w = z^n$ y $w = e^z$.

El mapeo $w = z^n$, $n = 2, 3, \cdots$ es conforme excepto en $z = 0$, en donde $w' = nz^{n-1} = 0$. Para $w = z^2$, esto se muestra en la figura 304 (sección 12.9), en donde las curvas imágenes se cortan formando ángulos rectos, excepto en $z = 0$, en donde los ángulos se duplican bajo la transformación, ya que todo rayo $\arg z = c =$ *constante* se transforma en un rayo $\arg w = 2c$.

El mapeo $w = e^z$ es conforme para toda z, ya que $w' = e^z$ es diferente de cero para toda z.

Razón de amplificación. Por la definición de la derivada se tiene

$$\lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = |f'(z_0)|.$$

Por consiguiente, el mapeo $w' = f(z)$ amplifica (o reduce) las longitudes de rectas cortas aproximadamente en el factor $|f'(z_0)|$. La imagen de una figura pequeña *se conforma* a la figura original en el sentido de que tiene aproximadamente el mismo perfil. Sin embargo, ya que $f'(z)$ varía de punto a punto, una figura *grande* puede poseer una imagen cuyo perfil es bastante distinto al de la figura original.

Más sobre la condición $f'(z) \neq 0$. Con base en (4) de la sección 12.5 y por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se obtiene

$$(5') \qquad |f'(z)|^2 = \left| \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x},$$

es decir,

$$(5) \qquad |f'(z)|^2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}.$$

Este determinante es el conocido **jacobiano** (ver la sección 9.3) de la transformación $w = f(z)$, escrito en forma real

$$u = u(x, y), \qquad v = v(x, y).$$

Por tanto, la condición $f'(z_0) \neq 0$ implica que el jacobiano es diferente de cero en z_0. Esta condición es suficiente para la restricción de que el mapeo $w = f(z)$ en una vecindad suficientemente pequeña N_0 de z_0 sea ***uno a uno*** o inyectivo; es decir, que puntos distintos en N_0 tengan imágenes diferentes; ver el texto dado como referencia [5] en el apéndice 1.

Ejemplo 2 La transformación $w = z^2$ es uno a uno en una vecindad suficientemente pequeña de cualquier punto $z \neq 0$. En una vecindad de $z = 0$ no es uno a uno. El plano z completo se transforma sobre el plano w, de modo que cada punto $w \neq 0$ es la imagen de dos puntos en el plano z. Por ejemplo, los puntos $z = 1$ y $z = -1$ son transformados, ambos, sobre $w = 1$ y, en términos más generales, z_1 y $-z_1$ tienen el mismo punto imagen $w = z_1^2$. ∎

En la sección 12.9 se analizaron algunos mapeos, y en las siguientes secciones se presentan otros de manera más sistemática.

Problemas de la sección 16.1

Encontrar y trazar las imágenes de las curvas dadas bajo el mapeo $w = u + iv = z^2$.

1. $x = 1, 2, 3, 4$
2. $y = 1, 2, 3, 4$
3. $xy = 10$
4. $y = x + 1$
5. $y = x,\ y = -x$
6. $y^2 = x^2 - 1$

Graficar las imágenes de las siguientes regiones bajo el mapeo $w = z^2$.

7. $|z| < \frac{1}{3}$
8. $|z| \geqq 5$
9. $|\arg z| < \pi/3$
10. $\operatorname{Re} z > 0$
11. $\pi/4 < \arg z < \pi/2$
12. $0 < y < 1$

Representar las siguientes curvas en el plano z ($z = x + iy$) en la forma $z = z(t)$ y determinar el vector tangente correspondiente $\dot{z}(t)$. Trazar la curva y algunos de los vectores.

13. $x^2 + y^2 = 16$
14. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$
15. $x^2 + 9y^2 = 9$
16. $x^2 - y^2 = 4$
17. $y = 1/x$
18. $y = 12 - 3x^2$

Determinar los puntos en el plano z en que el mapeo $w = z(t)$ deja de ser conforme, donde $f(z)$ es igual a

19. $z^2 + az + b$
20. $\cos \pi z$
21. $\exp (z^5 - 80z)$
22. $\exp (z^9 - 9z)$
23. $\cosh 2z$
24. $z + z^{-1} \quad (z \neq 0)$
25. ¿Por qué las imágenes de las curvas $|z| =$ *constante* y $\arg z =$ *constante* bajo un mapeo mediante una función analítica se cortan formando ángulos rectos?
26. ¿Por qué las curvas de nivel $u =$ *constante* y $v =$ *constante* de una función analítica $w = u + iv = f(z)$ se cortan formando ángulos rectos en cada punto en que $f'(z) \neq 0$?
27. ¿El mapeo $w = \bar{z} = x - iy$ preserva ángulos en tamaño y en dirección?
28. Comprobar (5) para $f(z) = e^z$.

29. **(Amplificación de ángulos).** Sea la función $f(z)$ analítica en z_0. Suponer que $f'(z_0) = 0, \cdots, f^{(k-1)}(z_0) = 0$, mientras que $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. Entonces el mapeo $w = f(z)$ amplifica ángulos con vértice en z_0 por un factor k. Ilustrar este hecho con ejemplos para $k = 2, 3, 4$.
30. Demostrar la afirmación del problema 29 para k arbitraria. *Sugerencia.* Usar series de Taylor.

16.2 TRANSFORMACIONES FRACCIONARIAS LINEALES

El mapeo conforme posee varias aplicaciones físicas, como se verá en el capítulo 17, aunque para usarlo de manera práctica es necesario conocer qué función elegir, por ejemplo, en la tarea frecuente de transformar un dominio complicado sobre uno sencillo, como un disco. Lo anterior requiere el estudio de las propiedades de las funciones de transformación, que se iniciará con la siguiente clase bastante importante.

Las **transformaciones fraccionarias lineales** (o **transformaciones de Möbius**) son mapeos

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (ad - bc \neq 0) \tag{1}$$

en donde a, b, c, d son números complejos o reales. Estos mapeos tienen importancia práctica en aplicaciones a problemas con valores en la frontera, ya que son necesarios para transformar discos de manera conforme sobre semiplanos o sobre otros discos y recíprocamente, como se verá. También constituyen una motivación adicional para el estudio del plano complejo extendido (sección 14.8), que desempeña un papel fundamental en mecánica de fluidos y en otras aplicaciones.

La condición $ad - bc \neq 0$ en (1) se vuelve evidente si se deriva:

$$w' = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}.$$

Se observa que $ad - bc \neq 0$ implica que w' no es cero en ninguna parte, por lo que el mapeo (1) es conforme en todas partes. Con base en $ad - bc = 0$ es posible obtener el caso sin interés alguno en que w' es idénticamente cero, que se excluirá de una vez por todas. El análisis comenzará con casos especiales de (1).

Ejemplo 1 Traslaciones, rotaciones, expansiones y contracciones.

Existen casos especiales de (1) de la forma

$$w = z + b \qquad (\textit{traslación}) \tag{2}$$

y

$$w = az. \tag{3}$$

que es una *rotación* cuando $|a| = 1$, por ejemplo, $a = e^{i\alpha}$ (α es el ángulo de rotación), una *expansión* (o dilatación) para $a > 1$ real, y una *contracción* para $0 < a < 1$. Éstos también son casos especiales de la **transformación lineal**

$$w = az + b$$

que se obtiene a partir de (1) cuando $c = 0$ (excepto por la notación). ∎

Ejemplo 2 Mapeo de $w = 1/z$. Inversión.

El mapeo

$$w = \frac{1}{z} \tag{4}$$

es un caso especial importante de (1). Se estudia mejor en términos de las formas polares $z = re^{i\theta}$ y $w = Re^{i\phi}$. Así, $w = 1/z$ se vuelve

$$Re^{i\phi} = \frac{1}{re^{i\theta}} \qquad \text{y se obtiene} \qquad R = \frac{1}{r}, \qquad \phi = -\theta$$

al igualar los valores absolutos y los argumentos de ambos miembros. A partir de lo anterior se observa que la imagen $w = 1/z$ de un $z \neq 0$ está sobre el rayo que sale del origen y pasa por $\bar{z}$, a la distancia $1/|z|$. En particular, $z = e^{i\theta}$ sobre la circunferencia unitaria $|z| = 1$ se transforma sobre $w = e^{i\phi} = e^{-i\theta}$ en la circunferencia unitaria $|w| = 1$.

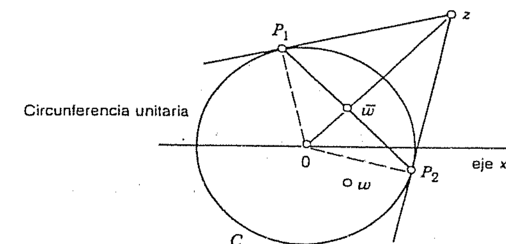


Figura 355. Construcción geométrica de $w = 1/z$. Aquí, $\bar{w}$ es la intersección de $0z$ y P_1P_2, en donde P_1 y P_2 son los puntos de contacto de las tangentes al círculo unitario, que pasan por z.

Se menciona que $w = 1/z$ puede obtenerse geométricamente a partir de z mediante una *inversión en la circunferencia unitaria* (figura 355) seguida de una reflexión en el eje x. Se pide al lector demostrar este hecho aplicando triángulos semejantes.

En la figura 356 se observa que $w = 1/z$ mapea rectas horizontales y verticales sobre circunferencias o sobre rectas. Inclusive lo siguiente es cierto.

$w = 1/z$ mapea toda recta o circunferencia sobre una circunferencia o sobre una recta.

Demostración. Toda recta o circunferencia en el plano z puede escribirse como

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \qquad (A, B, C, D \text{ reales}).$$

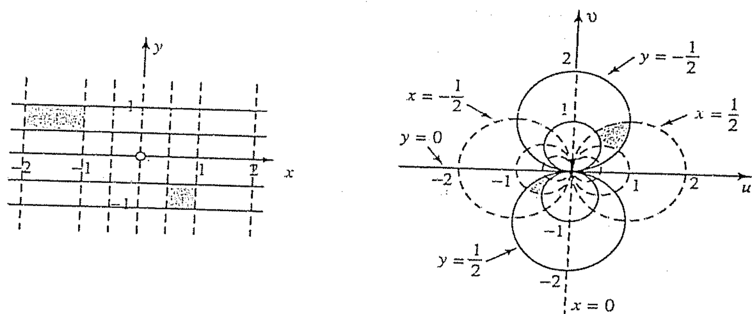


Figura 356. Mapeo $w = 1/z$.

Con $A = 0$ se obtiene una recta y con $A \neq 0$ una circunferencia. En términos de z y $\bar{z}$, esta ecuación se vuelve

$$Az\bar{z} + B\frac{z + \bar{z}}{2} + C\frac{z - \bar{z}}{2i} + D = 0.$$

Así, $w = 1/z$. Al sustituir $z = 1/w$ y multiplicar por $w\bar{w}$ se obtiene la ecuación

$$A + B\frac{\bar{w} + w}{2} + C\frac{\bar{w} - w}{2i} + Dw\bar{w} = 0$$

o bien, en términos de u y v,

$$A + Bu - Cv + D(u^2 + v^2) = 0.$$

Lo anterior representa una circunferencia (si $D \neq 0$) o una recta (si $D = 0$) en el plano w. ∎

La demostración en este ejemplo sugiere el empleo de z y $\bar{z}$ en vez de x y y, un principio general que a menudo es de bastante utilidad en la práctica. De manera sorprendente, *toda* transformación fraccionaria lineal posee la propiedad que acaba de demostrarse:

Teorema 1 (Circunferencias y rectas).

Toda transformación fraccionaria lineal (1) *mapea todas las circunferencias y rectas en el plano z sobre todas las circunferencias y rectas en el plano w.*

Demostración. La demostración es trivial para una traslación o una rotación, bastante evidente para una expansión o contracción uniforme, y verdadera para $w = 1/z$, como acaba de demostrarse. Por tanto, también es cierta para composiciones de estos mapeos especiales. A continuación se presenta la idea crucial de la demostración: La expresión (1) se representa en términos de estos mapeos especiales. Cuando $c = 0$, lo anterior es fácil. Cuando $c \neq 0$, la representación es

$$w = K\frac{1}{cz + d} + \frac{a}{c} \qquad \text{en donde} \qquad K = -\frac{ad - bc}{c}.$$

Lo anterior puede comprobarse al sustituir K, tomar el común denominador y simplificar; así se obtiene (1). Ahora es posible hacer

$$w_1 = cz, \qquad w_2 = w_1 + d, \qquad w_3 = \frac{1}{w_2}, \qquad w_4 = Kw_3,$$

y por la fórmula previa se observa que entonces $w = w_4 + a/c$. Lo anterior significa que (1) es en efecto una composición de tales mapeos especiales, con lo que se ha completado la demostración. ∎

Ejemplo 3 Imagen de una circunferencia.

Aplicar el teorema 1 para encontrar la imagen de la circunferencia unitaria $|z| = 1$ bajo la transformación fraccionaria lineal

$$w(z) = \frac{2iz - 2 - 2i}{(1 - i)z - 1}.$$

Solución. Por el teorema 1, la imagen es una circunferencia (o una recta), determinada así por las imágenes de los tres puntos $1, -1$, e i sobre $|z| = 1$. Estas imágenes se calculan, escribiendo $w(z)$ más simplemente como

$$w(z) = 2i\frac{z - 1 + i}{(1 - i)z - 1}; \quad \text{por tanto} \quad w(1) = 2i\frac{1 - 1 + i}{1 - i - 1} = -2i;$$

de manera semejante, $w(-1) = 2i$, de modo que el centro de la circunferencia debe estar en el eje u. Por ultimo, $w(i) = -2 + 4i$. La bisectriz perpendicular de $2i$ y $-2 + 4i$ corta al eje u en -4 (hacer una figura); este es el centro de la circunferencia. *Respuesta.* $|w + 4| = \sqrt{20}$.

En la siguiente sección se desarrollará un método más poderoso para resolver problemas de este tipo, así como otras aplicaciones del teorema 1. ∎

Plano complejo extendido

El plano complejo extendido se introdujo en la sección 14.8. Se trata del plano complejo junto con el punto ∞(*infinito*). Ahora es posible proporcionarle una motivación inclusive más natural en términos de transformaciones fraccionarias lineales.

Con base en (1) se observa que a cada z para el que $cz + d \neq 0$ corresponde precisamente un número complejo w. Suponer que $c \neq 0$. Entonces a $z = -d/c$, para el que $cz + d = 0$, no corresponde ningún número w. Lo anterior sugiere que como imagen de $z = -d/c$ se haga corresponder a $w = \infty$.

Además, cuando $c = 0$, se debe tener $a \neq 0$ y $d \neq 0$ (¿por qué?), y entonces se hace que $w = \infty$ sea la imagen de $z = \infty$.

Por último, la transformación inversa de (1) se obtiene despejando z de (1); de nuevo se encuentra que se trata de una transformación fraccionaria lineal:

$$(5) \qquad z = \frac{-dw + b}{cw - a}.$$

Cuando $c \neq 0$, entonces $cw - a = 0$ para $w = a/c$, y se deja que a/c sea la imagen de $z = \infty$. Con lo anterior, la transformación fraccionaria lineal (1) es ahora un mapeo

conforme uno a uno del plano extendido z sobre el plano extendido w. También se dice que toda transformación fraccionaria lineal mapea "el plano complejo extendido sobre sí mismo de manera uno a uno y conforme".

El análisis actual sugiere lo siguiente:

Observación general. Si $z = \infty$, entonces el miembro derecho de (1) se vuelve la expresión sin sentido $(a \cdot \infty + b)/(c \cdot \infty + d)$, a la que se asigna el valor $w = a/c$ si $c \neq 0$ y el valor $w = \infty$ si $c = 0$.

Puntos fijos

Los **puntos fijos** de una transformación $w = f(z)$ son puntos mapeados sobre ellos mismos; es decir, que se mantienen fijos bajo la transformación. Por tanto, se obtienen a partir de

$$w = f(z) = z.$$

El **mapeo identidad**

$$w = z$$

tiene todo punto como punto fijo. El mapeo $w = \bar{z}$ tiene una infinidad de puntos fijos; $w = 1/z$ tiene dos; una rotación tiene uno, y una traslación no tiene ninguno en el plano finito. (Encontrarlos en cada caso.) Para (1), la condición de punto fijo $w = z$ es

$$z = \frac{az + b}{cz + d}$$

o bien,

$$cz^2 - (a - d)z - b = 0. \tag{6}$$

Esta es una ecuación cuadrática en z cuyos coeficientes desaparecen si y sólo si la transformación es el mapeo identidad $w = z$ (en este caso, $a = d \neq 0$, $b = c = 0$). Por tanto, se tiene

Teorema 2 (Puntos fijos)

Una transformación fraccionaria lineal, no la identidad, tiene cuando mucho dos puntos fijos. Si se sabe que una transformación fraccionaria lineal tiene tres o más puntos fijos, entonces debe ser el mapeo identidad $w = z$.

A fin de que este análisis sobre transformaciones fraccionarias lineales sea verdaderamente útil desde un punto de vista práctico, se ampliará mediante hechos y ejemplos típicos adicionales en los problemas de esta sección y en la siguiente sección.

Problemas de la sección 16.2

Encontrar los puntos fijos de los siguientes mapeos.

1. $w = (2 + i)z$ **2.** $w = z + 3i$ **3.** $w = z^5$

4. $w = (z - i)^2$ **5.** $w = (z + 1)^2$ **6.** $w = z^5 + 10z^3 + 10z$

7. $w = \dfrac{2iz - 1}{z + 2i}$ **8.** $w = \dfrac{3z + 2}{z - 1}$ **9.** $w = \dfrac{z - 1}{z + 1}$

Encontrar una transformación fraccionaria lineal cuyos (únicos) puntos fijos sean

10. 0, 1 **11.** $-2, 2$ **12.** 0

Encontrar todas las transformaciones fraccionarias lineales cuyos (únicos) puntos fijos sean

13. $0, \infty$ **14.** $-1, 1$ **15.** $-i, i$

16. Encontrar todas las transformaciones fraccionarias lineales sin puntos fijos en el plano finito.

17. Encontrar la inversa de $w = (3z + 4i)/(z + 2i)$ directamente, sin usar (5).

18. Si z_1 es un punto fijo de una transformación fraccionaria lineal $w = f(z)$, es evidente que z_1 también debe ser un punto fijo de la inversa $z = g(w)$. Demostrar este hecho.

19. Demostrar los cálculos para deducir (5) a partir de (1). Comprobar (5) por sustitución en (1).

20. Demostrar el teorema 1 por sustitución de (1) en su forma dada en la ecuación de una circunferencia o de una recta. *Sugerencia.* Demostrar que esta última puede escribirse (con $w = u + iv$; $A = 0$ se obtiene una recta) como

$$Aw\bar{w} + Bw + \bar{B}\bar{w} + C = 0.$$

16.3 TRANSFORMACIONES FRACCIONARIAS LINEALES ESPECIALES

A continuación se aprenderá cómo es posible determinar transformaciones fraccionarias lineales

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (ad - bc \neq 0) \tag{1}$$

para transformar ciertos dominios simples sobre otros, y cómo es posible analizar las propiedades de (1).

Cuatro números dados a, b, c, d determinan un mapeo único (1), aunque es posible eliminar o introducir un factor común sin alterar la transformación dada (1); es decir, (1) depende de *tres* constantes esenciales; a saber, las razones de tres cualesquiera de las cuatro a, b, c, d. Entonces, si se imponen tres condiciones debe obtenerse un mapeo único (1); por ejemplo, las condiciones de que tres puntos distintos en el plano z tengan imágenes especificadas distintas en el plano w. Se demostrará que este es el caso y, lo que es más importante, se obtendrá una fórmula con la que se obtiene el mapeo:

Teorema 1 (Tres puntos y sus imágenes dadas)

Tres puntos distintos dados z_1, z_2, z_3 siempre pueden transformarse sobre tres puntos distintos prescritos w_1, w_2, w_3 mediante una, y sólo una, transformación fraccionaria lineal $w = f(z)$. Este mapeo está definido implícitamente por la ecuación

$$\text{(2)} \qquad \frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}.$$

(Si uno de estos puntos es el punto ∞, entonces el cociente de las dos diferencias que contienen a este punto deben sustituirse por 1.)

Demostración. La ecuación (2) es de la forma $F(w) = G(z)$, en donde F y G denotan funciones fraccionarias lineales de las variables respectivas. A partir de lo anterior es fácil obtener $w = f(z) = F^{-1}[G(z)]$, en donde F^{-1} denota la función inversa de F. Como la inversa de una transformación fraccionaria lineal y la composición de transformaciones fraccionarias lineales son transformaciones fraccionarias lineales [ver (5) en la sección 16.2 y el problema 17 al final de esta sección], entonces $w = f(z)$ es una transformación fraccionaria lineal. Además, a partir de (2) por cálculo directo se observa que

$$F(w_1) = 0, \qquad F(w_2) = 1, \qquad F(w_3) = \infty$$

$$G(z_1) = 0, \qquad G(z_2) = 1, \qquad G(z_3) = \infty$$

[simplemente se hace $w = w_1$ en el miembro izquierdo, luego $w = w_2$, luego $w = w_3$, y después se hace lo mismo en el miembro derecho de (2)]. Por tanto, $w_1 = f(z_1)$, $w_2 = f(z_2)$, $w_3 = f(z_3)$. Así se demuestra la existencia de una transformación fraccionaria lineal $w = f(z)$ que mapea z_1, z_2, z_3 sobre w_1, w_2, w_3, respectivamente.

A continuación se demostrará que $w = f(z)$ está determinada de manera única. Suponer que $w = g(z)$ es otra transformación fraccionaria lineal que mapea z_1, z_2, z_3 sobre w_1, w_2, w_3, respectivamente. Entonces su inversa $g^{-1}(w)$ mapea w_1 sobre z_1, w_2 sobre z_2 y w_3 sobre z_3. En consecuencia, el mapeo compuesto $H = g^{-1}[f(z)]$ transforma cada uno de los puntos z_1, z_2, z_3 sobre sí mismo; es decir, posee tres puntos fijos distintos z_1, z_2, z_3. Por el teorema 2 de la sección precedente se concluye que H es el mapeo identidad y, por consiguiente, $g(z) \equiv f(z)$.

La última proposición del teorema se concluye a partir de la observación general de la sección precedente. Así se concluye la demostración. ∎

Mapeo de semiplanos sobre discos

Esta es una tarea que reviste interés práctico, por ejemplo en problemas de potencial. Sin pérdida de generalidad, el semiplano superior $y \geq 0$ se mapea sobre el disco unitario $|w| \leq 1$. La frontera de este semiplano es el eje x; resulta evidente que debe transformarse sobre la circunferencia unitaria $|w| = 1$. Lo anterior proporciona la idea; para encontrar un mapeo, elegir tres puntos sobre el eje x, prescribir sus imágenes sobre tal

círculo y aplicar el teorema 1. Es necesario asegurarse de que el semiplano $y \geq 0$ se transforma sobre el interior y no sobre el exterior de tal círculo.

Ejemplo 1 Mapeo de un semiplano sobre un disco.

Encontrar la transformación fraccionaria lineal (1) que mapea $z_1 = -1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$ sobre $w_1 = -1$, $w_2 = -i$, $w_3 = 1$, respectivamente.

Solución. Por (2) se obtiene

$$\frac{w - (-1)}{w - 1} \cdot \frac{-i - 1}{-i - (-1)} = \frac{z - (-1)}{z - 1} \cdot \frac{0 - 1}{0 - (-1)},$$

así,

$$\text{(3)} \qquad w = \frac{z - i}{-iz + 1}.$$

A continuación se demostrará que es posible determinar las propiedades específicas de tal mapeo sin necesidad de efectuar cálculos difíciles. Para $z = x$ se tiene $w = (x - i)/(-ix + 1)$; por tanto, $|w| = 1$, de modo que el eje x se transforma sobre el círculo unitario. Como con $z = i$ se obtiene $w = 0$, entonces el semiplano superior se mapea sobre el interior de tal círculo y el semiplano inferior se transforma sobre el exterior. $z = 0, i, \infty$ se van sobre $w = -i, 0, i$, de modo que el eje imaginario positivo se transforma sobre el segmento S: $u = 0$, $-1 \leq v \leq 1$. Las rectas verticales $x = \textit{constante}$ se transforman sobre círculos (por el teorema 1, sección 16.2) que pasan por $w = i$ (la imagen de $z = \infty$) y son perpendiculares a $|w| = 1$ (por conformidad: ver la figura 357). De manera semejante, las rectas horizontales $y = \textit{constante}$ se mapean sobre círculos que pasan por $w = i$ y son perpendiculares a S (por conformidad). En la figura 357 se observan estos círculos para $y \geq 0$, y para $y < 0$ están fuera del círculo unitario que se muestra. ∎

Ejemplo 2 Ocurrencia de ∞

Determinar la transformación fraccionaria lineal que mapea $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = \infty$ sobre $w_1 = -1$, $w_2 = -i$, $w_3 = 1$, respectivamente.

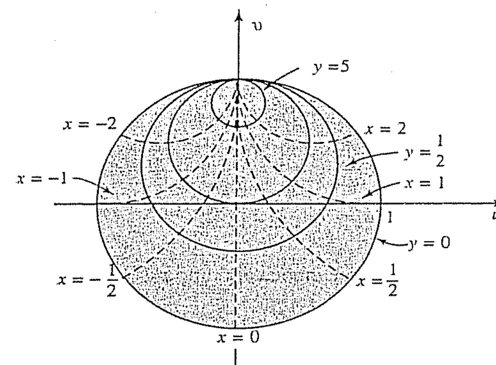


Figura 357. Transformación fraccionaria lineal en el ejemplo 1.

Solución. A partir de (2) se obtiene la transformación deseada

$$(4) \qquad w = \frac{z - i}{z + i}.$$

Este mapeo algunas veces se denomina *transformación de Cayley.*[2] En este caso, con (2) se obtuvo en primer lugar el cociente $(1 - \infty)/(z - \infty)$, que se sustituyó por 1. ∎

Mapeos de discos sobre semiplanos. Esto es bastante semejante al caso que acaba de analizarse.

Ejemplo 3 Mapeo del disco unitario sobre el semiplano derecho.

Encontrar la transformación fraccionaria lineal que mapea $z_1 = -1, z_2 = i, z_3 = 1$ sobre $w_1 = 0, w_2 = i, w_3 = \infty$, respectivamente. (trazar una figura del disco y del semiplano.)

Solución. Una vez que se ha sustituido $(i - \infty)/(w - \infty)$ por 1, a partir de (2) se obtiene

$$w = -\frac{z + 1}{z - 1}.$$ ∎

Mapeos de semiplanos sobre semiplanos

Esta es otra tarea que reviste interés práctico. Como caso típico, es posible mapear el semiplano superior $y \geqq 0$ sobre el semiplano superior $v \geqq 0$. Así, el eje x debe mapearse sobre el eje u.

Ejemplo 4 Mapeo de un semiplano sobre un semiplano.

Encontrar la transformación fraccionaria lineal que mapea los puntos $z_1 = -2, z_2 = 0, z_3 = 2$ sobre los puntos $w_1 = \infty, w_2 = \frac{1}{4}, w_3 = \frac{3}{8}$, respectivamente.

Solución. A partir de (2) se obtiene

$$(5) \qquad w = \frac{z + 1}{2z + 4},$$

como puede comprobar el estudiante. ¿Cuál es la imagen del eje x? ∎

Mapeo de discos sobre discos

Esta es una tercera clase de problemas prácticos. Es posible aplicar el disco unitario en el plano z sobre el disco unitario en el plano w. Con facilidad puede comprobarse que la función

$$(6) \qquad w = \frac{z - z_0}{cz - 1}, \qquad c = \bar{z}_0, \qquad |z_0| < 1$$

es del tipo deseado y que mapea el punto z_0 sobre el centro $w = 0$ (ver el problema 14).

[2] ARTHUR CAYLEY (1821-1895), matemático inglés y profesor en Cambridge, conocido por sus importantes contribuciones al álgebra, a la teoría de matrices y a las ecuaciones diferenciales.

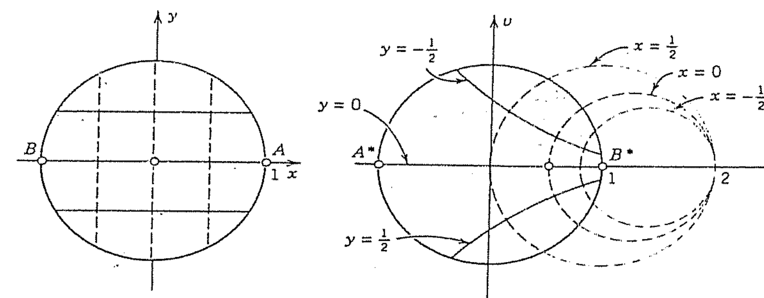


Figura 358. Mapeo en el ejemplo 5.

Ejemplo 5 Mapeo del disco unitario sobre el disco unitario.

Si se requiere que $z_0 = \frac{1}{2}$ se transforme sobre $w = 0$, entonces (6) asume la forma

$$w(z) = \frac{2z - 1}{z - 2}.$$

Los ejes reales se corresponden mutuamente; en particular,

$$w(-1) = 1, \qquad w(0) = \tfrac{1}{2}, \qquad w(1) = -1.$$

Puesto que el mapeo es conforme y se mapean rectas sobre círculos o rectas y $w(\infty) = 2$, las imágenes de las rectas $x =$ *constante* son círculos que pasan por $w = 2$ con centros sobre el eje u; las rectas $y =$ *constante* son mapeadas sobre círculos que son ortogonales a los círculos ya mencionados (ver la figura 358). ∎

Mapeos de regiones angulares sobre el disco unitario. Es posible obtenerlos combinando transformaciones fraccionarias lineales y transformaciones de la forma $w = z^n$, en donde n es un entero mayor que 1.

Ejemplo 6 Mapeo de una región angular sobre el disco unitario.

Mapear la región angular D: $\pi/6 \leqq \arg z \leqq \pi/6$ sobre el disco unitario $|w| \leqq 1$.

Solución. Es posible proceder como sigue. La transformación

$$Z = z^3$$

mapea D sobre la mitad derecha del plano Z. Luego, es posible aplicar una transformación fraccionaria lineal que transforme este semiplano sobre el disco unitario; por ejemplo, la transformación

$$w = i\frac{Z - 1}{Z + 1}.$$

Al insertar $Z = z^3$ en este mapeo se encuentra que

$$w = i\frac{z^3 - 1}{z^3 + 1};$$

esta transformación posee las propiedades requeridas (ver la figura 359). ∎

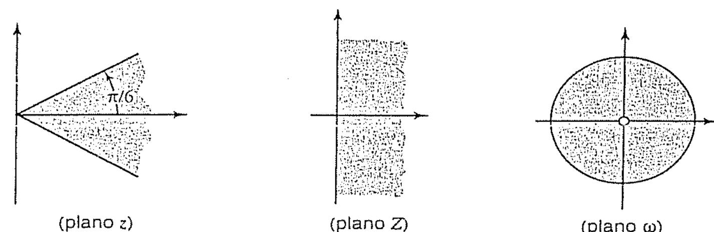


Figura 359. Mapeo en el ejemplo 6.

Aquí termina el análisis sobre transformaciones fraccionarias lineales. En la siguiente sección se abordarán mapeos conformes por medio de otras funciones analíticas (seno, coseno, etc.).

Problemas de la sección 16.3

Encontrar la transformación fraccionaria lineal que mapea

1. 0, 1, 2 sobre 2, 5, 8, respectivamente.
2. 0, $-i$, i sobre -1, 0, ∞, respectivamente.
3. -1, 0, 1 sobre 0, 1, -1, respectivamente.
4. ∞, 0, -1 sobre 1, 0, $(1 + i)/2$, respectivamente.
5. 0, 1, ∞ sobre ∞, 1, 0, respectivamente.
6. 0, $2i$, $-2i$ sobre -1, 0, ∞, respectivamente.
7. $2i$, i, 0 sobre $5i/2$, $2i$, ∞, respectivamente.
8. i, 0, $-i/2$, sobre ∞, i, 0, respectivamente.
9. 1, i, -1 sobre i, -1, $-i$, respectivamente.
10. $-i$, 0, 1 sobre i, $2i$, $1 + i$, respectivamente.
11. Obtener (4) a partir de (2).
12. Encontrar la inversa de (3). Demostrar que (3) mapea las rectas $x = c =$ *constante* sobre círculos con centros en la recta $v = 1$.
13. Obtener (5) a partir de (2). Encontrar la inversa de (5) y graficar las curvas correspondientes a $u =$ *constante* y $v =$ *constante*.
14. Demostrar la proposición que implica a (6).
15. Encontrar una transformación fraccionaria lineal que mapee $|z| \leqq 1$ sobre $w \leqq 1$ de modo que $z = i/2$ se transforme sobre $w = 0$ y trazar las imágenes de las rectas $x =$ *constante* y $y =$ *constante*.
16. Encontrar todas las transformaciones fraccionarias lineales $w(z)$ que mapean el eje x sobre el eje u.
17. Demostrar que la composición de dos transformaciones fraccionarias lineales es una transformación fraccionaria lineal.
18. Encontrar una función analítica que mapee el segundo cuadrante del plano z sobre el interior del círculo unitario en el plano w.
19. Encontrar una función analítica $w = f(z)$ que transforme la región $0 \leqq \arg z \leqq \pi/4$ sobre el disco unitario $|w| \leqq 1$.
20. Encontrar una función analítica $w = f(z)$ que transforme la región $2 \leqq y \leqq x + 1$ sobre el disco unitario $|w| \leqq 1$.

16.4 MAPEOS POR MEDIO DE OTRAS FUNCIONES

Los mapeos mediante z^n, e^z y $\ln z$ se analizaron en la sección 12.9, que sería conveniente volver a estudiar o repasar antes de continuar con el estudio de esta sección.

Función seno

A continuación se considerará el mapeo (sección 12.7)

$$w = u + iv = \operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y \tag{1}$$

en donde

$$u = \operatorname{sen} x \cosh y, \qquad v = \cos x \operatorname{senh} y. \tag{2}$$

Debido a que sen z es periódica con periodo 2π, entonces el mapeo (1) ciertamente no es uno a uno si se considera en el plano z completo. z se restringirá a la franja vertical infinita S definida por $-\frac{1}{2}\pi \leqq x \leqq \frac{1}{2}\pi$ (figura 360). Como $f'(z) = \cos z = 0$ en $z = \pm\frac{1}{2}\pi$, entonces el mapeo no es conforme en estos dos puntos críticos. Las propiedades del mapeo pueden analizarse determinando las imágenes de las rectas verticales $x =$ *constante* y de las rectas horizontales $y =$ *constante*.

Si $x = 0$, entonces por (2) se tiene que $u = 0$ y $v = \operatorname{senh} y$. Así, el eje y ($x = 0$) es mapeado sobre el eje v.

Si $x = \pm\frac{1}{2}\pi$, entonces por (2) se tiene que $u = \pm\cosh y$ y $v = 0$. Como $\cosh y \geqq 1$, las fronteras verticales $x = \pm\frac{1}{2}\pi$ de la franja S son mapeadas de esta manera sobre las porciones $u \leqq -1$ y $u \geqq 1$ del eje u, en donde las imágenes se "doblan" como se indica en la figura 360.

Si $x \neq 0, \pm\frac{1}{2}\pi$, usando $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$, a partir de (2) se obtiene

$$\frac{u^2}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{v^2}{\cos^2 x} = 1. \tag{3}$$

Para x constante diferente de cero, las curvas son hipérbolas. Por tanto, se trata de las imágenes de las rectas verticales $x =$ *constante*.

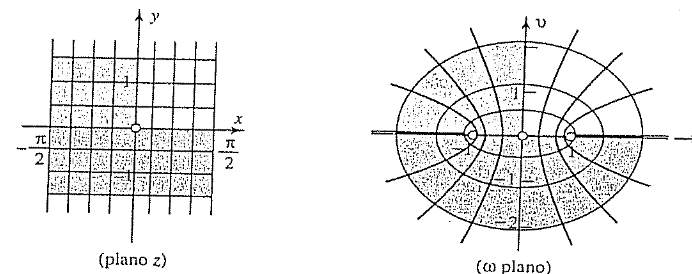


Figura 360. Mapeo $w = u + iv = \operatorname{sen} z$.

Si $y = 0$, entonces senh $y = 0$, por lo que a partir de (2) se tiene que $v = 0$ y $u =$ sen x. Así, el eje x ($y = 0$) es mapeado sobre el segmento $-1 \leqq u \leqq 1$ del eje u.

Si $y \neq 0$, usando $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$, a partir de (2) se obtiene

$$(4) \qquad \frac{u^2}{\cosh^2 y} + \frac{v^2}{\text{senh}^2 y} = 1.$$

Para y constante diferente de cero, las curvas son elipses confocales con focos ± 1. Por tanto, se trata de las imágenes de las rectas horizontales $y =$ *constante*.

Las curvas imágenes de $x =$ *constante* y $y =$ *constante* constituyen una red ortogonal (que se corta formando ángulos rectos), debido a la conformidad, excepto en los puntos críticos $z = \pm\frac{1}{2}\pi$. Ver la figura 360.

Con base en el análisis anterior se observa que $w =$ sen z *mapea la franja vertical infinita* $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$ *sobre el plano* w *cortado a lo largo de los rayos* $u \leqq -1$ y $u \geqq 1$, $v = 0$, *y que este mapeo es uno a uno y conforme.*

Ejemplo 1 Mapeo de un rectángulo sobre un disco elíptico.

Encontrar la imagen del rectángulo de la figura 361 bajo $w =$ sen z.

Solución. La frontera del rectángulo corresponde a $x = \pm\pi/2$ y $y = \pm 1$. Por tanto, las aristas superior e inferior son mapeadas sobre las mitades superior e inferior, respectivamente, de la elipse (4) cuyos semiejes son cosh 1 = 1.54 y senh 1 = 1.18. La arista izquierda es mapeada sobre el segmento $-\cosh 1 \leqq u \leqq -1$ y la arista derecha sobre el segmento $1 \leqq u \leqq \cosh 1$ del eje u. Observe que dos puntos cualesquiera $\pm y_0'$ de estas aristas tienen la misma imagen $-\cosh y_0$ (arista izquierda) o $\cosh y_0$ (arista derecha) sobre el eje u. Ver la figura 361. ∎

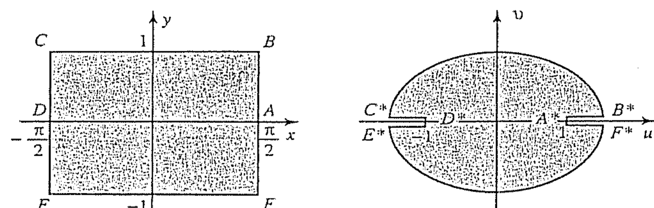


Figura 361. Mapeo mediante $w =$ sen z en el ejemplo 1.

Ejemplo 2 Mapeo de un rectángulo sobre un anillo elíptico.

Encontrar la imagen del rectángulo

$$R: \quad -\pi < x < \pi, \qquad 1/2 < y < 1$$

bajo $w =$ sen z. Ver la figura 362.

Solución. La arista superior del rectángulo es $y = 1$ y es mapeada sobre la elipse (4) con semiejes cosh 1 y senh 1 (figura 362), la arista inferior es mapeada sobre (4) con semiejes cosh 1/2 = 1.13 y senh 1/2 = 0.52. Las aristas laterales $x = \pm\pi$ son mapeadas sobre el segmento del eje v definido por $-\text{senh } 1 \leqq v \leqq -\text{senh } 1/2$, como se concluye directamente por (2) y sen $(\pm\pi) = 0$, cos $(\pm\pi) = -1$. El resultado se muestra en la figura 362. ∎

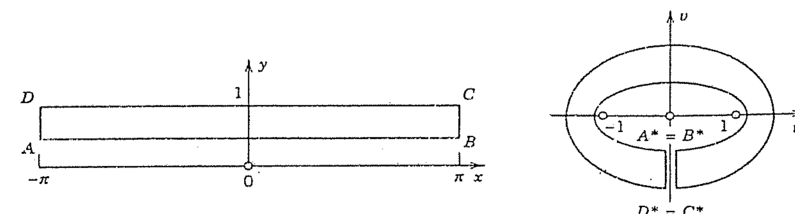


Figura 362. Mapeo mediante $w =$ sen z en el ejemplo 2.

Coseno y tangente

Coseno. El mapeo $w = \cos z$ puede analizarse de manera independiente, pero como

$$(5) \qquad w = \cos z = \text{sen}\,(z + \tfrac{1}{2}\pi),$$

de inmediato se observa que este es el mismo mapeo que sen z precedido por una traslación hacia la derecha a lo largo de $\frac{1}{2}\pi$ unidades.

Tangente. La idea de expresar mapeos como composiciones de mapeos conocidos también es de utilidad cuando $w = \tan z =$ sen $z/\cos z$. Al expresar el seno y el coseno mediante funciones exponenciales (sección 12.7) y multiplicar tanto el numerador como el denominador por e^{iz}, se obtiene

$$w = \tan z = \frac{\text{sen } z}{\cos z} = \frac{(e^{iz} - e^{-iz})/i}{e^{iz} + e^{-iz}} = \frac{(e^{2iz} - 1)/i}{e^{2iz} + 1}.$$

Por tanto, si se hace $Z = e^{2iz}$ y se usa $1/i = -i$, se obtiene

$$(6) \qquad w = \tan z = -iZ^*, \qquad Z^* = \frac{Z - 1}{Z + 1}, \qquad Z = e^{2iz}.$$

Ahora se ve que $w = \tan z$ es una transformación fraccionaria lineal precedida por un mapeo exponencial y seguida por una rotación en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj a través de un ángulo $\frac{1}{2}\pi$.

Ejemplo 3 Mapeo de una franja infinita sobre un disco circular.

Encontrar la imagen de la franja vertical infinita S: $-\pi/4 < x < \pi/4$ (figura 363) bajo la transformación $w = \tan z$.

Solución. Se empieza con el último mapeo en (6). Debido a que $Z = e^{2iz} = e^{-2y+2ix}$, se obtiene

$$|Z| = e^{-2y}, \qquad \text{Arg } Z = 2x$$

[ver (8) en la sección 12.6]. Así, las rectas verticales $x = -\pi/4, 0, \pi/4$ son mapeadas sobre los rayos Arg $Z = -\pi/2, 0, \pi/2$, respectivamente. Por tanto, S es mapeada sobre el semiplano derecho Z. También, se tiene

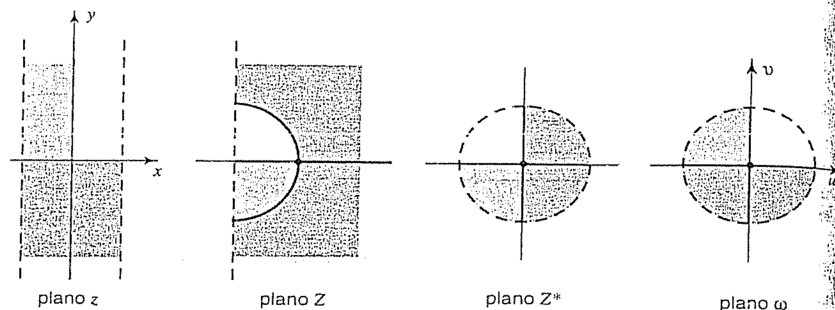


Figura 363. Mapeos en el ejemplo 3.

que $|Z| = e^{-2y} < 1$ si $y > 0$ y $|Z| > 1$ si $y < 0$. Así, la mitad superior de S es mapeada dentro del círculo unitario $|Z| = 1$, y la mitad inferior de S es mapeada fuera de $|Z| = 1$ (figura 363).

A continuación se presenta la transformación fraccionaria lineal en (6), que se denotará por $g(Z)$:

(7) $$Z^* = g(Z) = \frac{Z-1}{Z+1}.$$

Para Z real, $g(Z)$ es real. Por tanto, el eje real Z es mapeado sobre el eje real Z^*. Además, el eje imaginario Z es mapeado sobre la circunferencia unitaria $|Z^*| = 1$ debido a que para $Z = iY$ imaginario puro, a partir de (7) se obtiene

$$|Z^*| = |g(iY)| = \left|\frac{iY-1}{iY+1}\right| = 1.$$

El semiplano derecho Z es mapeado dentro del círculo unitario $|Z^*| = 1$, no fuera de éste, debido a que $Z = 1$ tiene su imagen $g(1) = 0$ dentro de tal círculo. Por último, la circunferencia unitaria $|Z| = 1$ es mapeada sobre el eje imaginario Z^*, porque esta circunferencia es $Z = e^{i\phi}$, de modo que con (7) se obtiene una expresión imaginaria pura; a saber,

$$g(e^{i\phi}) = \frac{e^{i\phi}-1}{e^{i\phi}+1} = \frac{e^{i\phi/2}-e^{-i\phi/2}}{e^{i\phi/2}+e^{-i\phi/2}} = \frac{i\ \text{sen}\,(\phi/2)}{\cos\,(\phi/2)}.$$

A partir del plano Z^* se llega al plano w simplemente por medio de una rotación de $\pi/2$ en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj; ver (6).

Respuesta. $w = \tan z$ mapea S: $-\pi/4 < \text{Re}\ z < \pi/4$ sobre el disco unitario $|w| = 1$, con los cuatro cuadrantes de S mapeados como se indica en la figura 363. Este mapeo es conforme y uno a uno.

Funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas pueden tratarse independientemente de manera semejante o reducirse a las funciones trigonométricas que acaban de analizarse. En particular, el **seno hiperbólico**

(8) $$w = \text{senh}\ z = -i\ \text{sen}\,(iz)$$

define un mapeo que es una rotación $Z = iz$ seguida por el mapeo $Z^* = \text{sen}\ Z$ y por otra rotación $w = -iZ^*$.

De manera semejante, el **coseno hiperbólico**

(9) $$w = \cosh z = \cos\,(iz)$$

define un mapeo que es una rotación $Z = iz$ seguida por la transformación $w = \cos Z$.

Ejemplo 4 Mapeo de una franja semiinfinita sobre un semiplano.

Encontrar la imagen de la franja semiinfinita $x \geqq 0$, $0 \leqq y \leqq \pi$ (figura 364) bajo el mapeo (9).

Solución. Se hace $w = u + iv$. Como $\cosh 0 = 1$, el punto $z = 0$ es mapeado sobre $w = 1$. Para $z = x \geqq 0$ real, $\cosh z$ es real y crece de manera monótona con x creciente, empezando desde 1. Por tanto, el eje x positivo es mapeado sobre la porción $u \geqq 1$ del eje u.

Para $z = iy$ imaginario puro, se tiene $\cosh iy = \cos y$. Así, la frontera izquierda de la franja es mapeada sobre el segmento $1 \geqq u \geqq -1$ del eje u, y el punto $z = \pi i$ corresponde a

$$w = \cosh i\pi = \cos \pi = -1.$$

Sobre la frontera superior de la franja, $y = \pi$, y como $\text{sen}\ \pi = 0$, $\cos \pi = -1$, se concluye que esta parte de la frontera es mapeada sobre la porción $u \leqq -1$ del eje u. Por tanto, la frontera de la franja es mapeada sobre el eje u. No es difícil ver que el interior de la franja es mapeado sobre la mitad superior del plano w, y que el mapeo es uno a uno. ∎

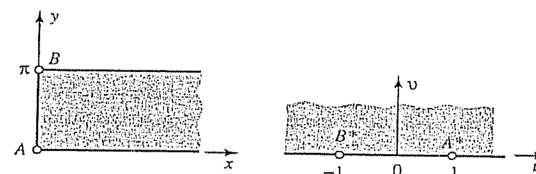


Figura 364. Mapeo en el ejemplo 4.

Problemas de la sección 16.4

Encontrar y dibujar las imágenes de las siguientes regiones bajo el mapeo $w = e^z$.

1. $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq \pi/2$
2. $-1 < x < 1$, $\pi/4 < y < 3\pi/4$
3. $1 < x < 2$, $-\pi/2 < y < \pi/2$
4. $-2 < x < -1$, $0 < y < \pi$

Encontrar y dibujar las imágenes de las siguientes regiones bajo el mapeo $w = \text{sen}\ z$.

5. $0 < x < \pi/2$, $0 < y < 2$
6. $0 < x < \pi/6$, y arbitrario
7. $0 < x < 2\pi$, $1 < y < 2$
8. $-\pi/4 < x < \pi/4$, $0 < y < 3$
9. Encontrar una función analítica que mapee la región acotada por los ejes x y y positivos y la hipérbola $xy = \pi/2$ en el primer cuadrante sobre el semiplano superior. *Sugerencia.* Primero transformar tal región sobre una franja horizontal.
10. Encontrar y dibujar las imágenes de las rectas $x = 0, \pm\pi/6, \pm\pi/3, \pm\pi/2$ bajo el mapeo $w = \text{sen}\ z$.
11. Determinar todos los puntos en los que el mapeo $w = \text{sen}\ z$ no es conforme.
12. Describir la transformación $w = \cosh z$ en términos de la transformación $w = \text{sen}\ z$ y de rotaciones y traslaciones.

13. Encontrar todos los puntos en los que el mapeo $w = \cosh z$ no es conforme.
14. Encontrar las imágenes de las rectas $y = constante$ bajo el mapeo $w = \cos z$.

Encontrar y dibujar las imágenes de las siguientes regiones bajo el mapeo $w = \cos z$.

15. $0 < x < \pi, \quad y < 0$
16. $0 < x < \pi/2, \quad 0 < y < 1$
17. $\pi < x < 2\pi, \quad y < 0$
18. $0 < x < 2\pi, \quad 1/2 < y < 1$
19. Encontrar la imagen de $2 \leq |z| \leq 3$, $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$ bajo el mapeo $w = \text{Ln } z$.
20. Demostrar que $w = \text{Ln}\left[\dfrac{z-1}{z+1}\right]$ mapea el semiplano superior sobre la franja horizontal $0 \leq \text{Im } w \leq \pi$ como se muestra en la figura 365.

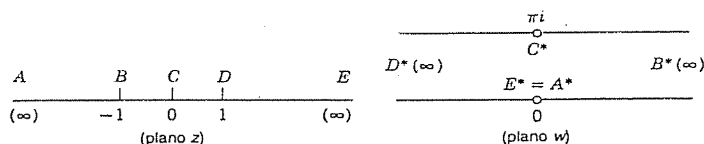


Figura 365. Problema 20.

16.5 SUPERFICIES DE RIEMANN

Las superficies de Riemann son superficies sobre las cuales las relaciones con valores múltiples, como $w = \sqrt{z}$ o $w = \ln z$, se vuelven de un solo valor; es decir, funciones en el sentido usual. Se analizarán aquí porque quizá se comprendan mejor si se explican "geométricamente", en términos de mapeos.

Se empezará considerando el mapeo definido por

$$(1) \qquad w = u + iv = z^2 \qquad \text{(Sección 12.9),}$$

que es conforme, excepto en el punto crítico $z = 0$, donde $w' = 2z = 0$. En $z = 0$ los ángulos se duplican bajo la transformación. La mitad derecha del plano z (incluyendo el eje y positivo) es mapeada sobre el plano w completo, cortado a lo largo de la mitad negativa del eje u; el mapeo es uno a uno. De manera semejante, la mitad izquierda del plano z (incluyendo el eje y negativo) es mapeada sobre todo el plano w cortado, de manera uno a uno.

Resulta evidente que el mapeo del plano z completo no es uno a uno, porque cada punto $w \neq 0$ corresponde precisamente a dos puntos z. De hecho, si z_1 es uno de estos puntos, entonces el otro es $-z_1$. Por ejemplo, $z = i$ y $z = -i$ tienen la misma imagen; a saber, $w = -1$, etc. Por tanto, el plano w es "cubierto dos veces" por la imagen del plano z. Se dice que el plano z completo es mapeado sobre el plano w *doblemente cubierto*. Para una mejor comprensión, es posible imaginar lo siguiente.

Una de las dos copias previamente obtenidas del plano w cortado se coloca sobre la otra, de modo que la hoja superior es la imagen de la mitad derecha del plano z, y la inferior es la imagen de la mitad izquierda de éste; estos semiplanos se denotan por R y L, respectivamente. Cuando se pasa de R a L, el punto imagen correspondiente debe pasar de la hoja superior a la inferior. Es por ésto que las dos hojas se unen de manera cruzada a lo largo del corte; es decir, a lo largo del eje real negativo. (Esta construcción

sólo puede efectuarse en la imaginación, ya que la penetración de las dos hojas de un modelo material sólo puede realizarse de manera imperfecta.) Los dos orígenes se unen entre sí. La configuración así obtenida se denomina **superficie de Riemann**. Sobre ella, todo punto $w \neq 0$ aparece dos veces, en posiciones superpuestas, y el origen aparece exactamente una vez. Ahora, la función $w = z^2$ mapea el plano z completo sobre esta superficie de Riemann de manera uno a uno y el mapeo es conforme, excepto por el "punto de giro" o **punto de bifurcación** en $w = 0$ (figura 366). Se dice que un punto de bifurcación que conecta dos hojas es de *primer orden*. (De una manera más general, se dice que un punto de bifurcación que conecta n hojas es de **orden** $n - 1$.)

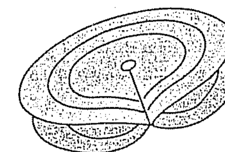


Figura 366. Superficie de Riemann de $\sqrt{z}$.

A continuación se considerará la relación con valor doble

$$(2) \qquad \boxed{w = \sqrt{z}} \qquad \text{(Sección 12.9).}$$

A cada $z \neq 0$ le corresponden dos valores w, uno de los cuales es el valor principal. Si el plano z se reemplaza por la superficie de Riemann de dos hojas que acaba de considerarse, entonces cada número complejo $z \neq 0$ está representado mediante dos puntos de la superficie en posiciones superpuestas. Se hace que uno de estos puntos corresponda al valor principal; por ejemplo, el punto que está en la hoja superior, y el otro, al otro valor. Así, (2) se vuelve uniforme (de un solo valor); es decir, (2) es una función de los puntos de la superficie de Riemann, y a cualquier movimiento continuo de z sobre la superficie le corresponde un movimiento continuo del punto correlativo en el plano w. La función mapea la hoja que corresponde al valor principal sobre la mitad derecha del plano w y a la otra sobre la mitad izquierda de este mismo plano.

Enseguida se considerarán algunos ejemplos adicionales importantes.

Ejemplo 1 Superficie de Riemann de $\sqrt[n]{z}$.

En el caso de la relación

$$(3) \qquad w = \sqrt[n]{z} \qquad (n = 3, 4, \cdots),$$

se requiere una superficie de Riemann que conste de n hojas y que tenga un punto de bifurcación de orden $n - 1$ en $z = 0$. Una de estas hojas corresponde al valor principal y las otras $n - 1$ hojas, a los otros $n - 1$ valores. En la figura 367 se muestra la superficie de Riemann de $w = \sqrt[3]{z}$. ∎

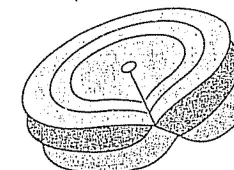


Figura 367. Superficie de Riemann de $\sqrt[3]{z}$.

Ejemplo 2 Superficie de Riemann del logaritmo natural.

Para toda $z \neq 0$, la relación

(4) $$w = \ln z = \operatorname{Ln} z + 2n\pi i \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, z \neq 0)$$

tiene una infinidad de valores. Por tanto, (4) define una función sobre una superficie de Riemann que consta de una infinidad de hojas. La función $w = \operatorname{Ln} z$ corresponde a una de estas hojas. Sobre esta hoja, el argumento θ de z varía en el intervalo $-\pi < \theta \leq \pi$ (ver la sección 12.8). La hoja está cortada a lo largo del eje real negativo y el borde superior de la ranura está unido al borde inferior de la hoja siguiente, lo cual corresponde al intervalo $\pi < \theta \leq 3\pi$, es decir, a la función $w = \operatorname{Ln} z + 2\pi i$. De esta manera, cada valor de n que aparece en (4) corresponde precisamente a una hoja de esta infinidad de hojas. La función $w = \operatorname{Ln} z$ mapea la hoja correspondiente sobre la franja horizontal $-\pi < v \leq \pi$ del plano w. La hoja siguiente es mapeada sobre la franja vecina $\pi < v \leq 3\pi$, etc. Así, la función $w = \ln z$ mapea todas las hojas de la superficie de Riemann correspondiente sobre el plano w completo, siendo uno a uno la correspondencia entre los puntos $z \neq 0$ de la superficie de Riemann y los del plano w.

Ejemplo 3 Mapeo $w = z + z^{-1}$. Hojas aerodinámicas.

Se considerará el mapeo definido por

(5) $$w = z + \frac{1}{z} \qquad (z \neq 0)$$

que es importante en aerodinámica (ver más adelante). Como la derivada de esta función es

$$w' = 1 - \frac{1}{z^2} = \frac{(z+1)(z-1)}{z^2},$$

entonces el mapeo es conforme excepto en los puntos $z = 1$ y $z = -1$; estos puntos corresponden a $w = 2$ y $w = -2$, respectivamente. Por (5) se encuentra

(6) $$z = \frac{w}{2} \pm \sqrt{\frac{w^2}{4} - 1} = \frac{w}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(w+2)(w-2)}.$$

Por tanto, los puntos $w = 2$ y $w = -2$ son puntos de bifurcación de primer orden de $z = z(w)$. A cualquier valor w ($\neq 2, \neq -2$) le corresponden dos valores de z. Por consiguiente, (5) mapea el plano z sobre una superficie de Riemann de dos hojas, en donde éstas están conectadas en forma cruzada desde $w = -2$ hasta $w = 2$ (figura 368), y este mapeo es uno a uno. Se hace $z = re^{i\theta}$ y se determinan las imágenes de las curvas $r = constante$ y $\theta = constante$. Con base en (5) se obtiene

$$w = u + iv = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\operatorname{sen}\theta.$$

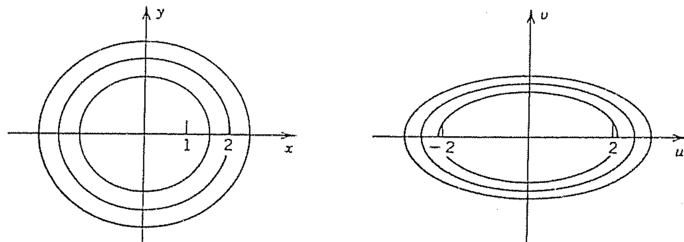


Figura 368. Ejemplo 3.

Al igualar las partes reales e imaginarias de ambos miembros, se tiene

(7) $$u = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta, \qquad v = \left(r - \frac{1}{r}\right)\operatorname{sen}\theta.$$

A partir de lo anterior se encuentra

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1, \quad \text{en donde} \quad a = r + \frac{1}{r}, \qquad b = \left|r - \frac{1}{r}\right|.$$

Por tanto, los círculos $r = constante$ se mapean sobre elipses cuyos ejes principales están en los ejes u y v y miden $2a$ y $2b$, respectivamente. Como $a^2 - b^2 = 4$, independientemente de r, estas elipses son confocales, con focos en $w = -2$ y $w = 2$. El círculo unitario $r = 1$ se mapea sobre el segmento de recta que va desde $w = -2$ hasta $w = 2$. Para todo $r \neq 1$, los dos círculos con radios r y $1/r$ se mapean sobre la misma elipse en el plano w, correspondiente a las dos hojas de la superficie de Riemann. Por tanto, el interior del círculo unitario $|z| = 1$ corresponde a una de estas hojas y el exterior, a la otra.

Además, por (7) se obtiene

(8) $$\frac{u^2}{\cos^2\theta} - \frac{v^2}{\operatorname{sen}^2\theta} = 4.$$

Así, las rectas $\theta = constante$ son mapeadas sobre las hipérbolas que son las trayectorias ortogonales de aquellas elipses. El eje real (es decir, los rayos $\theta = 0$ y $\theta = \pi$) se mapea sobre la parte del eje real que va de $w = 2$, a través de ∞, hasta $w = -2$. El eje y se transforma sobre el eje v. Cualquier otro par de rayos $\theta = \theta_0$ y $\theta = \theta_0 + \pi$ se mapea sobre las dos ramas de la misma hipérbola.

Una región exterior de una de las elipses anteriores no tiene puntos de bifurcación y corresponde ya sea al interior o al exterior del círculo correspondiente del plano z, dependiendo de la hoja de la superficie de Riemann a la que pertenece la región. En particular, el plano w completo corresponde al interior o al exterior del círculo unitario $|z| = 1$, como ya se mencionó.

El mapeo (5) transforma círculos idóneos en superficies aerodinámicas con un borde de salida puntiagudo cuyo ángulo interior es cero; éstas se conocen como **superficies aerodinámicas de Joukowski**.[3] Dado que la superficie aerodinámica que se va a obtener tiene un borde puntiagudo, es obvio que el círculo que va a aplicarse debe pasar por uno de los puntos $z = \pm 1$, en los que el mapeo no es conforme.

En la figura 369, el círculo más grande que pasa por -1 es transformado sobre el contorno de la superficie aerodinámica, y el círculo trazado con línea discontinua (¡que *no* es el círculo unitario!) lo es sobre el arco trazado con línea discontinua en el interior del perfil. En el texto dado como referencia D8 en el apéndice se analizan aún más detalles.

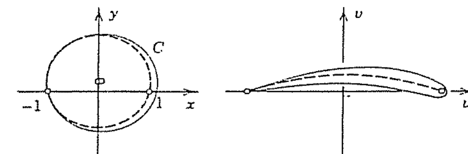


Figura 369. Superficie aerodinámica de Joukowski.

Aquí termina el capítulo 16, aunque en el capítulo 17 se presentan algunas aplicaciones adicionales del mapeo conforme.

[3] NIKOLAI JEGOROVICH JOUKOWSKI (1847-1921), matemático ruso.

Problemas de la sección 16.5

1. Considerar $w = \sqrt{z}$. Encontrar la trayectoria del punto imagen w de un punto z que se mueve dos veces alrededor del círculo unitario, partiendo de la posición inicial $z = 1$.
2. Demostrar que la superficie de Riemann de $w = \sqrt[3]{z}$ consta de tres hojas y tiene un punto de bifurcación de segundo orden en $z = 0$. Encontrar la trayectoria del punto imagen w de un punto z que se mueve tres veces alrededor del círculo unitario, partiendo de la posición inicial $z = 1$.
3. Hacer un esquema, semejante al de la figura 366, de la superficie de Riemann de $w = \sqrt[4]{z}$.
4. Considerar las superficies de Riemann de $w = \sqrt[4]{z}$ y $w = \sqrt[5]{z}$ de manera semejante a como se hizo en el problema 2.
5. Determinar la trayectoria de la imagen de un punto z bajo el mapeo $w = \ln z$, conforme z se mueve varias veces alrededor del círculo unitario en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.
6. Demostrar que la superficie de Riemann de $w = \sqrt{(z-1)(z-2)}$ tiene puntos de bifurcación en $z = 1$ y $z = 2$ y que consta de dos hojas que pueden cortarse a lo largo del segmento de recta que va de 1 a 2, uniéndose en forma cruzada. *Sugerencia.* Introducir las coordenadas polares $z - 1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z - 2 = r_2 e^{i\theta_2}$.
7. Encontrar los puntos de bifurcación y el número de hojas de la superficie de Riemann de $w = \sqrt{z^2 - 1}$.
8. Demostrar que la superficie de Riemann de $w = \sqrt{(1 - z^2)(4 - z^2)}$ tiene cuatro puntos rama y dos hojas que pueden unirse en forma cruzada a lo largo de los segmentos $-2 \leqq x \leqq -1$ y $1 \leqq x \leqq 2$ del eje x.

Determinar la ubicación de los puntos rama y el número de hojas de las superficies de Riemann de las siguientes funciones.

9. $i + \sqrt{z}$
10. $\sqrt{i + z}$
11. $\sqrt[3]{z - a}$
12. $\sqrt{3z + 4}$
13. $\sqrt{z^3 - z}$
14. $3 + 2z - \sqrt{2z}$
15. $\ln (z + 1)$
16. $\sqrt[4]{z - 16}$
17. $3 + \sqrt[3]{2z + i}$
18. $\ln (4z - 3i)$
19. $e^{\sqrt{z}}$
20. $\sqrt{e^z}$

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 16

1. ¿Cómo se definió el ángulo de intersección de dos curvas orientadas, y qué significa el que un mapeo sea conforme?
2. ¿En qué puntos un mapeo $w = f(z)$ mediante una función analítica no es conforme? Proporcionar ejemplos.
3. ¿Qué sucede a los ángulos en z_0 bajo un mapeo $w = f(z)$ si $f'(z_0) = 0, f''(z_0) = 0, f'''(z_0) \neq 0$?
4. ¿Qué es una transformación fraccionaria lineal? ¿Por qué revisten gran interés práctico estos mapeos?
5. ¿Por qué es necesario que los coeficientes de una transformación fraccionaria lineal cumplan $ad - bc \neq 0$?
6. ¿Qué es el plano complejo extendido y por qué aparece en este capítulo?
7. ¿Qué es un punto fijo de un mapeo? Proporcionar ejemplos de mapeos mediante funciones analíticas que no tengan puntos fijos, que tengan exactamente un punto fijo y que tengan una infinidad de puntos fijos.
8. ¿Qué es una superficie de Riemann y cuál es su utilidad?

9. ¿Cuántas hojas tiene la superficie de Riemann de $w = \sqrt[4]{z}$? ¿En dónde está su punto de bifurcación?
10. ¿Por qué reviste interés práctico el mapeo $w = z + 1/z$? ¿Cuántas hojas tiene la superficie de Riemann de la inversa de este mapeo?

Encontrar y trazar las imágenes de las siguientes curvas o regiones bajo el mapeo $w = u + iv = z^2$.

11. $y = -1, 1$
12. $x = -1, 1, 2$
13. $|z| = 2.5, |\arg z| < \pi/8$
14. $xy = -4$
15. $y = x/2$
16. $\text{Im } z > 0$
17. $\pi/8 < \arg z \leqq \pi/4$
18. $0 < y < 2$
19. $\frac{1}{2} < x < 1$

Encontrar y trazar las siguientes curvas o regiones bajo el mapeo $w = 1/z$.

20. $|z| < 1/2, y < 0$
21. $|\arg z| < \pi/8$
22. $x < 0, y > 0, |z| < 1$
23. $|z - 1/2| = 1/2$
24. $y = 1$
25. $x = -1$

Encontrar todos los puntos en los cuales los siguientes mapeos $w = f(z)$ fracasan en cuanto a ser conformes, en donde $f(z)$ es igual a

26. $\cos \pi z^2$
27. $3z^5 + 5z^3$
28. $\cosh 2z$
29. $\exp (z^3 + z)$
30. $z + 1/z \quad (z \neq 0)$
31. $\text{sen } z + \cos z$

Encontrar la transformación fraccionaria lineal que mapea

32. $-1, 1, i$ sobre $-1, 1, -i$, respectivamente.
33. $0, 1, 2$ sobre $0, i, 2i$, respectivamente.
34. $0, i, \infty$ sobre $1, 1 + i, \infty$, respectivamente.
35. $0, \infty, -2$ sobre $0, 1, \infty$, respectivamente.
36. $0, \infty, 1$ sobre $-2i, 0, 1 - i$, respectivamente.
37. $i, 1, \infty$ sobre $5i, 5, \infty$, respectivamente.
38. $-1, 1, 2$ sobre $0, 2, 3/2$, respectivamente.
39. $0, 1, -1$ sobre $0, \infty, 1$, respectivamente.
40. $0, i, 2i$, sobre $0, \infty, 2i$, respectivamente.

Encontrar una función analítica $w = u + iv = f(z)$ que mapee

41. la región $0 < \arg z < \pi/3$ sobre la región $u < 1$.
42. el semiplano $x \geqq 0$ sobre la región $u \geqq 2$ de modo que 0 tenga la imagen $2 + i$.
43. el semiplano derecho sobre el semiplano superior.
44. el interior del círculo unitario $|z| = 1$ sobre el exterior del círculo $|w + 1| = 5$.
45. la franja infinita $0 < y < \pi/3$ sobre el semiplano superior $v > 0$.
46. el semidisco $|z| < 1, x > 0$ sobre el exterior del círculo unitario $|w| = 1$.
47. la región $x > 0, y > 0, xy < k$ sobre la franja $0 < v < 1$.

Encontrar todos los puntos fijos de los mapeos $w = f(z)$, en donde $f(z)$ es igual a

48. $z^4 + z - 81$
49. $(3z + 2)/(z - 1)$
50. $(2iz - 1)/(z + 2i)$

Resumen del capítulo 16

Mapeo conforme

Una función compleja $w = f(z)$ constituye un **mapeo** (aplicación o transformación) de su dominio de definición en el plano complejo z sobre su rango de valores en el plano complejo w. Si $f(z)$ es *analítica*, este mapeo es **conforme**; es decir, preserva ángulos: las imágenes de dos curvas cualesquiera que se cortan forman el mismo ángulo de intersección, tanto en magnitud como en dirección, que el formado por las curvas mismas (sección 16.1).

Para consultar las propiedades de mapeo de e^z, cos z, sen z, etc., ver las secciones 12.9 y 16.4.

Las **transformaciones fraccionarias lineales**, también denominadas *transformaciones de Möbius* (ver las secciones 16.2, 16.3) mapean el

(1) $$w = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (ad - bc \neq 0)$$

plano complejo extendido (sección 16.2) de manera conforme sobre sí mismo. Resuelven los problemas de transformar semiplanos sobre semiplanos o discos, y discos sobre discos o semiplanos. Al prescribir las imágenes de tres puntos se determina (1) de manera única (sección 16.3).

Las **superficies de Riemann** (sección 16.5) constan de varias hojas conectadas en ciertos puntos denominados *puntos* de rama. Sobre éstos, las relaciones con valores múltiples se vuelven de un solo valor; es decir, se convierten en funciones en el sentido usual. *Ejemplos*. Para $w = \sqrt{z}$ se requieren dos hojas, ya que esta relación tiene dos valores. Para $w = \ln z$ se requiere una infinidad de hojas, ya que esta relación tiene una infinidad de valores (ver la sección 12.8).

Capítulo

17

Análisis complejo aplicado a la teoría del potencial

La ecuación de Laplace $\nabla^2\Phi = 0$ es una de las ecuaciones diferenciales parciales más importantes en las matemáticas aplicadas a la ingeniería, debido a que se presenta en relación con los campos gravitacionales (sección 8.9), campos electrostáticos (sección 11.11), conducción del calor de estado estacionario (secciones 9.8 y 11.5), dinámica de fluidos incompresibles, etc. La teoría acerca de las soluciones de esta ecuación se denomina **teoría del potencial**, y las soluciones cuyas segundas derivadas parciales son continuas se denominan **funciones armónicas**.

En el "caso bidimensional", cuando Φ depende sólo de dos coordenadas cartesianas x y y, la ecuación de Laplace se convierte en

$$\nabla^2\Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0.$$

Se sabe que, entonces, sus soluciones están estrechamente relacionadas con las funciones analíticas complejas (ver la sección 12.5).[1] En este capítulo se considerarán con más detalle esta relación y sus consecuencias, y se explicarán en términos de problemas prácticos tomados de la electrostática (secciones 17.1 y 17.2), conducción del calor (Sección 17.3) e hidrodinámica (sección 17.4). En casi todos los casos lo anterior requiere la solución de un **problema con valores en la frontera** denominado **problema de Dirichlet** (o *primer problema con valores en la frontera*) de la ecuación de Laplace; es decir, encontrar la solución de la ecuación de Laplace en un dominio D dado asumiendo valores

[1] En el caso tridimensional no existe una relación tan próxima.
Sobre la notación. Se escribe Φ y después $\Phi + i\Psi$ ya que $u + iv$ será necesario en el mapeo conforme a partir de la sección 17.2.

dados sobre la frontera de D. Tal problema a menudo puede resolverse aplicando el método del mapeo conforme (sección 17.2); es decir, transformando D de manera conforme sobre un dominio más sencillo (disco, semiplano, etc.) para el que la solución sea conocida o sea posible obtenerla a partir de una fórmula, como la fórmula de la integral de Poisson (sección 17.5). Para *problemas mixtos con valores en la frontera* la situación es semejante.

En la última sección (sección 17.6) se demostrará que diversas propiedades generales de las funciones armónicas se concluyen a partir de resultados sobre funciones analíticas.

Prerrequisitos para este capítulo: Capítulos 12, 13 y 16.
Bibliografía: Apéndice 1, parte D.
Respuestas a los problemas: Apéndice 2.

17.1 CAMPOS ELECTROSTÁTICOS

La fuerza eléctrica de atracción o de repulsión entre partículas cargadas es regida por la ley de Coulomb. Esta fuerza es el gradiente de una función Φ, denominada **potencial electrostático**. En todo punto en el que no existan cargas, Φ es una solución de la ecuación de Laplace

$$\nabla^2\Phi = 0.$$

Las superficies Φ = *constante* se denominan **superficies equipotenciales**. En cada punto P, el gradiente de Φ es perpendicular a la superficie Φ = *constante* que pasa por P; es decir, la fuerza eléctrica tiene la dirección perpendicular a la superficie equipotencial. (Ver también las secciones 8.9 y 11.11.)

Los problemas que se abordarán en todo este capítulo son **bidimensionales** (por la razón proporcionada en la introducción del capítulo); es decir, están relacionados con sistemas físicos que existen en el espacio tridimensional (¡por supuesto!), aunque son tales que el potencial Φ es independiente de una de las coordenadas espaciales, de modo que Φ depende sólo de dos coordenadas, que se denominarán x y y. Así, la **ecuación de Laplace** se convierte en

$$(1) \qquad \nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0.$$

Las superficies equipotenciales aparecen ahora como **líneas** (curvas) **equipotenciales** en el plano xy.

Ejemplo 1 Potencial entre placas paralelas.

Encontrar el potencial Φ del campo entre dos placas conductoras paralelas que se extienden hasta el infinito (figura 370) y que se mantienen a los potenciales Φ_1 y Φ_2, respectivamente.

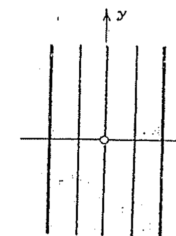


Figura 370. Potencial del ejemplo 1.

Solución. Por la conformación de las placas se infiere que Φ depende sólo de x, y la ecuación de Laplace se convierte en $\Phi'' = 0$. Al integrar dos veces se obtiene $\Phi = ax + b$, en donde las constantes a y b están determinadas por los valores frontera dados de Φ sobre las placas. Por ejemplo, si las placas corresponden a $x = -1$ y $x = 1$, entonces la solución es

$$\Phi(x) = \tfrac{1}{2}(\Phi_2 - \Phi_1)x + \tfrac{1}{2}(\Phi_2 + \Phi_1).$$

Las superficies equipotenciales son planos paralelos. ∎

Ejemplo 2 Potencial entre cilindros coaxiales.

Encontrar el potencial Φ entre dos cilindros conductores coaxiales que se extienden hasta el infinito por ambos extremos (figura 371) y se mantienen a los potenciales Φ_1 y Φ_2, respectivamente.

Solución. Por razones de simetría, en este caso Φ depende sólo de $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, y la ecuación de Laplace se convierte en

$$r\Phi'' + \Phi' = 0 \qquad \text{(ver (4) en la sección 11.9).}$$

Al separar las variables e integrar se obtiene

$$\frac{\Phi''}{\Phi'} = -\frac{1}{r}, \qquad \ln \Phi' = -\ln r + \tilde{a}, \qquad \Phi' = \frac{a}{r}, \qquad \Phi = a \ln r + b$$

y a y b están determinadas por los valores dados de Φ sobre los cilindros. Aunque no existen conductores que se extienden hasta el infinito, el campo de este conductor idealizado es una aproximación del que corresponde a un largo conductor finito, en aquella parte que está alejada de los extremos de los dos cilindros. ∎

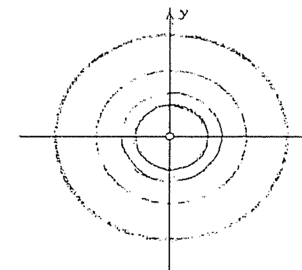


Figura 371. Potencial del ejemplo 2.

Ejemplo 3 Potencial en una región angular.

Encontrar el potencial Φ entre las placas conductoras de la figura 372, que se mantienen a los potenciales Φ_1 (la placa inferior) y Φ_2 y que forman un ángulo α, en donde $0 < \alpha \leq \pi$ (En la figura se tiene que $\alpha = 120° = 2\pi/3$.)

Solución. $\theta = \text{Arg } z$ ($z = x + iy \neq 0$) es constante sobre los rayos $\theta = constante$, y es armónica porque es la parte imaginaria de una función analítica: Ln z (sección 12.8). Por tanto, la solución es

$$\Phi(x, y) = a + b \text{ Arg } z$$

en donde a y b están determinadas a partir de las dos condiciones en la frontera (dados los valores sobre las placas)

$$a + b(-\tfrac{1}{2}\alpha) = \Phi_1, \qquad a + b(\tfrac{1}{2}\alpha) = \Phi_2.$$

Así, $a = (\Phi_2 + \Phi_1)/2$, $b = (\Phi_2 - \Phi_1)/\alpha$. La respuesta es

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}(\Phi_2 + \Phi_1) + \frac{1}{\alpha}(\Phi_2 - \Phi_1)\theta, \qquad \theta = \text{arc tan } \frac{y}{x}.$$

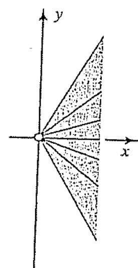


Figura 372. Potencial del ejemplo 3.

Potencial complejo

Sean $\Phi(x, y)$ armónica sobre algún dominio D y $\Psi(x, y)$ una conjugada armónica de Φ en D (sección 12.5). Entonces[2]

$$F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

es una función analítica de $z = x + iy$. Esta función F se denomina **potencial complejo** correspondiente al potencial real Φ. Recuérdese por la sección 12.5 que para Φ dado, una conjugada Ψ es determinada de manera única excepto por una constante real aditiva. Por tanto, es posible decir *el* potencial complejo sin provocar malentendidos.

El empleo de F tiene dos ventajas: una técnica y otra física. Técnicamente y en relación con los métodos del análisis complejo, F es más fácil de manipular que las partes reales o imaginarias. Físicamente, Ψ tiene sentido. Por conformidad, las curvas

[2] Se escribe $F = \Phi + i\Psi$, reservando $f = u + iv$ para el mapeo conforme, según se requiere a partir de la siguiente sección.

$\Psi = constante$ se intersecan con las líneas equipotenciales $\Phi = constante$ formando ángulos rectos [excepto en donde $F'(z) = 0$]. Así, tienen la dirección de la fuerza eléctrica y, por consiguiente, se denominan **líneas de fuerza**. Constituyen las trayectorias de partículas cargadas en movimiento (electrones en un microscopio electrónico, etc.).

Ejemplo 4 Potencial complejo.

En el ejemplo 1, una conjugada es $\Psi = ay$. Se concluye que el potencial complejo es

$$F(z) = az + b = ax + b + iay,$$

y las líneas de fuerza son rectas $y = constante$ paralelas al eje x. ∎

Ejemplo 5 Potencial complejo.

En el ejemplo 2 se tiene $\Phi = a \ln r + b = a \ln |z| + b$. Una conjugada es $\Psi = a \text{ Arg } z$. Por tanto, el potencial complejo es

$$F(z) = a \text{ Ln } z + b$$

y las líneas de fuerza son rectas que pasan por el origen. $F(z)$ también puede interpretarse como el potencial complejo de una recta fuente cuya traza en el plano xy es el origen. ∎

Ejemplo 6 Potencial complejo.

En el ejemplo 3, $F(z)$ se obtuvo al observar que $i \text{ Ln } z = i \ln |z| - \text{Arg } z$, multiplicar ésto por $-b$ y sumar a:

$$F(z) = a - ib \text{ Ln } z = a + b \text{ Arg } z - ib \ln |z|.$$

A partir de lo anterior se observa que las líneas de fuerza son circunferencias concéntricas $|z| = constante$. ∎

Superposición

Por superposición, a menudo es posible obtener potenciales más complicados.

Ejemplo 7 Potencial de un par de rectas fuente.

Determinar el potencial de un par de rectas fuente con cargas opuestas de la misma intensidad en los puntos $z = c$ y $z = -c$ sobre el eje real.

Solución. Por los ejemplos 2 y 5 se concluye que el potencial de cada una de las rectas fuente es

$$\Phi_1 = K \ln |z - c| \qquad \text{y} \qquad \Phi_2 = -K \ln |z + c|,$$

respectivamente. Aquí la constante real K mide la intensidad (cantidad de carga). Estas son las partes reales de los potenciales complejos

$$F_1(z) = K \text{ Ln } (z - c) \qquad \text{y} \qquad F_2(z) = -K \text{ Ln } (z + c).$$

Por tanto, el potencial complejo de la combinación de las dos rectas fuente es

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z) = K[\text{Ln } (z - c) - \text{Ln } (z + c)]. \tag{2}$$

Las líneas equipotenciales son las curvas

$$\Phi = \operatorname{Re} F(z) = K \ln \left|\frac{z-c}{z+c}\right| = const, \qquad \text{por tanto,} \qquad \left|\frac{z-c}{z+c}\right| = const.$$

las cuales son círculos, lo cual puede demostrar el estudiante por cálculo directo. Las líneas de fuerza son

$$\Psi = \operatorname{Im} F(z) = K[\operatorname{Arg}(z-c) - \operatorname{Arg}(z+c)] = const.$$

Lo anterior se escribe en forma abreviada (figura 373) como

$$\Psi = K(\theta_1 - \theta_2) = const.$$

Ahora bien, $\theta_1 - \theta_2$ es el ángulo entre los segmentos de recta que van desde z hasta c y $-c$ (figura 373). Así, las líneas de fuerza son las curvas a lo largo de las cuales el segmento de recta S: $-c \leqq x \leqq c$ aparece bajo un ángulo constante. Estas curvas constituyen la totalidad de arcos circulares sobre S, lo cual es bien conocido por geometría elemental. Así, las líneas de fuerza son círculos. En la figura 374 se muestran unas cuantas, junto con algunas líneas equipotenciales.

Además de la interpretación como el potencial de dos rectas fuente, este potencial también puede concebirse como el potencial entre dos cilindros circulares cuyos ejes son paralelos pero no coinciden, o como el potencial entre dos cilindros iguales pero ajenos, o como el potencial entre un cilindro y una pared plana. Explicar lo anterior usando la figura 374.

La idea de potencial complejo según acaba de explicarse es crucial en cuanto a la estrecha relación que existe entre la teoría del potencial y el análisis complejo, que también ocurre en flujo térmico y en dinámica de fluidos.

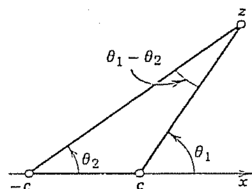


Figura 373. Argumentos del ejemplo 7.

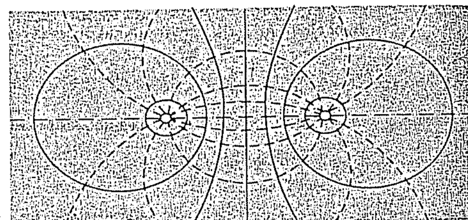


Figura 374. Líneas equipotenciales y líneas de fuerza (con trazo discontinuo) del ejemplo 7.

Problemas de la sección 17.1

1. Encontrar y trazar las superficies equipotenciales entre dos placas paralelas en $x = -3$ y $x = 3$, que se mantienen a los potenciales de 140 y 260 volts, respectivamente.
2. Encontrar el potencial complejo en el problema 1.
3. Encontrar y trazar las superficies equipotenciales entre dos placas paralelas en $y = 0$ y $y = d$, las cuales se mantienen a los potenciales $U_1 = 20$ kV (= 20 000 volts) y $U_2 = 0$, respectivamente.
4. Encontrar el potencial Φ y el potencial complejo F entre las placas $y = x$ y $y = x + k$ que se mantienen a los potenciales de 0 y 100 volts, respectivamente.
5. Encontrar el potencial en el primer cuadrante del plano xy entre los ejes (que tienen potencial de 110 volts) y la hipérbola $xy = 1$ (cuyo potencial es de 60 volts).

Encontrar el potencial Φ entre dos cilindros coaxiales infinitos de radios r_1 y r_2 ($> r_1$) que tiene potenciales U_1 y U_2, respectivamente, en donde

6. $r_1 = 1$, $r_2 = 10$, $U_1 = 100$ volts, $U_2 = 1000$ volts
7. $r_1 = 0.5$, $r_2 = 2$, $U_1 = -110$ volts, $U_2 = 110$ volts
8. $r_1 = 2$, $r_2 = 8$, $U_1 = 1$ kV, $U_2 = 2$ kV
9. $r_1 = 1$, $r_2 = 4$, $U_1 = 200$ volts, $U_2 = 0$
10. $r_1 = 0.1$, $r_2 = 10$, $U_1 = 50$ volts, $U_2 = 150$ volts

Encontrar las líneas equipotenciales del potencial complejo $F(z)$ y mostrar gráficamente tales líneas, en donde

11. $F(z) = (1 + 2i)z$
12. $F(z) = -iz^2$
13. $F(z) = z^2$
14. $F(z) = (1 + i)/z$
15. $F(z) = 1/z$
16. $F(z) = i \operatorname{Ln} z$
17. Encontrar el potencial de dos rectas fuente en $z = a$ y $z = -a$, que tienen la misma carga.
18. Cerca de cada una de las dos rectas fuente en la figura 374, los círculos $\Phi = constante$ son casi concéntricos. ¿Es comprensible físicamente este hecho?
19. Comprobar que las líneas equipotenciales en el ejemplo 7 son círculos.
20. Demostrar que $F(z) = \cos^{-1} z$ puede interpretarse como el potencial complejo de las configuraciones en las figuras 375 y 376.

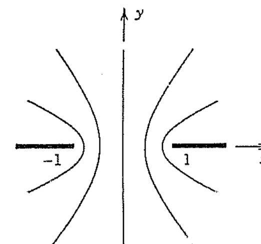


Figura 375. Ranura.

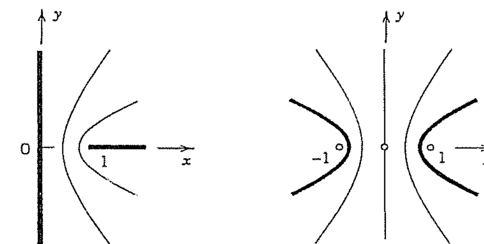


Figura 376. Otras aberturas.

17.2 USO DEL MAPEO CONFORME

Como acaba de verse, los potenciales complejos relacionan estrechamente la teoría del potencial con el análisis complejo. Otra relación estrecha resulta a partir del uso del mapeo conforme en la resolución de **problemas con valores en la frontera** de la ecuación de Laplace; es decir, para encontrar una solución de la ecuación en algún dominio asumiendo valores dados sobre la frontera (**"problema de Dirichlet"**; ver también la sección 11.5). Luego, el mapeo conforme se usa para transformar un dominio complicado dado sobre uno más simple, en donde la solución sea conocida o sea posible encontrarla más fácilmente. Después, esta solución es mapeada de vuelta al dominio dado. A continuación se proporciona la idea. La razón por la cual funciona se debe al hecho de que las funciones armónicas siguen siendo armónicas bajo el mapeo conforme:

Teorema 1 (Funciones armónicas bajo mapeo conforme)

Si $\Phi^*(u, v)$ es armónica en un dominio D^* en el plano w, y si una función analítica $w = u + iv = f(z)$ mapea un dominio D en el plano z de manera conforme sobre D^*, entonces

(1) $$\Phi(x, y) = \Phi^*(u(x, y), v(x, y))$$

es armónica en D.

Demostración. La composición de funciones analíticas es analítica, como se concluye por la regla de la cadena. Así, al tomar una conjugada armónica[3] $\Psi^*(u, v)$ de Φ^* y formar la función analítica $F^*(w) = \Phi^*(u, v) + i\Psi^*(u, v)$, se concluye que $F(z) = F^*(f(z))$ es analítica en D y que su parte real, $\Phi(x, y) = \operatorname{Re} F(z)$ es armónica en D. ∎

Ejemplo 1 Potencial entre cilindros no coaxiales.

Encontrar el potencial entre los cilindros C_1: $|z| = 1$ (conectado a tierra; es decir, cuyo potencial es $U_1 = 0$) y C_2: $|z - 2/5| = 2/5$ (cuyo potencial es $U_2 = 110$ volts).

Solución. El disco unitario $|z| = 1$ se mapea sobre el disco unitario $|w| = 1$ de modo que C_2 se transforma sobre algún cilindro C_2^*: $|w| = r_0$. Por (6) de la sección 16.3, una transformación fraccionaria lineal que mapea el disco unitario sobre el disco unitario es

(2) $$w = \frac{z - b}{bz - 1}$$

en donde $b = z_0$ se ha elegido sin ninguna restricción z_0 no es de ayuda inmediata en este caso porque, en general, los centros de los círculos no se mapean sobre los centros de las imágenes. Sin embargo, ahora se tienen dos constantes libres, b y r_0, por lo que se tendrá éxito al imponer dos condiciones razonables; a saber, que 0 y 4/5 (figura 377) deben mapearse sobre r_0 y $-r_0$, respectivamente. Por (2), así se obtiene

$$r_0 = \frac{-b}{-1}, \qquad -r_0 = \frac{4/5 - b}{4b/5 - 1} = \frac{4/5 - r_0}{4r_0/5 - 1},$$

una ecuación cuadrática en r_0 con soluciones 2 (que no es aceptable porque $r_0 < 1$) y 1/2. Por tanto, la función de transformación (2) con $b = 1/2$ se convierte en

(3) $$w = f(z) = \frac{2z - 1}{z - 2}.$$

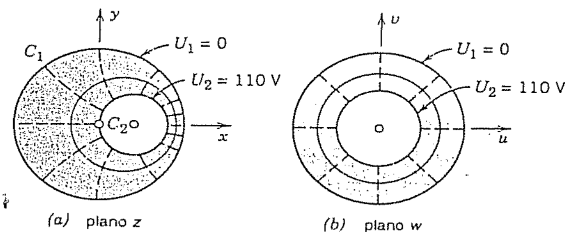


Figura 377 Ejemplo 1.

[3] Ver la sección 12.5. Se menciona sin demostrar que si D^* es simplemente conexo (sección 13.3), entonces existe una conjugada armónica de Φ^*. En el apéndice 4 se proporciona otra demostración sin usar una conjugada armónica.

Por el ejemplo 5 de la sección 17.1, al escribir w por z se obtiene el potencial complejo en el plano w y a partir de éste el potencial real

$$\Phi^*(u, v) = \operatorname{Re} F^*(w) = a \ln |w| + k.$$

a y k se determinan a partir de las condiciones en la frontera. Si $|w| = 1$, entonces $\Phi^* = a \ln 1 + k = 0$; por tanto, $k = 0$. Si $w = 1/2$, entonces $\Phi^* = a \ln (1/2) = 110$; por tanto, $a = 110/\ln (1/2) = -158.7$. Con la sustitución de (3) ahora se obtiene la solución deseada en el dominio dado en el plano z

$$F(z) = F^*(f(z)) = a \operatorname{Ln} \frac{2z - 1}{z - 2}.$$

El potencial real es

$$\Phi(x, y) = \operatorname{Re} F(z) = a \ln \left|\frac{2z - 1}{z - 2}\right|, \qquad a = -158.7.$$

¿Es posible "ver" este resultado? Bien: $\Phi(x, y) = constante$ si y sólo si $(2z - 1)/(z - 2) = constante$; es decir, $|w| = constante$ por (5). Estos círculos corresponden a círculos en el plano z, como se concluye a partir del teorema 1 en la sección 16.2, junto con el hecho de que la inversa de una transformación fraccionaria lineal es fraccionaria lineal [ver (5), sección 16.2]. De manera semejante para los rayos $\arg w = constante$. Por tanto, las líneas equipotenciales $\Phi(x, y) = constante$ son círculos, y las líneas de fuerza son arcos circulares (las líneas discontinuas en la figura 377). Estas dos familias de curvas se cortan ortogonalmente; es decir, formando ángulos rectos, como se muestra en la figura 377. ∎

Ejemplo 2 Potencial entre dos placas semicirculares.

Encontrar el potencial entre dos placas semicirculares P_1 y P_2 en la figura 378*a*, cuyos potenciales son −3000 y 3000 volts, respectivamente. Usar el ejemplo 3 en la sección 17.1 y mapeo conforme.

Solución. Primer paso. El disco unitario de la figura 378*a* se mapea sobre la mitad derecha del plano w (figura 378*b*) usando la transformación fraccionaria lineal del ejemplo 3, sección 16.3:

$$w = f(z) = \frac{1 + z}{1 - z}.$$

La frontera $|z| = 1$ se mapea sobre la frontera $u = 0$ (el eje v), con $z = -1, i, 1$ que se transforma sobre $w = 0, i, \infty$, respectivamente, y $z = -i$ sobre $w = -i$. Por tanto, el semicírculo superior de $|z| = 1$ es mapeado sobre la mitad superior del eje v, y el semicírculo inferior es mapeado sobre la mitad inferior del mismo eje, de modo que las condiciones en la frontera en el plano w son como se indica en la figura 378*b*.

Segundo paso. Se determina el potencial $\Phi^*(u, v)$ en el semiplano derecho del plano w. El ejemplo 3 en la sección 17.1 con $\infty = \pi$, $U_1 = -3000$ y $U_2 = 3000$ [con $\Phi^*(u, v)$ en vez de $\Phi(x, y)$] produce

$$\Phi^*(u, v) = \frac{6000}{\pi}\varphi, \qquad \varphi = \arctan \frac{v}{u}.$$

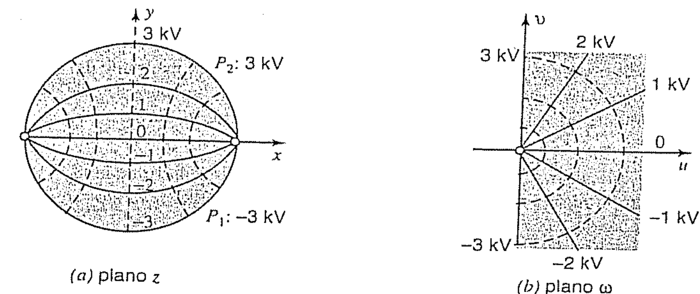


Figura 378 Ejemplo 2.

Sobre la mitad positiva del eje imaginario ($\varphi = \pi/2$), lo anterior es igual a 3000 y sobre la mitad negativa es igual a -3000, como debe ser. Φ^* es la parte real del potencial complejo

$$F^*(w) = -\frac{6000\,i}{\pi}\,\mathrm{Ln}\,w.$$

Tercer paso. La función de transformación se sustituye en F^* a fin de obtener el potencial complejo $F(z)$ de la figura 378*a* en la forma

$$F(z) = F^*(f(z)) = -\frac{6000\,i}{\pi}\,\mathrm{Ln}\,\frac{1+z}{1-z}.$$

La parte real de la expresión anterior es el potencial que se desea determinar:

$$\Phi(x, y) = \mathrm{Re}\,F(z) = \frac{6000}{\pi}\,\mathrm{Im}\,\mathrm{Ln}\,\frac{1+z}{1-z} = \frac{6000}{\pi}\,\mathrm{Arg}\,\frac{1+z}{1-z}.$$

Así como en el ejemplo 1, aquí también se concluye que las líneas equipotenciales $\Phi(x, y) =$ *constante* son arcos circulares porque corresponden a Arg $[(1+z)/(1-z)] =$ *constante*, y por tanto a Arg $w =$ *constante*. También, Arg $w =$ *constante* son rayos que van de 0 a ∞, las imágenes de $z = -1$ y $z = 1$, respectivamente. Así, los extremos de todas las líneas equipotenciales son -1 y 1 (los puntos en que salta el potencial frontera; ver la figura 378*a*). Las líneas de fuerza son arcos circulares, también, y como deben ser ortogonales a las líneas equipotenciales, entonces sus centros pueden obtenerse como las intersecciones de tangentes al círculo unitario con el eje x. (¡Explicar este hecho!).

Comentario fundamental. En esta sección, los ejemplos se plantearon en términos del potencial electrostático. Es de suma importancia darse cuenta que este hecho es fortuito. Pudo ser posible igualmente haber planteado todo en términos de flujo térmico (independiente del tiempo); en este caso se hubiera trabajado con temperaturas, en vez de voltajes, las líneas equipotenciales se hubieran convertido en isotermas (= líneas de temperatura constante), y las líneas de fuerza eléctrica se hubieran convertido en líneas a lo largo de las cuales el calor fluye de temperaturas altas a temperaturas bajas (más sobre ésto se dirá en la siguiente sección). También hubiera sido posible hablar sobre flujo de fluidos; en ese caso las líneas equipotenciales electrostáticas se hubieran convertido en líneas de flujo (más sobre ésto se dirá en la sección 17.4). Lo que se observa de nuevo aquí es el **poder unificador de las matemáticas**: diferentes fenómenos y sistemas de diversas áreas de la física que comparten los mismos tipos de modelo pueden tratarse mediante los mismos métodos matemáticos.

Problemas de la sección 17.2

1. Comprobar el teorema 1 para $\Phi^*(u, v) = u^2 - v^2$ y $w = f(z) = e^z$.
2. Escribir las fórmulas en la segunda demostración del teorema 1 (que se proporciona en el apéndice 4) y realice en detalle todos los pasos.
3. Encontrar el potencial Φ en la región R en el primer cuadrante del plano z, acotada por los ejes (con potencial 0) y la hipérbola $y = 1/x$ (con potencial U_2) de dos formas: (i) directamente y (ii) transformando R sobre una franja infinita idónea.
4. Comprobar los pasos en la obtención de (3) a partir de (2).
5. Aplicar un mapeo conforme idóneo para obtener a partir de la figura 378*b* el potencial Φ en la región angular $-\pi/4 < \mathrm{Arg}\,z < \pi/4$, $\Phi = -3$ kV cuando Arg $z = -\pi/4$ y $\Phi = 3$ kV cuando Arg $z = \pi/4$.
6. Demostrar que en el ejemplo 2 el eje y es mapeado sobre el círculo unitario en el plano w.
7. En $z = \pm 1$ en la figura 378*a*, las tangentes a las líneas equipotenciales mostradas forman ángulos iguales ($\pi/6$). ¿Por qué?

8. En el ejemplo 2, haga $z = Z^2$ ($Z = X + iY$) y demostrar que el potencial resultante $\Phi(X, Y) = \mathrm{Re}\,F(Z^2)$ es el potencial en la porción del disco unitario $|Z| \leqq 1$ en el primer cuadrante que tiene los valores frontera 0 sobre los ejes y 3 sobre $|Z| = 1$.
9. Encontrar la transformación fraccionaria lineal $z = g(Z)$ que mapea $|Z| \leqq 1$ sobre $|z| \leqq 1$ con $Z = i/2$ mapeado sobre $z = 0$. Demostrar que $Z_1 = (3 + 4i)/5$ es mapeado sobre $z = -1$, y $Z_2 = (-3 + 4i)/5$ lo es sobre $z = -1$, de modo que las líneas equipotenciales del ejemplo 2 aparecen en $|Z| \leqq 1$ como se muestra en la figura 379.
10. ¿Por qué las líneas equipotenciales en el problema 9 son círculos?

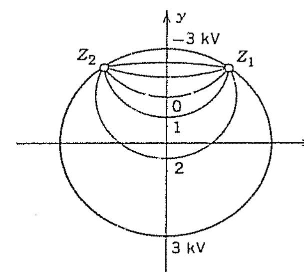


Figura 379. Problema 9.

17.3 PROBLEMAS DE CALOR

La ecuación de Laplace también rige los problemas de flujo térmico que son **estacionarios**; es decir, independientes del tiempo. En efecto, la conducción del calor en un cuerpo de material homogéneo es representada por la **ecuación del calor**

$$T_t = c^2 \nabla^2 T$$

en donde la función T es la temperatura, $T_t = \partial T/\partial t$, t es el tiempo, y c^2 es una constante positiva (que depende del material del cuerpo). Por tanto, si un problema es *estacionario*, de modo que $T_t = 0$, y bidimensional, entonces la ecuación del calor se reduce a la ecuación de Laplace en dos dimensiones

$$\nabla^2 T = T_{xx} + T_{yy} = 0, \qquad (1)$$

de modo que el problema puede tratarse con los métodos actuales.

$T(x, y)$, denominada **potencial del calor**, es la parte real del **potencial complejo del calor**

$$F(z) = T(x, y) + i\Psi(x, y).$$

Las curvas $T(x, y) =$ *constante* se denominan **isotermas** (= líneas de temperatura constante), y las curvas $\Psi(x, y) =$ *constante*, **líneas de flujo térmico**, porque el calor fluye a lo largo de ellas de temperaturas altas a temperaturas bajas.

Se concluye que todos los ejemplos considerados hasta el momento (secciones 17.1 y 17.2) pueden reinterpretarse ahora como problemas de flujo térmico. Las lí-



neas equipotenciales electrostáticas $\Phi(x, y) = constante$ se vuelven ahora isotermas $T(x, y) = constante$, y las líneas de fuerza eléctrica se convierten ahora en líneas de flujo térmico. Desde un punto de vista matemático, los cálculos siguen siendo los mismos. Es posible la aparición de nuevos problemas que impliquen condiciones en la frontera que físicamente no tengan sentido en electrostática, o que quizá carezcan de interés práctico en este texto. Los ejemplos 3 y 4 que se proporcionan a continuación ilustran lo anterior.

Para tener un problema estacionario, la frontera del dominio del flujo térmico debe mantenerse físicamente a temperatura constante, ya sea por calentamiento o por enfriamiento.

Ejemplo 1 Temperatura entre placas paralelas.

Encontrar la temperatura entre las dos placas paralelas $x = 0$ y $x = d$ que se muestran en la figura 380 y cuyas temperaturas son 0 y 100°C, respectivamente.

Solución. Como en la sección 17.1, también se concluye que $T(x, y) = ax + b$. Por las condiciones en la frontera, $b = 0$ y $a = 100/d$. La respuesta es

$$T(x, y) = \frac{100}{d}x \ [°C].$$

El potencial complejo correspondiente es $F(z) = (100/d)z$. El calor fluye horizontalmente, en la dirección x negativa, a lo largo de las líneas $y = constante$. ∎

Ejemplo 2 Distribución de temperatura entre un alambre y un cilindro.

Encontrar el campo de temperatura alrededor de un largo alambre delgado de radio $r_1 = 1$ mm que es calentado eléctricamente hasta $T_1 = 500°F$ y está rodeado por un cilindro circular de radio $r_2 = 100$ mm, que se mantiene a la temperatura $T_2 = 60°F$ mediante enfriamiento por aire. Ver la figura 381.

Solución. Por razones de simetría, T depende sólo de r. Así, como en la sección 17.1 (ejemplo 2), se tiene que

$$T(x, y) = a \ln r + b.$$

Las condiciones en la frontera son

$$T_1 = 500 = a \ln 1 + b, \qquad T_2 = 60 = a \ln 100 + b.$$

Por tanto, $b = 500$ (ya que $\ln 1 = 0$) y $a = (60 - b)/\ln 100 = -95.54$. La respuesta es

$$T(x, y) = 500 - 95.54 \ln r \ [°F].$$

Las isotermas son círculos concéntricos. El calor fluye desde el alambre radialmente hacia fuera, en dirección del cilindro. ∎

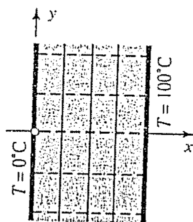


Figura 380. Ejemplo 1.

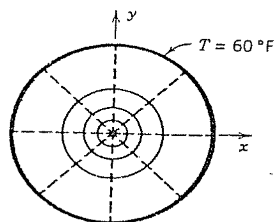


Figura 381. Ejemplo 2.

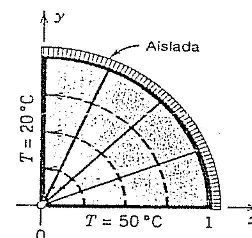


Figura 382. Ejemplo 3.

Ejemplo 3 Un problema mixto con valores en la frontera.

Encontrar la distribución de temperatura en la región de la figura 382 (sección transversal de un cilindro sólido), en donde la porción vertical de la frontera está a 20°C, la porción horizontal está a 50°C y la porción circular está aislada.

Solución. La porción aislada de la frontera debe ser una línea de flujo térmico ya que, debido al aislamiento, el calor no puede cruzar tal curva, por lo que debe fluir a lo largo de ésta. Así, las isotermas deben llegar a esta curva formando ángulos rectos. Como T es constante a lo largo de las isotermas, ésto significa que

$$(2) \qquad \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \qquad \text{a lo largo de una porción aislada de la frontera,}$$

en donde $\partial T/\partial n$ es la **derivada normal** de T; es decir, la derivada direccional (sección 8.9) de T en la dirección normal a la frontera aislada (es decir, la dirección perpendicular a esta frontera). Este problema, en el que T está prescrita sobre una porción de la frontera y $\partial T/\partial n$ lo está sobre la otra porción, se denomina **problema mixto con valores en la frontera**.

En este caso, la dirección normal a la curva circular fronteriza aislada es la dirección radial hacia el origen. Por tanto, (2) se vuelve $\partial T/\partial r = 0$, lo que significa que a lo largo de esta curva la solución no debe depender de r. Entonces, $\operatorname{Arg} z = \theta$ satisface (1), así como esta condición, y es constante (0 y $\pi/2$) sobre las porciones rectas de la frontera. Por tanto, la solución es de la forma

$$T(x, y) = a\theta + b.$$

Las condiciones en la frontera producen $a(\pi/2) + b = 20$ y $a \cdot 0 + b = 50$. Así, se obtiene

$$T(x, y) = 50 - \frac{60}{\pi}\theta, \qquad \theta = \arctan\frac{y}{x}.$$

Las isotermas son porciones de los rayos $\theta = constante$. El calor fluye del eje x al eje y a lo largo de círculos $r = constante$ (con trazo discontinuo en la figura 382). ∎

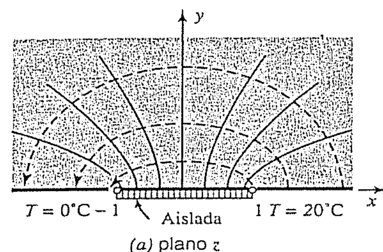
Ejemplo 4 Otro problema de conducción del calor mixto con valores en la frontera.

Encontrar el campo de temperatura en el semiplano superior cuando el eje x está a $T = 0°C$ para $x < -1$, aislado para $-1 < x < 1$ y a $T = 20°C$ para $x > 1$ (figura 383*a*).

Solución. El semiplano de la figura 383*a* se mapea sobre la franja vertical de la figura 383*b*, se encuentra la temperatura $T^*(u, v)$ ahí y se mapea de vuelta a fin de obtener la temperatura $T(x, y)$ en el semiplano. La idea de usar esta franja es sugerida por la figura 360 en la sección 16.4 con los roles de $z = x + iy$ y $w = u + iv$ intercambiados, lo cual muestra que $z = \operatorname{sen} w$ mapea la franja actual sobre el semiplano de la figura 383*a*. Por tanto, la función inversa

$$w = f(z) = \operatorname{sen}^{-1} z$$

mapea ese semiplano sobre la franja en el plano w. Esta es la función de trasformación necesaria según el teorema 1 de la sección 17.2.



(a) plano z

v
T = 0°C
T = 20°C
$-\frac{\pi}{2}$ Aislada $\frac{\pi}{2}$ u
(b) plano ω

Figura 383. Ejemplo 4.

El segmento aislado $-1 < x < 1$ en el eje x es mapeado sobre el segmento $-\pi/2 < u < \pi/2$ en el eje u. El resto del eje x es mapeado sobre las dos porciones frontera verticales $u = -\pi/2$ y $\pi/2$, $v > 0$, de la franja. Con lo anterior se obtienen las condiciones en la frontera transformadas en la figura 383*b* para $T^*(u, v)$, en donde sobre la frontera horizontal aislada se tiene que $\partial T^*/\partial n = \partial T^*/\partial v = 0$ porque v es una coordenada normal a ese segmento.

De manera semejante al ejemplo 1 se obtiene

$$T^*(u, v) = 10 + \frac{20}{\pi} u$$

que satisface todas las condiciones en la frontera. Esta es la parte real del potencial complejo $F^*(w) = 10 + (20/\pi)w$. Por tanto, el potencial complejo en el plano z es

$$F(z) = F^*(f(z)) = 10 + \frac{20}{\pi} \operatorname{sen}^{-1} z.$$

y la solución es $T(x, y) = \operatorname{Re} F(z)$. Las isotermas son $u = constante$ en la franja y las hipérbolas en el plano z, perpendiculares a las cuales el calor fluye a lo largo de las elipses trazadas con línea discontinua desde la porción de 20° hasta la porción más fría de 0° de la frontera, lo cual es un resultado físico bastante razonable. ∎

Los ejemplos anteriores han demostrado la utilidad de los mapeos conformes y de los potenciales complejos. Estos últimos también desempeñan un rol en la siguiente sección, que trata sobre dinámica de fluidos.

Problemas de la sección 17.3

1. Encontrar la temperatura entre dos placas paralelas $y = 0$ y $y = d$ que se mantienen a las temperaturas 0 y 100°C, respectivamente. (i) Proceder directamente, y (ii) aplicar el ejemplo 1 y un mapeo idóneo.
2. Encontrar la temperatura y el potencial complejo en una placa infinita con aristas $y = x - 2$ y $y = x + 2$, que se mantienen a −10°C y 20°C, respectivamente.
3. Encontrar la temperatura en la figura 382 si $T = -20$°C sobre el eje y, $T = 100$°C sobre el eje x, y la porción circular de la frontera está aislada como antes.
4. Encontrar la temperatura T en el sector $0 \leq \operatorname{Arg} z \leq \pi/3$, $|z| \leq 1$, si $T = 20$°C sobre el eje x, $T = 50$°C sobre $y = \sqrt{3x}$, y la porción curva está aislada.
5. Encontrar la temperatura y el potencial complejo en el primer cuadrante del plano z cuando el eje y se mantiene a 100°C, el segmento $0 < x < 1$ del eje x está aislado, y la porción $x > 1$ del eje x se mantiene a 200°C. *Sugerencia.* Usar el ejemplo 4.

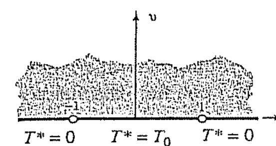


Figura 384. Problema 7.

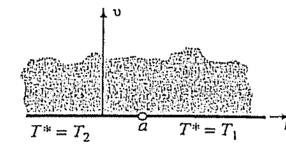


Figura 385. Problema 9.

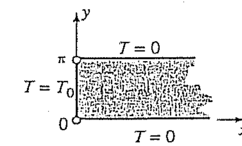


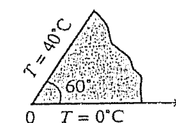
Figura 386. Problema 13.

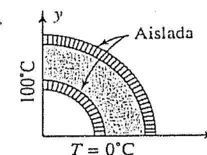
6. Interpretar el problema 9 de los problemas de la sección 17.2 como un problema de flujo térmico (con temperaturas en la frontera, por ejemplo, de 20°C y 300°C). ¿A lo largo de qué curvas fluye el calor?
7. Encontrar la temperatura en el semiplano superior de la figura 384 que satisface las condiciones en la frontera dadas.
8. Encontrar el potencial complejo en el problema 7.
9. Encontrar la temperatura T^* en el semiplano superior sujeto a las condiciones en la frontera que se muestran en la figura 385.
10. Encontrar el potencial complejo en el problema 9.
11. Por superposición, a partir del problema 7 obtener el resultado del problema 9.
12. ¿Qué temperatura se obtiene en el primer cuadrante del plano z a partir del problema 7 mediante el mapeo $w = a + z^2$, y cuáles son las condiciones en la frontera transformadas?
13. Usar el problema 9 y el mapeo $w = \cosh z$ (ver el ejemplo 4 en la sección 16.4), para demostrar que la temperatura en la franja infinita de la figura 386 es

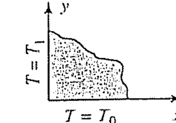
$$T(x, y) = \frac{T_0}{\pi} \operatorname{Arg} \frac{\cosh z - 1}{\cosh z + 1} = \frac{2T_0}{\pi} \operatorname{Arg} \left(\tanh \frac{z}{2}\right).$$

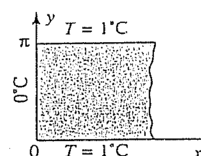
14. Por cálculo directo demostrar que en el problema 13 $(\operatorname{Im} \tanh 1/2z)/(\operatorname{Re} \tanh 1/2z) = (\operatorname{sen} y)/(\operatorname{senh} x)$ y que $T(x, y) = (2T_0/\pi) \arctan [(\operatorname{sen} y)/(\operatorname{senh} x)]$.

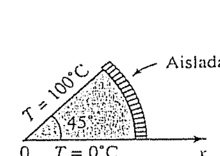
Encontrar la temperatura $T(x, y)$ en la delgada placa metálica dada, cuyas caras están aisladas y cuyas aristas se mantienen a las temperaturas que se muestran en la figura.

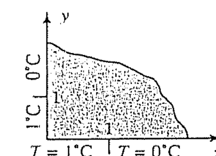
15.


16.


17.


18.


19.


20.


17.4 FLUJO BIDIMENSIONAL DE FLUIDOS

La ecuación de Laplace también desempeña un papel fundamental en hidrodinámica en el flujo estacionario de un fluido no viscoso bajo condiciones físicas que serán abordadas después en esta sección. A fin de mantener el contacto con el análisis complejo el problema será ***bidimensional***, de modo que el vector velocidad V mediante el cual es posible obtener el movimiento al fluido dependa sólo de dos variables espaciales x y y y el movimiento sea el mismo en todos los planos paralelos al plano xy.

Así, para V es posible usar una función vectorial compleja

(1) $$V = V_1 + iV_2$$

con la que se obtienen la magnitud y la dirección de la velocidad en cada punto $z = x + iy$. Aquí, V_1 y V_2 son las componentes de la velocidad en las direcciones x y y y V es tangencial a la trayectoria de las partículas en movimiento. V se denomina **línea de corriente** del movimiento (figura 387).

A continuación se demostrará que en condiciones idóneas (que se explicarán en detalle a continuación de los ejemplos), para un flujo dado existe una función analítica

(2) $$\boxed{F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y),}$$

denominada **potencial complejo** del flujo, de modo que las líneas de corriente están definidas por $\Psi(x, y) =$ *constante*, y la velocidad está dada por

(3) $$\boxed{V = V_1 + iV_2 = \overline{F'(z)}}$$

en donde la barra denota el conjugado complejo. Ψ se denomina **función de corriente**. La función Φ se denomina **potencial de velocidad**.[4] Las curvas $\Phi(x, y) =$ *constante* se denominan **líneas equipotenciales**. V es el **gradiente** de Φ y, por definición, ésto significa que

(4) $$V_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad V_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

En efecto, por (4) de la sección 12.5 y por la segunda ecuación de Cauchy–Riemann, con $f = F$, $u = \Phi$, $v = \Psi$ se obtiene

$$\overline{F'(z)} = \Phi_x - i\Psi_x = \Phi_x + i\Phi_y = V_1 + iV_2 = V.$$

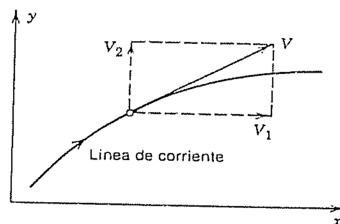


Figura 387. Velocidad.

[4] Algunos autores usan $-\Phi$ (en vez de Φ) para denotar el potencial de velocidad.

Además, como $F(z)$ es analítica, entonces Φ y Ψ satisfacen la ecuación de Laplace

(5) $$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0, \qquad \nabla^2\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = 0.$$

Mientras que en electrostática las fronteras (placas conductoras) son líneas equipotenciales, en flujo de fluidos una frontera a través de la cual el fluido no puede circular debe ser una línea de corriente. Por tanto, en flujo de fluidos la función de corriente es de especial importancia.

Antes de analizar las condiciones para la validez de las proposiciones que implican las expresiones (2) a (5), a continuación se considerarán dos tipos de flujo que revisten un interés especial, de modo que primero se verá qué sucede desde un punto de vista práctico. En los problemas de esta sección se presentan otros tipos de flujo.

Ejemplo 1 Flujo siguiendo una esquina.

El potencial complejo

$$F(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

describe un flujo cuyas líneas equipotenciales son las hipérbolas

$$\Phi = x^2 - y^2 = const$$

y cuyas líneas de corriente son las hipérbolas

$$\Psi = 2xy = const.$$

Por (3) se obtiene en el vector velocidad

$$V = 2\bar{z} = 2(x - iy), \qquad \text{es decir,} \qquad V_1 = 2x, \qquad V_2 = -2y.$$

La rapidez (magnitud de la velocidad) es

$$|V| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

El flujo puede interpretarse como el que se lleva a efecto en un canal acotado por los ejes coordenados positivos y una hipérbola, por ejemplo, $xy = 1$ (figura 388). Se observa que la rapidez a lo largo de una línea de corriente S tiene un mínimo en el punto P, en donde la sección transversal del canal es grande. ∎

Ejemplo 2 Flujo alrededor de un cilindro.

Considerar el potencial complejo

$$F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y) = z + \frac{1}{z}.$$

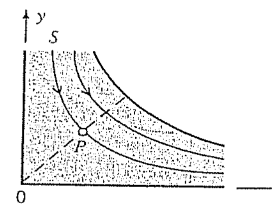


Figura 388. Flujo siguiendo una esquina (ejemplo 1).

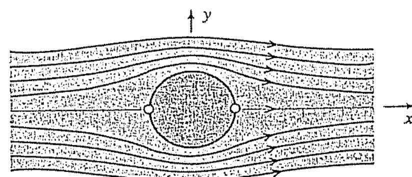


Figura 389. Flujo alrededor de un cilindro (ejemplo 2).

Usando la forma polar $z = re^{i\theta}$, se obtiene

$$F(z) = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\operatorname{sen}\theta.$$

Por tanto, las líneas de corriente son

$$\Psi(x, y) = \left(r - \frac{1}{r}\right)\operatorname{sen}\theta = const$$

En particular, con $\Psi(x, y) = 0$ se obtiene $r - 1/r = 0$ o $\operatorname{sen}\theta = 0$. Por tanto, esta línea de corriente consta del círculo unitario (con $r = 1/r$ se obtiene $r = 1$) y el eje x ($\theta = 0$ y $\theta = \pi$). Para $|z|$ grande, el término $1/z$ en $F(z)$ es pequeño en valor absoluto, de modo que para estos z el flujo es casi uniforme y paralelo al eje x. Así, lo anterior puede interpretarse como un flujo alrededor de un gran cilindro circular de radio unitario. El flujo tiene dos **puntos de estancamiento** (es decir, puntos en los que la velocidad $V = 0$), en $z = \pm 1$. Este hecho se concluye a partir de

$$F'(z) = 1 - \frac{1}{z^2}$$

y de (3). Ver la figura 389.

Hipótesis y teoría subyacente para las expresiones (2) a (5)

Si el dominio del flujo es simplemente conexo y el flujo es irrotacional e incompresible, entonces se cumplen las proposiciones que implican a las expresiones (2) *a* (5). *En particular, entonces el flujo tiene un potencial complejo* $F(z)$, *que es una función analítica.* (A continuación se explican los términos.)

Lo anterior se demostrará durante el transcurso del análisis de los conceptos básicos relacionados con el flujo de fluidos. Considerar cualquier curva suave C en el plano z, dada por $z(s) = x(s) + iy(s)$, en donde s es la longitud de arco de C. Sea la variable real V_t la componente de la velocidad V que es tangente a C (figura 390). Entonces el valor de la integral de línea real

(6) $$\int_C V_t \, ds$$

Figura 390. Componente tangencial de la velocidad con respecto a una curva C.

tomada a lo largo de C en el sentido de los valores crecientes de s se denomina **circulación** del fluido a lo largo de C. Si la circulación se divide entre la longitud de C, entonces se obtiene la velocidad media[5] del flujo a lo largo de la curva C. Ahora bien,

$$V_t = |V| \cos\alpha \qquad \text{(Figura 390)}$$

Por tanto, V_t es el producto escalar (sección 8.2) de V y el vector tangente dz/ds de C (ver la sección 16.1); así, en (6) se tiene que

$$V_t \, ds = \left(V_1 \frac{dx}{ds} + V_2 \frac{dy}{ds}\right) ds = V_1 \, dx + V_2 \, dy.$$

La circulación (6) a lo largo de C se vuelve ahora

(7) $$\int_C V_t \, ds = \int_C (V_1 \, dx + V_2 \, dy).$$

Como idea siguiente, sea C una curva *cerrada*; a saber, la frontera de un dominio D simplemente conexo, y suponer que V tiene derivadas parciales continuas en un dominio que contiene a D y a C. Entonces es posible aplicar el teorema de Green (sección 9.4) para representar la circulación alrededor de C por medio de una integral doble,

(8) $$\oint_C (V_1 \, dx + V_2 \, dy) = \iint_D \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right) dx \, dy.$$

El integrando de esta integral doble se denomina **vorticidad** del flujo, y la vorticidad dividida entre 2 se denomina **rotación**

(9) $$\omega(x, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right).$$

Se supone que el fluido es **irrotacional**; es decir, que $\omega(x, y) \equiv 0$ a lo largo de todo el flujo; así,

(10) $$\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} = 0.$$

[5] *Definiciones*: $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx =$ valor medio de f en el intervalo $a \leqq x \leqq b$.

$\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_C f(s)\,ds =$ valor medio de f en C (L = longitud de C).

$\dfrac{1}{A}\displaystyle\iint_D f(x, y)\,dx\,dy =$ valor medio de f en D (A = área de D).

A fin de comprender el significado físico de la vorticidad y de la rotación, para C en (8) se considerará un círculo de radio r. Entonces, la circulación dividida entre la longitud $2\pi r$ de C es la velocidad media del fluido a lo largo de C. Por tanto, al dividir ésto entre r se obtiene la velocidad *angular* media ω_0 del fluido alrededor del eje del círculo:

$$\omega_0 = \frac{1}{2\pi r^2}\iint_D \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right) dx\, dy = \frac{1}{\pi r^2}\iint_D \omega(x, y)\, dx\, dy.$$

Si ahora se hace que $r \to 0$, entonces el límite de ω_0 es el valor de ω en el centro de C. Por tanto, $\omega(x, y)$ es la velocidad angular límite de un elemento circular del fluido a medida que el círculo se reduce hasta convertirse en el punto (x, y). Hablando en términos generales, si un elemento esférico del fluido se solidificara repentinamente y el fluido circundante desapareciera de manera simultánea, entonces el elemento giraría con la velocidad angular ω.

La segunda hipótesis es que el fluido es **incompresible**. (Ejemplos de este tipo de fluido son el agua y el aceite, en tanto que el aire es compresible). Entonces

(11) $$\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} = 0 \qquad \text{[ver (7), secc. 8.10]}$$

en toda región en que no haya **fuentes** o **sumideros**; es decir, puntos en los cuales se produce o desaparece fluido. [La expresión (11) se denomina ***divergencia*** de V y se denota por div V].

Si el dominio D del flujo es simplemente conexo y el flujo es irrotacional, entonces la integral de línea (7) es independiente de la trayectoria en D (por el teorema 3 de la sección 9.2, en donde $F_1 = V_1$, $F_2 = V_2$, $F_3 = 0$ y z es la tercera coordenada en el espacio, y no guarda relación alguna con la z actual). Por tanto, si se integra desde un punto fijo (a, b) en D hasta un punto variable (x, y) en D, entonces la integral se vuelve una función del punto (x, y), por ejemplo $\Phi(x, y)$:

(12) $$\Phi(x, y) = \int_{(a,\, b)}^{(x,\, y)} (V_1\, dx + V_2\, dy).$$

Se afirma que Φ es el potencial de velocidad buscado. Para probar la afirmación, todo lo que debe hacerse es demostrar que (4) se cumple. Ahora bien, como la integral (7) es independiente de la trayectoria, entonces $V_1\, dx + V_2\, dy$ es una diferencial exacta (sección 9.2); a saber, la diferencial de Φ; es decir,

$$V_1\, dx + V_2\, dy = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy.$$

A partir de lo anterior se observa que $V_1 = \partial\Phi/\partial x$ y $V_2 = \partial\Phi/\partial y$, con lo que se obtiene (4).

El hecho de que Φ es armónica se concluye de inmediato al sustituir (4) en (11), con lo que se obtiene la primera ecuación de Laplace en (5).

Por último, se toma una conjugada armónica Ψ de Φ. Entonces se cumple la otra ecuación en (5). También, suponiendo que las segundas derivadas parciales de Φ y Ψ son continuas, se tiene que la función compleja

$$F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

es analítica en D. Como las curvas $\Psi(x, y) =$ *constante* son perpendiculares a las curvas equipotenciales $\Phi(x, y) =$ *constante* (excepto en donde $F'(z) = 0$), se concluye que son las líneas de corriente. Por tanto, Ψ es la función de corriente y $F(z)$ es el potencial complejo del flujo. ∎

Problemas de la sección 17.4

1. **(Flujo paralelo)** Demostrar que $F(z) = Kz$ (K real positivo) describe un flujo uniforme hacia la derecha, el cual puede interpretarse como un flujo uniforme entre dos líneas paralelas (entre dos planos paralelos en el espacio tridimensional). Ver la figura 391. Encontrar el vector velocidad, las líneas de corriente y las líneas equipotenciales.
2. Demostrar que $F(z) = iz^2$ describe un flujo siguiendo una esquina. Encontrar las líneas de corriente y las líneas equipotenciales y trazar sus gráficas. Encontrar el vector velocidad V.
3. Obtener el flujo del ejemplo 1 a partir del correspondiente en el problema 1, mediante un mapeo conforme del primer cuadrante sobre el semiplano superior.
4. Modificar ligeramente $F(z)$ en el ejemplo 2 a fin de obtener un flujo alrededor de un cilindro de radio r_0 que lleve al flujo del problema 1 cuando $r_0 \to 1$.

Considerar el flujo correspondiente al potencial complejo dado $F(z)$. Mostrar gráficamente algunas líneas de corriente y líneas equipotenciales. Encontrar el vector velocidad V. Determinar todos los puntos en los que V es paralelo al eje x.

5. iz 6. $(1 - 2i)z$ 7. $(1 + i)z$ 8. $z^2 + 2z$ 9. z^3 10. iz^3

11. **(Fuente y sumidero)** Considerar el potencial complejo $F(z) = (c/2\pi) \ln z$, en donde c es real positiva. Demostrar que $V = (c/2\pi r^2)(x + iy)$, en donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, y que lo anterior implica que el flujo está dirigido radialmente hacia afuera (ver la figura 392), de modo que este potencial corresponde a una **fuente puntual** en $z = 0$ (es decir, una **línea fuente** $x = 0, y = 0$, en el espacio). (La constante c se denomina **intensidad** o **descarga** de la fuente. Si c es real negativa, se dice que el flujo tiene un **sumidero** en $z = 0$, que está dirigido radialmente hacia dentro y que el fluido desaparece en el punto singular $z = 0$ del potencial complejo.)

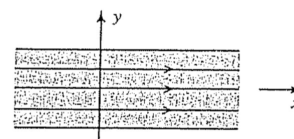


Figura 391. Flujo paralelo del problema 1.

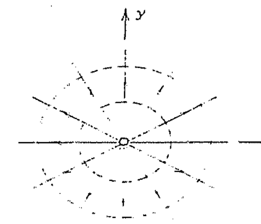


Figura 392. Fuente puntual del problema 1.

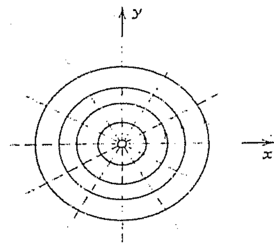


Figura 393. Flujo de vórtice del problema 12.

12. **(Línea de vórtices)** Demostrar que $F(z) = -(iK/2\pi)\ln z$, con K real positiva, describe un flujo que circula alrededor del origen en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj; ver la figura 393. (El punto $z = 0$ es un **vórtice**; el potencial aumenta por el factor K cada vez que se efectúa una vuelta alrededor del vórtice.)
13. Encontrar el potencial complejo de un flujo que tiene una fuente puntual de intensidad 1 en $z = -a$.
14. Encontrar el potencial complejo de un flujo que tiene un sumidero puntual de intensidad 1 en $z = a$.
15. Demostrar que la suma vectorial de los vectores velocidad de dos flujos produce un flujo cuyo potencial complejo se obtiene al sumar los potenciales complejos de los dos flujos.
16. Sumar los potenciales de los problemas 13 y 14 y mostrar gráficamente las líneas de corriente.
17. Encontrar las líneas de corriente del flujo correspondiente a $F(z) = 1/z$. Demostrar que para $|a|$ pequeña las líneas de corriente del problema 16 son semejantes a las de este problema.
18. Demostrar que $F(z) = \cosh^{-1} z$ corresponde a un flujo cuyas líneas de corriente son hipérbolas confocales con focos en $z = \pm 1$, y que tal flujo puede interpretarse como el que pasa a través de un orificio. Ver la figura 394.
19. Demostrar que $F(z) = \cos^{-1} z$ puede interpretarse como el potencial complejo de un flujo que circula alrededor de un cilindro elíptico o de una placa (el segmento de recta que va desde $z = -1$ hasta $z = 1$). Demostrar que las líneas de corriente son elipses confocales con focos en $z = \pm 1$. Ver la figura 395.
20. **(Flujo con circulación alrededor de un cilindro)** Demostrar que la suma de los potenciales del problema 12 y del ejemplo 2 da por resultado un flujo tal que la pared cilíndrica $|z| = 1$ es una línea de corriente. Encontrar la magnitud de la velocidad y demostrar que los puntos de estancamiento son

$$z = \frac{iK}{4\pi} \pm \sqrt{\frac{-K^2}{16\pi^2} + 1};$$

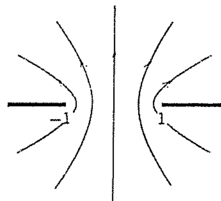


Figura 394. Flujo a través de una abertura del problema 18.

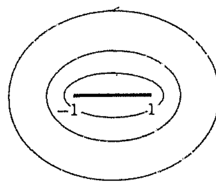


Figura 395. Flujo alrededor de una placa del problema 19.

si $K = 0$, están en ± 1; a medida que K crece se mueven hacia arriba sobre el círculo unitario hasta que se unen en $z = i$ ($K = 4\pi$, ver la figura 396); y si $K > 4\pi$, están sobre el eje imaginario (uno está en el campo de flujo y el otro está en el interior del cilindro y no tiene significado físico.)

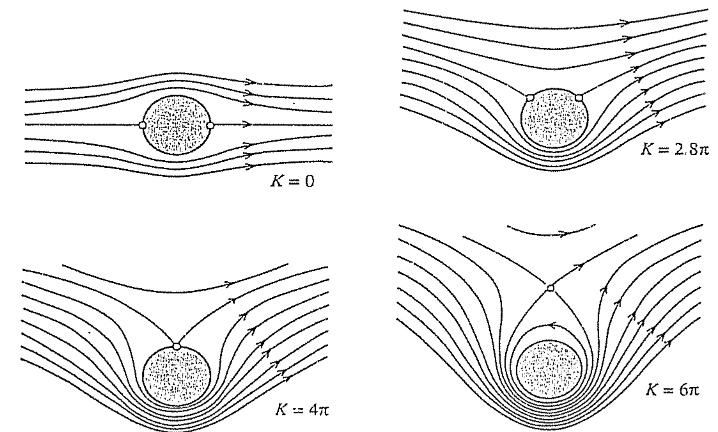


Figura 396. Flujo alrededor de un cilindro, sin circulación ($K = 0$) y con circulación (problema 20).

17.5 FÓRMULA DE LA INTEGRAL DE POISSON

Hasta el momento, en este capítulo se ha visto que el análisis complejo ofrece métodos poderosos para analizar y resolver problemas bidimensionales del potencial con base en mapeos conformes y potenciales complejos. A partir de la integración compleja se obtendrá un método adicional. Con base en la fórmula de la integral de Cauchy se obtendrá la fórmula de la integral de Poisson para resolver el problema de Dirichlet (ver la sección 17.2) en un disco (a partir de lo cual se obtienen soluciones en dominios complicados mediante mapeos conformes, como ya se ha visto).

Para obtener la fórmula de Poisson se empieza con la fórmula de la integral de Cauchy

$$(1) \qquad F(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F(z^*)}{z^* - z}\, dz^*,$$

al integrar en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj sobre el círculo C: $z^* = Re^{i\alpha}$ $(0 \leq \alpha \leq 2\pi)$ y suponiendo que $F(z^*)$ es analítica en un dominio que contiene a C y todo su interior.

Como $dz^* = iRe^{i\alpha}d\alpha = iz^*\, d\alpha$, a partir de (1) se obtiene

$$(2) \qquad F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(z^*) \frac{z^*}{z^* - z}\, d\alpha \qquad (z^* = Re^{i\alpha},\ z = re^{i\theta}).$$

Por otra parte, si en vez de z se considera un punto Z fuera de C; por ejemplo el punto $Z = z^* \bar{z}^* / \bar{z}$ (cuyo valor absoluto es $R^2/r > R$), entonces el integrando en (1) es analítico en el disco $|z| \leqq R$, de modo que la integral es cero debido al teorema de Cauchy:

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(z^*)}{z^* - Z}\, dz^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(z^*) \frac{z^*}{z^* - Z}\, d\alpha.$$

Si se inserta $Z = z^* \bar{z}^* / \bar{z}$, entonces se cancela un factor z^* y la fracción se vuelve $1/(1 - \bar{z}^*/\bar{z}) = \bar{z}/(\bar{z} - \bar{z}^*)$, de modo que

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(z^*) \frac{\bar{z}}{\bar{z} - \bar{z}^*}\, d\alpha.$$

Lo anterior se resta de (2) y se usa

$$\text{(3)} \qquad \frac{z^*}{z^* - z} - \frac{\bar{z}}{\bar{z} - \bar{z}^*} = \frac{z^*\bar{z}^* - z\bar{z}}{(z^* - z)(\bar{z}^* - \bar{z})},$$

fórmula que puede comprobarse fácilmente. Así, se obtiene

$$\text{(4)} \qquad F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(z^*) \frac{z^*\bar{z}^* - z\bar{z}}{(z^* - z)(\bar{z}^* - \bar{z})}\, d\alpha.$$

A partir de las representaciones polares de z y de z^* se observa que el cociente en el integrando es igual a

$$\frac{R^2 - r^2}{(Re^{i\alpha} - re^{i\theta})(Re^{-i\alpha} - re^{-i\theta})} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha) + r^2}.$$

En consecuencia, al escribir

$$F(z) = \Phi(r, \theta) + i\Psi(r, \theta)$$

y tomar la parte real de ambos miembros de la fórmula (4) se obtiene la **fórmula de la integral de Poisson**[6]

$$\text{(5)} \qquad \boxed{\Phi(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(R, \alpha) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha) + r^2}\, d\alpha}$$

que representa la función armónica Φ en el disco $|z| \leqq R$ en términos de sus valores $\Phi(R, \alpha)$ sobre la frontera (el círculo) $|z| = R$.

La fórmula (5) sigue siendo válida si la función frontera $\Phi(R, \alpha)$ es meramente continua por secciones (como prácticamente es el caso a menudo; ver la figura 399 para un ejemplo de lo anterior). Así, con (5) se obtiene una función armónica en el disco abierto, y sobre el círculo $|z| = R$ es igual a la función frontera dada, excepto en los puntos en donde ésta es discontinua. En el texto proporcionado como referencia [D1] aparece una demostración de lo anterior.

[6] SIMEON DENIS POISSON (1781-1840), matemático y físico francés, profesor en París desde 1809. Su obra incluye teoría del potencial, ecuaciones diferenciales parciales (ecuación de Poisson, sección 11.1), y probabilidad.

Representación por series del potencial en un disco

A partir de (5) es posible obtener un importante desarrollo en series de Φ en términos de funciones armónicas simples. Recordar que el cociente en el integrando de (5) se obtuvo a partir de (3). Se afirma que el miembro derecho de (3) es la parte real de

$$\frac{z^* + z}{z^* - z} = \frac{(z^* + z)(\bar{z}^* - \bar{z})}{(z^* - z)(\bar{z}^* - \bar{z})} = \frac{z^*\bar{z}^* - z\bar{z} - z^*\bar{z} + z\bar{z}^*}{|z^* - z|^2}.$$

En efecto, el denominador es real, así como $z^*\bar{z}^* - z\bar{z}$ lo es en el numerador, mientras que $-z^*\bar{z} + z\bar{z}^* = 2i\,\mathrm{Im}\,(z\bar{z}^*)$ en el numerador es imaginario puro. Así se comprueba la afirmación. Luego, mediante el empleo de la serie geométrica se obtiene

$$\text{(6)} \qquad \frac{z^* + z}{z^* - z} = \frac{1 + (z/z^*)}{1 - (z/z^*)} = \left(1 + \frac{z}{z^*}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z^*}\right)^n = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{z^*}\right)^n.$$

Como $z = re^{i\theta}$ y $z^* = Re^{i\alpha}$, se tiene

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z}{z^*}\right)^n = \mathrm{Re}\left[\frac{r^n}{R^n} e^{in\theta} e^{-in\alpha}\right] = \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos(n\theta - n\alpha).$$

En el tercer miembro, $\cos(n\theta - n\alpha) = \cos n\theta \cos n\alpha + \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen} n\alpha$, de modo que a partir de (6) se obtiene

$$\mathrm{Re}\,\frac{z^* + z}{z^* - z} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (\cos n\theta \cos n\alpha + \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen} n\alpha).$$

Esta expresión es igual al cociente en (5), como ya se había mencionado, y al insertar la serie en (5) e integrar término a término se encuentra

$$\text{(7)} \qquad \boxed{\Phi(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta)}$$

en donde los coeficientes son

$$\text{(8)} \qquad \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(R, \alpha)\, d\alpha, \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(R, \alpha) \cos n\alpha\, d\alpha, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(R, \alpha) \operatorname{sen} n\alpha\, d\alpha, \qquad n = 1, 2, \cdots, \end{aligned}$$

los coeficientes de Fourier de $\Phi(R, \alpha)$; ver la sección 10.2. Así, para $r = R$, la serie (7) se vuelve la serie de Fourier de $\Phi(R, \alpha)$, y en consecuencia la representación (7) es válida siempre que $\Phi(R, \alpha)$ pueda representarse por medio de una serie de Fourier.

Ejemplo 1 Problema de Dirichlet para el disco unitario.

Encontrar el potencial electrostático $\Phi(r, \theta)$ en el disco unitario $r < 1$ cuyos valores en la frontera son

$$\Phi(1, \alpha) = \begin{cases} -\alpha/\pi & \text{si} \quad -\pi < \alpha < 0 \\ \alpha/\pi & \text{si} \quad 0 < \alpha < \pi \end{cases} \qquad \text{(Figura 397)}$$

Solución. Como $\Phi(1, \alpha)$ es par, entonces $b_n = 0$ y por (8) se obtiene $a_0 = \frac{1}{2}$ y

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0} \frac{\alpha}{\pi} \cos n\alpha \, d\alpha + \int_{0}^{\pi} \frac{\alpha}{\pi} \cos n\alpha \, d\alpha\right] = \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1).$$

Por tanto, $a_n = -4/n^2\pi^2$ si n es impar, $a_n = 0$ si $n = 2, 4, \cdots$, y el potencial es

$$\Phi(r, \theta) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left[r \cos\theta + \frac{r^3}{3^2}\cos 3\theta + \frac{r^5}{5^2}\cos 5\theta + \cdots\right].$$

En la figura 398 se muestran el disco unitario y algunas de las líneas equipotenciales (curvas Φ = *constante*).

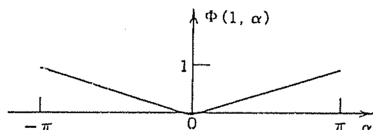


Figura 397. Valores en la frontera del ejemplo 1.

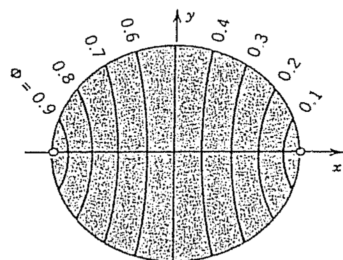


Figura 398. Potencial del ejemplo 1.

Problemas de la sección 17.5

1. Comprobar (3).
2. Demostrar que cada término en (7) es una función armónica en el disco $r^2 < R^2$.

Usando (7), encontrar el potencial $\Phi(r, \theta)$ en el disco unitario $r < 1$ que tiene valores en la frontera $\Phi(1, \theta)$. Usando los primeros términos de la serie, calcular algunos valores de Φ y trazar una figura de las líneas equipotenciales

3. $\Phi(1, \theta) = \operatorname{sen}\theta$
4. $\Phi(1, \theta) = \operatorname{sen} 3\theta$
5. $\Phi(1, \theta) = 2 - \cos\theta$
6. $\Phi(1, \theta) = 1 + \cos 2\theta$
7. $\Phi(1, \theta) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 5\theta$
8. $\Phi(1, \theta) = \cos 2\theta - \cos 4\theta$
9. $\Phi(1, \theta) = \operatorname{sen}^2\theta$
10. $\Phi(1, \theta) = \cos^4\theta$
11. $\Phi(1, \theta) = \theta$ si $-\pi < \theta < \pi$
12. $\Phi(1, \theta) = \theta$ si $0 < \theta < 2\pi$
13. $\Phi(1, \theta) = \theta$ si $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, $\Phi(1, \theta) = \pi - \theta$ si $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$
14. $\Phi(1, \theta) = 1$ si $0 < \theta < \pi/2$, $\Phi(1, \theta) = -1$ si $\pi/2 < \theta < \pi$ y 0 en caso contrario

15. Usando (18) en la sección 14.4, demostrar que el resultado del problema 14 puede escribirse como

$$\Phi(r, \theta) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Im} \operatorname{Ln}\frac{(1 + iz)(1 + z^2)}{(1 - iz)(1 - z^2)}.$$

16. Demostrar que el potencial en el problema 11 puede escribirse como $\Phi(r, \theta) = 2 \operatorname{Im} \operatorname{Ln}(1 + z)$.
17. Usando (7) y (8), demostrar que el potencial $\Phi(r, \theta)$ en el disco unitario $r < 1$ que tiene valores en la frontera -1 si $-\pi < \theta < 0$ y 1 si $0 < \theta < \pi$ está dado por la serie

$$\Phi(r, \theta) = \frac{4}{\pi}\left(r \operatorname{sen}\theta + \frac{r^3}{3}\operatorname{sen} 3\theta + \frac{r^5}{5}\operatorname{sen} 5\theta + \cdots\right).$$

Calcular algunos valores de Φ usando los primeros términos de esta serie y trazar algunas de las líneas equipotenciales. Compare el resultado con la figura 399. Trazar las líneas de fuerza (trayectorias ortogonales).

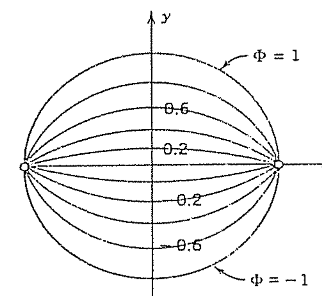


Figura 399. Potencial del problema 17.

18. Usando (18) de la sección 14.4, demostrar que en el problema 17,

$$\Phi(r, \theta) = \frac{2}{\pi}\operatorname{Im} \operatorname{Ln}\frac{1 + z}{1 - z} = \frac{2}{\pi}[\operatorname{Arg}(1 + z) - \operatorname{Arg}(1 - z)].$$

19. Demostrar que

$$\Phi^*(w) = 1 + \frac{2}{\pi}\operatorname{Im} \operatorname{Ln}\frac{w + 1}{w - 1} \qquad (w = u + iv)$$

es armónica en el semiplano superior $v > 0$ y que tiene los valores -1 para $-1 < u < 1$ y $+1$ sobre la parte restante del eje u.

20. Demostrar que la transformación fraccionaria lineal que mapea $w_1 = -1$, $w_2 = 0$, $w_3 = 1$ sobre $z_1 = -1$, $z_2 = -i$, $z_3 = 1$, respectivamente, es

$$z = \frac{w - i}{-iw + 1}.$$

Encontrar la inversa $w = w(z)$, insertarla en Φ^* del problema 19 y demostrar que la función armónica resultante es la del problema 18. También comparar el resultado con el ejemplo 2 de la sección 17.2.

17.6 PROPIEDADES GENERALES DE LAS FUNCIONES ARMÓNICAS

El análisis complejo es de utilidad no sólo para resolver problemas del potencial en dos dimensiones, como acaba de verse, sino también para obtener propiedades generales de las funciones armónicas, como se mostrará en esta última sección del capítulo.

Si $\Phi(x, y)$ es armónica en un dominio D y D es simplemente conexo, entonces Φ tiene una conjugada armónica Ψ en D y

$$F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

es analítica en D. (Ver la sección 12.5 y la nota de pie de página 3 de la sección 17.2.) Como una función analítica tiene sus derivadas de todos los órdenes, entonces el primer resultado es

Teorema 1 (Derivadas parciales)

Una función $\Phi(x, y)$ que es armónica en un dominio simplemente conexo D tiene derivadas parciales de todos los órdenes en D.

Además, si $F(z)$ es analítica en un dominio simplemente conexo D, entonces por la fórmula de la integral de Cauchy (sección 13.5) se tiene que

$$(1) \qquad F(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{F(z)}{z - z_0}\,dz$$

en donde C es una trayectoria cerrada simple en D y z_0 está dentro de C. Si para C se elige un círculo

$$z = z_0 + re^{i\alpha}$$

en D, entonces se tiene que $z - z_0 = re^{i\alpha}$ y $dz = ire^{i\alpha}\,d\alpha$, de modo que (1) se vuelve

$$(2) \qquad F(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(z_0 + re^{i\alpha})\,d\alpha.$$

El miembro derecho es el valor medio de F sobre el círculo (= valor de la integral dividido entre la longitud del intervalo de integración). Esto demuestra el siguiente teorema.

Teorema 2 (Propiedad del valor medio de las funciones analíticas)

Sea $F(z)$ analítica en un dominio simplemente conexo D. Entonces el valor de $F(z)$ en cualquier punto z_0 en D es igual al valor medio de $F(z)$ sobre cualquier círculo en D con centro en z_0.

Este teorema y el siguiente, que caracterizan propiedades importantes de las funciones analíticas, serán usados más tarde para obtener propiedades fundamentales de las funciones armónicas.

Teorema 3 (Teorema del módulo máximo para funciones analíticas)

Sea $F(z)$ analítica y no constante en un dominio que contiene una región acotada[7] D y su frontera. Entonces el valor absoluto $|F(z)|$ no puede tener un máximo en un punto interior de D. En consecuencia, el máximo de $|F(z)|$ se toma sobre la frontera de D. Si $F(z) \neq 0$ en D, entonces lo mismo es verdadero con respecto al mínimo de $|F(z)|$.

Demostración. Se supondrá que $|F(z)|$ tiene un máximo en un punto interior z_0 de D y se demostrará que esto conduce a una contradicción. Sea $|F(z_0)| = M$ este máximo. Como $F(z)$ no es constante, entonces $|F(z)|$ tampoco es constante, como se concluye a partir del ejemplo 4 en la sección 12.5. Por consiguiente, es posible encontrar un círculo C de radio r con centro en z_0 tal que el interior de C esté en D y $|F(z)|$ sea menor que M en algún punto P de C. Como $|F(z)|$ es continua, entonces es menor que M sobre un arco C_1 de C que contenga a P; por ejemplo

$$|F(z)| \leqq M - k \quad (k > 0) \qquad \text{para todo } z \text{ en } C_1 \qquad \text{(Figura 400).}$$

Si la longitud de C_1 es L_1, entonces el arco complementario C_2 de C es de longitud $2\pi r - L_1$. Al aplicar la desigualdad ML (sección 13.2) a (1) y observar que $|z - z_0| = r$, entonces se obtiene

$$M = |F(z_0)| \leqq \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C_1} \frac{F(z)}{z - z_0}\,dz\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C_2} \frac{F(z)}{z - z_0}\,dz\right|$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\left(\frac{M - k}{r}\right)L_1 + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{M}{r}\right)(2\pi r - L_1) = M - \frac{kL_1}{2\pi r} < M,$$

es decir,

$$M < M,$$

lo cual es imposible. Así, la hipótesis es falsa y se ha demostrado la primera proposición del teorema.

A continuación se demostrará la segunda proposición. Si $F(z) \neq 0$ en D, entonces $1/|F(z)|$ es analítica en D. Por la proposición recientemente demostrada se concluye que el máximo de $1/|F(z)|$ está en la frontera de D. Pero este máximo corresponde a un mínimo de $|F(z)|$. Así se completa la demostración. ∎

Ahora ya es posible obtener consecuencias fundamentales de los teoremas 2 y 3 para funciones armónicas, como se muestra enseguida.

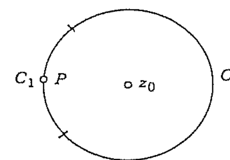


Figura 400. Demostración del teorema 3.

[7] Ver la sección 9.3.

Teorema 4 (Funciones armónicas)

Sea $\Phi(x, y)$ armónica en un dominio que contiene un dominio acotado simplemente conexo D y su curva frontera C. Entonces $\Phi(x, y)$ tiene las siguientes propiedades:

I. El valor de $\Phi(x, y)$ en un punto (x_0, y_0) en el dominio D es igual al valor medio de $\Phi(x, y)$ sobre cualquier círculo en D con centro en (x_0, y_0).

II. El valor de $\Phi(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) es igual al valor medio de $\Phi(x, y)$ en cualquier disco circular en D con centro en (x_0, y_0) [Ver la nota de pie de página 5 en la sección 17.4.]

III. **(Principio del máximo)** *Si $\Phi(x, y)$ no es constante, entonces no tiene ni máximo ni mínimo en D. En consecuencia, el máximo y el mínimo se toman sobre la frontera de D.*

IV. Si $\Phi(x, y)$ es constante sobre C, entonces $\Phi(x, y)$ es una constante.

V. Si $h(x, y)$ es armónica en D y sobre C y si $h(x, y) = \Phi(x, y)$ sobre C, entonces $h(x, y) = \Phi(x, y)$ en todos los puntos de D.

Demostración. La proposición I se concluye a partir de (2) al tomar las partes reales en ambos miembros:

$$\Phi(x_0, y_0) = \operatorname{Re} F(x_0 + iy_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(x_0 + r\cos\alpha,\ y_0 + r\operatorname{sen}\alpha)\,d\alpha.$$

Si los dos miembros de la expresión anterior se multiplican por r y se integra sobre r desde 0 hasta r_0, en donde r_0 es el radio de un disco circular en D con centro en (x_0, y_0), entonces en el miembro izquierdo se obtiene $1/2r_0^2\,\Phi(x_0, y_0)$, y en consecuencia

$$\Phi(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} \Phi(x_0 + r\cos\alpha,\ y_0 + r\operatorname{sen}\alpha)\,r\,d\alpha\,dr.$$

Con lo que se ha demostrado la segunda proposición.

Se demostrará la proposición III. Sea $\Psi(x, y)$ una función armónica conjugada de $\Phi(x, y)$ en D. Entonces $F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$ es analítica en D, así como también lo es

$$G(z) = e^{F(z)}.$$

El valor absoluto es

$$|G(z)| = e^{\operatorname{Re} F(z)} = e^{\Phi(x,y)}.$$

Por el teorema 3 se concluye que $|G(z)|$ no puede tener un máximo en un punto interior de D. Como e^{Φ} es una función monótona creciente de la variable real Φ, entonces se concluye la proposición III acerca del máximo de Φ. Con base en ésto, al sustituir Φ por $-\Phi$ se concluye la proposición sobre el mínimo.

Ahora se demostrará la proposición IV. Por III, la función $\Phi(x, y)$ asume su máximo y su mínimo sobre C. Por tanto, si $\Phi(x, y)$ es constante sobre C, entonces su mínimo debe ser igual a su máximo, de modo que $\Phi(x, y)$ debe ser una constante.

Finalmente, si h y Φ son armónicas en D y sobre C, entonces $h - \Phi$ también es armónica en D y sobre C, y por hipótesis se tiene que $h - \Phi = 0$ en todas partes sobre C. Así, por IV, se tiene que $h - \Phi = 0$ en todas partes en D, por lo que se ha demostrado la proposición V. Así se completa la demostración del teorema 4.

La última proposición del teorema 4 es muy importante. Significa que *una función armónica es determinada de manera única en D por sus valores en la frontera de D.* Por lo general, se requiere que $\Phi(x, y)$ sea armónica en D y continua sobre la frontera[8] de D. En estas circunstancias, el principio del máximo (teorema 4, III) sigue siendo válido. El problema de determinar $\Phi(x, y)$ cuando se proporcionan los valores en la frontera se denomina problema de Dirichlet de la ecuación de Laplace en dos variables, como se sabe. A partir del apartado V del teorema 4 se obtiene entonces el

Teorema 5 (Problema de Dirichlet)

Si para una región dada y valores en la frontera dados el problema de Dirichlet de la ecuación de Laplace en dos variables tiene solución, entonces la solución es única.

Aquí terminan el capítulo 17 y la parte D sobre análisis complejo. Esperamos que el lector haya adquirido una impresión de la utilidad del análisis complejo para el ingeniero y el físico, así como de la belleza matemática de este campo.

Problemas de la sección 17.6

1. Comprobar el teorema 2 para $F(z) = (z + 2)^2$, $z_0 = 1$, y un círculo de radio 1 con centro en z_0.
2. Comprobar el teorema 2 para $F(z) = 5z^4$, $z_0 = 0$, y un círculo de radio 1 alrededor de 0.
3. Integrar $F(z) = |z|$ alrededor del círculo unitario. ¿El resultado contradice el teorema 2?
4. Comprobar el teorema 3 para $F(z) = z^2$ y el rectángulo $1 < x < 9$, $3 < y < 5$.
5. Comprobar el teorema 3 para $F(z) = e^z$ y cualquier dominio acotado.

Encontrar el máximo de $|F(z)|$ en el disco $|z| \leq 1$ y el z correspondiente, en donde

6. $F(z) = az + b$ 7. $F(z) = z^2 - 1$ 8. $F(z) = \cos z$
9. La función $F(z) = 1 + 3|z|^2$ es diferente de cero en el disco $|z| \leq 2$ y tiene un mínimo en un punto interior de ese disco. ¿Este hecho contradice el teorema 3?
10. La función *real* $F(x) = \operatorname{sen} x$ tiene un máximo en $x = \pi/2$. Usar el teorema 3 para concluir que esto no puede ser un máximo del valor absoluto de la función *compleja* $F(z) = \operatorname{sen} z$ en un dominio que contiene a $z = \pi/2$.
11. Sea $F(z)$ analítica (no constante) en el disco cerrado $|z| \leq 1$ y suponer que $|F(z)| = c =$ *constante* sobre $|z| = 1$. Demostrar que entonces $F(z)$ debe tener un cero en ese disco.
12. Si $F(z)$ analítica (no constante) en un dominio simplemente conexo D y la curva definida por $|F(z)| = c$ (c cualquier constante fija) está en D y es cerrada, demostrar que $F(z) = 0$ en un punto del interior de esa curva. Proporcionar ejemplos.
13. Comprobar la proposición I del teorema 4 para $\Phi(x, y) = x^2 - y^2$ y un círculo de radio 1 alrededor de $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

---

[8] Es decir, $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \Phi(x, y) = \Phi(x_0, y_0)$, en donde (x_0, y_0) está en la frontera y (x, y) está en D.

14. Comprobar el principio del máximo del teorema 4 para $\Phi(x, y) = xy$ y el disco $x^2 + y^2 \leq 8$. Determinar los valores máximo y mínimo de Φ en ese disco, y los puntos en los que Φ asume tales valores.
15. Demostrar la proposición 1 del teorema 4 aplicando la fórmula de la integral de Poisson.

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 17

1. ¿Por qué es posible usar funciones analíticas complejas para resolver problemas bidimensionales del potencial? ¿Qué significa problema "bidimensional"?
2. ¿Qué es un potencial complejo, y qué ventajas posee?
3. ¿Qué se entiende por "problema de Dirichlet"?
4. ¿Cómo se aplica el mapeo conforme para resolver el problema de Dirichlet?
5. ¿Qué es un problema mixto con valores en la frontera, y en qué parte de este capítulo apareció?
6. ¿Qué es una línea de corriente?
7. Escribir las condiciones que debe satisfacer un flujo para que sea posible tratarlo con los métodos del análisis complejo.
8. Explicar por qué el flujo térmico de estado estacionario está relacionado con la teoría del potencial.
9. ¿Qué se entiende por superposición de potenciales?
10. Enumerar algunas propiedades sobresalientes comunes a todas las funciones armónicas.
11. Encontrar el potencial entre los cilindros $|z| = 1$, que tiene potencial cero, y $|z| = 5$, que tiene un potencial de 100 volts.
12. Encontrar el potencial complejo en el problema 11.
13. Encontrar el potencial entre los cilindros $|z| = 10$ y $|z| = 100$, que se mantienen a los potenciales de 10 kV y 0, respectivamente.
14. Encontrar la línea equipotencial $U = 0$ entre los cilindros $|z| = 0.25$ y $|z| = 4$, que se mantienen a -220 V y 220 V, respectivamente. (Primero conjeturar la respuesta.)
15. Encontrar el potencial Φ en el primer cuadrante del plano xy si el eje x tiene un potencial igual a 110 V y el eje y está conectado a tierra (0 volts).
16. Encontrar el potencial entre las placas $\text{Arg } z = \pi/6$, que se mantiene a 4 kV, y $\text{Arg } z = \pi/3$, que se mantiene a 3 kV.
17. ¿Cuál es el potencial complejo en el semiplano superior si el eje x negativo tiene un potencial de 400 V y el eje x positivo está conectado a tierra?
18. Encontrar el potencial sobre el rayo $y = x$, $x > 0$, y sobre el eje x positivo si el eje y positivo está a 1200 V y el eje y negativo está a 0 V.
19. Encontrar el potencial entre las placas $y = x/2$, que se mantiene a 100 volts, y $y = x/2 + 4$, que se mantiene a 420 volts.
20. En el problema 18, encontrar una fórmula para calcular el potencial sobre la recta $x = 1$. Encontrar el potencial en el punto $x = 1, y = 2$.
21. Encontrar las isotermas de $F(z) = 10(1 + i)z$ y demostrar que $F(z)$ puede interpretarse como el potencial complejo del flujo térmico entre dos placas paralelas.
22. Encontrar la temperatura en el semiplano superior si la porción $x > 4$ del eje x se mantiene a 100°C y la otra porción se mantiene a 0°C.
23. Demostrar que las isotermas de $F(z) = -iz^2 + 2z$ son hipérbolas.
24. Si la región entre dos cilindros concéntricos de radios 2 cm y 10 cm contiene agua y el cilindro exterior se mantiene a 20°C, ¿hasta qué temperatura es necesario calentar el cilindro interior para que la temperatura sea de 30°C a 5 cm del eje?

25. Encontrar las isotermas de $F(z) = k \text{ Ln } (z - 1 - i)$, en donde k es real, y demostrar que este es el potencial complejo entre cilindros coaxiales con eje en $1 + i$.
26. Encontrar en forma de serie infinita la temperatura en el disco unitario $|z| \leq 1$ si el semicírculo izquierdo de $|z| = 1$ está a 100°C y el semicírculo derecho está a la temperatura cero.
27. Efectuar lo mismo que en el problema 26 si el semicírculo superior está a 20°C y el semicírculo inferior está a temperatura cero.
28. Encontrar en forma de serie el potencial complejo del problema 27. ¿Cuál es la sumatoria de esta serie? *Sugerencia.* Usar el ejemplo 4 en la sección 14.4.
29. Efectuar lo mismo que en el problema 26 si $T(1, \theta) = 30\theta^2$ $(-\pi < \theta \leq \pi)$ sobre el círculo unitario.
30. Encontrar y trazar las líneas equipotenciales de $F(z) = 1/(1 - z)$.

Encontrar las líneas de corriente y la velocidad del flujo que tiene potencial complejo

31. $-ikz$ (k real) **32.** $z^2 + z$ **33.** $z + 4/z$ **34.** $z^2 + 1/z^2$

35. Demostrar que el flujo en el problema 34 tiene puntos de estancamiento en ± 1 y $\pm i$. ¿Puede el lector ver la relación que hay con el ejemplo 2 de la sección 17.4?

Resumen del capítulo 17

Análisis complejo aplicado a la teoría del potencial

La **teoría del potencial** es la teoría que estudia las soluciones de la **ecuación de Laplace**

(1) $$\nabla^2\Phi = 0.$$

Las soluciones cuyas segundas derivadas parciales son ***continuas*** se denominan **funciones armónicas.** La ecuación (1) es la ecuación diferencial parcial más importante en física, donde es de interés en dos y tres dimensiones. Aparece en electrostática (sección 17.1), problemas de calor de estado estacionario (sección 17.3), flujo de fluidos (sección 17.4), problemas de gravitación, etc. Mientras que el caso tridimensional requiere otros métodos (ver el capítulo 11), la teoría bidimensional del potencial puede manipularse por medio del análisis complejo, ya que las partes real e imaginaria de una función analítica son armónicas (sección 12.5) y permanecen armónicas bajo mapeo conforme (sección 17.2), de modo que el **mapeo conforme** se convierte en una herramienta poderosa para resolver problemas con valores en la frontera de (1), como se ilustró en este capítulo. A un potencial real es posible asociarle un **potencial complejo** (sección 17.1)

(2) $$F(z) = \Phi + i\Psi.$$

Entonces ambas familias de curvas $\Phi = \textit{constante}$ y $\Psi = \textit{constante}$ tienen sentido físico. En electrostática son líneas equipotenciales y líneas de fuerza eléctrica de atracción o repulsión (sección 17.1). En problemas de calor son isotermas

(curvas de temperatura contante) y líneas de flujo térmico (sección 17.3). En flujo de fluidos son líneas equipotenciales del potencial de velocidad y líneas de corriente (sección 17.4).

Para el disco, la solución del problema de Dirichlet está dada por la **fórmula de Poisson** (sección 17.5), o por una serie que sobre el círculo frontera se vuelve la serie de Fourier de los valores en la frontera dados (sección 17.5).

Las funciones armónicas, como las funciones analíticas, poseen varias propiedades generales; especialmente importantes son la **propiedad del valor medio** y la **propiedad del módulo máximo** (sección 17.6), que implican la unicidad de la solución del problema de Dirichlet (teorema 5 de la sección 17.6).

Parte

E

MÉTODOS NUMÉRICOS

Capítulo 18 Métodos numéricos en general
Capítulo 19 Métodos numéricos en álgebra lineal
Capítulo 20 Métodos numéricos para ecuaciones diferenciales

Ningún otro campo de las matemáticas ha mostrado un incremento reciente en importancia para la ingeniería comparable al de los métodos numéricos, y ningún otro campo se ha desarrollado tan rápido. Por supuesto, la razón más importante para explicar esta evolución es el desarrollo de varias computadoras, desde la computadora personal hasta la Cray, la CM-5 y otras más, evolución para la cual no se ve el fin. En efecto, cada nueva generación de computadoras invita a la realización de nuevas tareas en análisis numérico; en este sentido, inclusive las pequeñas mejoras en los algoritmos pueden tener un gran impacto sobre el tiempo, demanda de almacenaje, exactitud y estabilidad. Lo anterior abre amplias áreas de investigación, en donde uno de los objetivos primordiales es el desarrollo de software bien estructurado.

Los capítulos 18, 19 y 20 abordan el estudio y la aplicación de **métodos numéricos** que proporcionan la transición del modelo matemático de un problema (las ecuaciones o funciones obtenidas en cálculo o álgebra, etc.) a un **algoritmo** que puede programarse (o usarse directamente en una calculadora de bolsillo) para obtener la solución del problema en forma numérica. Lo anterior incluye la investigación del rango de aplicabilidad, el análisis del error, la estabilidad y las propiedades en general de los métodos numéricos.

Se empezará con métodos numéricos de naturaleza general en el capítulo 18. En el capítulo 19 se analizarán los métodos numéricos para resolver problemas de álgebra lineal; en particular, para encontrar la solución de sistemas de ecuaciones lineales y de problemas algebraicos con eigenvalores. El capítulo 20 está dedicado a la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales.

Los algoritmos se proporcionan en una forma que parece ser la más idónea para mostrar cómo funciona un método y cómo programarlo, aun cuando se tenga poca

experiencia. El estudiante es alentado a programar los algoritmos dados e intentar aplicarlos en la computadora.[1] También se recomienda fuertemente que el estudiante haga uso de los programas que pueden adquirirse en librerías que venden programas comerciales de alta calidad. Los dos más importantes de éstos para grandes computadoras son el IMSL (NBC Building, 7500 Bellaire Boulevard, Houston, TX 77036-5085), escrito en FORTRAN 77, y el NAG (Mayfield House, 256 Banbury Road, Oxford OX2 7DE, Reino Unido), disponible tanto en FORTRAN como en ALGOL. Otros paquetes también pueden obtenerse escribiendo al National Energy Software Center (Argonne National Laboratory, 9700 South Cass Avenue, Argonne, IL 60439). Ver también los programas EISPACK y LINPACK (textos dados como referencias [E6], [E9] y [E19] en el apéndice 1).

[1] No se proporciona ningún programa real, sea FORTRAN o cualquier otro porque, en experiencia del autor, esto podría alentar a algunos estudiantes a generar resultados sin haber comprendido por completo el método numérico subyacente.

Capítulo 18

Métodos numéricos en general

Los **métodos numéricos** son métodos para resolver problemas en una **computadora** (o en una calculadora de bolsillo en caso de que el problema sea sencillo). La computadora se ha vuelto muy importante en el trabajo de ingeniería, ya que permite abordar problemas tan grandes que hasta antes de la aparición de las computadoras eran inaccesibles. Mucho del trabajo de cómputo actualmente es "*tiempo real*": se efectúa de manera casi simultánea con el proceso de generación de datos; por ejemplo, para controlar procesos químicos que se están llevando a cabo o para orientar el vuelo de aeronaves. Entonces se vuelven extremadamente cruciales las cuestiones sobre velocidad, demanda de almacenamiento y sincronización de porciones de grandes programas.

Las computadoras han cambiado, casi revolucionado, los métodos numéricos —el campo como un todo, así como también a muchos métodos individuales— y el desarrollo continúa. Actualmente se está realizando bastante trabajo de investigación para crear nuevos métodos, adaptar los ya existentes a nuevas generaciones de computadoras, mejorar métodos —en trabajo a gran escala inclusive pequeñas mejoras representan grandes ahorros en tiempo o espacio de almacenamiento— y en la investigación de la estabilidad y exactitud de los métodos.

En este capítulo se persiguen dos objetivos. Primero, para las tareas prácticas más importantes, el estudiante debe familiarizarse con los métodos de resolución fundamentales (aunque no demasiado complicados).[2] Tales métodos son necesarios porque para muchos problemas no existe ninguna fórmula de solución (piense el lector en una integral complicada o en las raíces de un polinomio de grado elevado), o en otros casos la formula de solución puede ser prácticamente inútil.

Segundo, el estudiante debe aprender a comprender algunas ideas y conceptos básicos que son importantes a lo largo de todo el campo de estudio; lo

[2] Esto incluye aquéllos para álgebra lineal numérica y ecuaciones diferenciales en los capítulos 19 y 20.

anterior incluye los conceptos de algoritmo, errores por redondeo, estimación de errores en general, "mal condicionamiento", orden de convergencia y estabilidad.

En la primera sección se explicarán algunos conceptos que son básicos en el trabajo numérico; esto incluye observaciones generales sobre computación y computadoras. Cada una de las demás secciones del capítulo está dedicada a métodos para efectuar una tarea específica que es importante en todo el campo de las matemáticas aplicadas, sin importar el campo de aplicación específico.

Prerrequisitos para este capítulo: Cálculo elemental.
Bibliografía: Apéndice 1, parte E.
Respuestas a los problemas: Apéndice 2.

18.1 INTRODUCCIÓN

Los métodos numéricos son métodos para resolver problemas en computadoras (grandes o pequeñas), o en calculadoras, si el problema es simple. Los pasos que llevan de la situación dada (en física, economía, etc.) a la respuesta final suelen ser los siguientes.

1. **Modelado.** Establecer el modelo matemático; es decir, plantear el problema en términos matemáticos.
2. **Elección de los métodos matemáticos,** junto con un análisis preliminar del error (estimación del error, determinación del tamaño de los pasos, etc.; ver más adelante).
3. **Programación.** Escritura de un programa, por ejemplo, en FORTRAN, que sea el resultado de un algoritmo o un diagrama de flujo (diagrama de bloques de los procedimientos a ser ejecutados por la computadora).
4. **Ejecución del programa.**
5. **Interpretación de los resultados.** Esto puede incluir también decisiones para volver a ejecutar el programa en caso de que se requieran resultados adicionales.

Los pasos 1 y 2 están relacionados: una ligera modificación en el modelo a menudo puede permitir el empleo de un método más eficiente.

En el paso 3, el **programa** consta de todos los datos relevantes con que se cuenta y de una sucesión de instrucciones que serán ejecutadas por la computadora en cierto orden, con lo que al final se obtendrá una respuesta numérica (o una gráfica, etc.) del problema. El programa suele escribirse en FORTRAN o en algún otro lenguaje de alto nivel. Luego, un compilador traduce este programa a una sucesión de instrucciones en lenguaje de máquina que ejecuta la tarea deseada.

Empezando en la siguiente sección y continuando hasta el final del capítulo 20, el tema principal lo constituye el paso 2, el análisis y la aplicación de métodos numéricos básicos para resolver las clases más importantes de problemas que se presentan en la práctica. A fin de motivar una comprensión aceptable de la naturaleza del trabajo numérico, en esta sección se continuará con algunas observaciones sencillas sobre computación y computadoras.

Forma de punto flotante de los números

En notación decimal, todo número real es representado por una sucesión finita o infinita de dígitos decimales. Para cálculos con máquinas, el número debe sustituirse por un número que conste de una finitud de dígitos. Casi todas las computadoras digitales cuentan con dos formas para representar los números, denominadas de *punto fijo* y de *punto flotante*. En un sistema de **punto fijo**, todos los números están dados con un *número fijo de cifras decimales*; por ejemplo, 62.358, 0.013, 1.000: En un sistema **de punto flotante**, los números están dados con un *número fijo de dígitos significativos*; por ejemplo,

$$0.6238 \times 10^{3} \qquad 0.1714 \times 10^{-13} \qquad -0.2000 \times 10^{1}$$

lo que también se escribe como[3]

$$0.6238E03 \qquad 0.1714E-13 \qquad -0.2000E01.$$

Un **dígito significativo** de un número c es cualquier dígito dado de éste, excepto quizá por los ceros a la izquierda del primer dígito diferente de cero, que sirven sólo para fijar la posición del punto decimal. (Así, cualquier otro cero es un dígito significativo de c.) Por ejemplo, cada uno de los números 1360, 1.360, 0.001360 tiene cuatro dígitos significativos.[4]

Casi todas las computadoras usan (internamente) el sistema de números binarios, cuya base es 2 (ver los problemas 3, 4 y 5). Un dígito binario se denomina de manera abreviada **bit**. Al agrupar bits es posible obtener representaciones octales (base 8) o hexadecimales (base 16). En la computadora, un número representado en punto flotante consta del signo, de una parte fraccionaria, denominada *mantisa*,[5] y de la parte exponencial, denominada *característica*. Por ejemplo, en la serie IBM un número en notación de punto flotante (de precisión sencilla) consta de 1 bit para el signo, 24 bits para la mantisa (lo cual corresponde a 6 o 7 dígitos decimales), y 7 bits para el exponente (en base 16), siendo posibles valores desde −64 hasta 63. Si en un cálculo aparece un número mayor que 16^{63} ($\approx 10^{76}$), lo cual sucede algunas veces, entonces este hecho se denomina **desbordamiento**, y la computadora se detiene. Si aparece un número menor que 16^{-64}, esta condición se denomina **subdesbordamiento**. Lo anterior es semejante para computadoras con otro rango de tamaños de números. En muchas computadoras, los números que provocan subdesbordamiento se fijan en cero.

[3] También se usa una notación de la forma 6.238×10^{2}, 1.1714×10^{-14}, etcétera.

[4] En las tablas de funciones que muestran k dígitos significativos, por convencionalismo, se supone que cualquier valor dado $\tilde{a}$ se desvía con respecto al valor exacto a correspondiente, cuando mucho ± 0.5 unidad del último dígito dado, a menos de que se diga otra cosa; por ejemplo, si $\tilde{a} = 1.1996$, entonces en una tabla de cuatro dígitos significativos debe obtenerse $a = 1.200$. De manera correspondiente, si 12 000 es correcto hasta tres dígitos significativos únicamente, mejor debe escribirse 120×10^{2}, etc. "Decimal" se abrevia D y "dígito significativo", S. Por ejemplo, 5D significa 5 decimales y 8S quiere decir 8 dígitos significativos.

La forma de punto fijo de los números es impráctica en física, química, etc., debido a su rango limitado (¡explicar esto!) y por lo mismo en este libro ya no se mencionará a partir de este momento.

Redondeo

Se genera un error al **recortar** (= descartar todos los decimales que están a la derecha de alguno de ellos) o **redondear**. La regla para redondear un número hasta k decimales es como sigue. (La regla para redondear hasta k cifras significativas es la misma, con "decimales" sustituido por "cifras significativas".)

Regla de redondeo. Se descartan el $(k+1)$-ésimo decimal y todos los decimales subsiguientes. (a) Si el número así descartado es menor que la mitad de una unidad en el k-ésimo lugar, entonces el k-ésimo decimal permanece sin cambio (*"redondeo por defecto"*). (b) Si es mayor que la mitad de la unidad en el k-ésimo lugar, entonces sumar la unidad al k-ésimo decimal (*"redondeo por exceso"*). (c) Si es exactamente igual a la mitad de la unidad, entonces redondear al decimal *par* más próximo. (Ejemplo: Al redondear 3.45 y 3.55 hasta un decimal se obtiene 3.4 y 3.6, respectivamente.)

La última parte de la regla se supone con el fin de asegurar que al descartar exactamente la mitad de un decimal, el redondeo por exceso y el redondeo por defecto suceden en promedio con la misma frecuencia.

Si se redondea 1.2535 hasta 3, 2 y 1 decimales, se obtiene 1.254, 1.25 y 1.3, pero si 1.25 se redondea hasta un decimal, sin ninguna información adicional, entonces se obtiene 1.2.

No se recomienda recortar, ya que se introduce un error que es sistemático y que puede ser mayor que uno por redondeo. Sin embargo, sorprendentemente, ¡muchas computadoras aplican el recorte! Una de las razones que explican lo anterior es que el redondeo consume tiempo y los fabricantes intentan todas las clases de atajo a fin de hacer que las operaciones aritméticas fundamentales se realicen de la manera más rápida posible. Casi todas las computadoras que redondean siempre lo hacen por *exceso* en el caso (c) de la regla (o en el caso correspondiente, cuando se trata de una base diferente a la base 10), ya que esto es más fácil de efectuarse técnicamente.

Los errores por redondeo pueden arruinar por completo un cálculo, aun cuando éste sea pequeño. En general, son más peligrosos cuanto mayor sea el número de operaciones aritméticas (¡quizá de varios millones!) a efectuar. Por consiguiente, es importante analizar los programas de computación respecto a los errores por redondeo que se esperan y hallar un arreglo de los cálculos de modo que el efecto de tales errores sea tan pequeño como se pueda.

Algoritmo. Estabilidad

Un **algoritmo** es una sucesión finita de reglas para efectuar cálculos por computadora de modo que en cada instante las reglas determinen exactamente qué debe hacer a

[5] Esto no tiene nada que ver con la "mantisa" que se usa en relación con los logaritmos. **"Precisión sencilla"** significa el número de bits que suele usarse en los cálculos por computadora; **"doble precisión"** significa el doble de bits, etc.

continuación la computadora. Estas reglas incluyen una *"regla de detención"* que hace detenerse a la computadora, a fin de que no funcione de manera indefinida. En las siguientes secciones se proporcionarán algunos algoritmos importantes.

Estabilidad. Para que un algoritmo sea útil, debe ser **estable**; es decir, que pequeños cambios en los datos iniciales deben producir sólo pequeños cambios en los resultados finales. Sin embargo, si pequeños cambios en los datos iniciales producen grandes cambios en los resultados finales, entonces se dice que el algoritmo es **inestable**.

Esta *"inestabilidad numérica"*, que es posible evitar eligiendo un algoritmo mejor, debe distinguirse de la *"inestabilidad matemática"* de un problema, que se denomina *"mal condicionamiento"*, concepto que se analizará en la siguiente sección.

Algunos algoritmos son estables sólo para ciertos datos iniciales, de modo que en tal caso debe tenerse cuidado.

Errores de programación

A los errores de todos los tipos que hay en un programa de computadora se les denomina en forma colectiva **errores (bugs)**, y el proceso de localizarlos y eliminarlos es la **corrección de errores (debugging)**. Para programar se requiere experiencia, que no puede *enseñarse* sino que debe *adquirirse*. A pesar de lo anterior, las sugerencias que se proporcionan a continuación pueden ser de utilidad para programar.

Preparar el programa con el máximo cuidado: es más fácil evitar errores de esta manera que descubrirlos después. No existe ninguna regla general que garantice la detección de todos los errores en todos los programas. Los compiladores suministran *diagnósticos* que indican todos los errores que hay en un programa fuente, excepto los de lógica. Quizá la mejor forma de determinar si un programa tiene errores es ejecutarlo con datos para los cuales se conocen las respuestas o éstas puedan obtenerse fácilmente de alguna otra manera.

Si se tiene la convicción de que existen errores debido a que se obtienen resultados sin sentido pero las prueba fracasan en detectar realmente los errores, entonces es necesario aplicar un **rastreo** selectivo (e inclusive completo); es decir, imprimir resultados intermedios y comprobarlos paso a paso.

Errores de resultados numéricos

Cuando se calculan cantidades desconocidas, los resultados finales obtenidos suelen ser **aproximaciones**; es decir, no son exactos, sino que implican errores. Tales errores pueden resultar de una combinación de los siguientes efectos. Los **errores por redondeo** resultan del redondeo de cifras, como ya se analizó. Los **errores experimentales** son errores de datos con los que se cuenta (y que quizá surgen por medición). Los **errores por truncamiento** resultan por el truncamiento (suspensión prematura) de cifras, por ejemplo, cuando una serie de Taylor se sustituye por la sumatoria de sus primeros términos. Estos errores dependen del método de cálculo usado y deben tratarse de manera individual para cada método aplicado. [Algunas veces "truncamiento" se usa como sinónimo de "recorte" (ver lo antes escrito sobre el recorte), terminología que no se recomienda.]

Fórmulas para calcular los errores. Si a es un valor aproximado de una cantidad cuyo valor exacto es $\tilde{a}$, entonces la diferencia

$$\boxed{\epsilon = a - \tilde{a}} \tag{1}$$

se denomina **error** de $\tilde{a}$. Por tanto[6]

$$a = \tilde{a} + \epsilon, \qquad \text{Valor verdadero} = \text{Aproximación} + \text{Error}$$

Por ejemplo, si $\tilde{a} = 10.5$ es una aproximación de $a = 10.2$, entonces su error es $\epsilon = -0.3$. El error de una aproximación $\tilde{a} = 1.60$ de $a = 1.82$ es $\epsilon = 0.22$.

El **error relativo** ϵ_r de $\tilde{a}$ se define como

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{a} = \frac{a - \tilde{a}}{a} = \frac{\text{Error}}{\text{Valor verdadero}} \qquad (a \neq 0) \tag{2}$$

Esta expresión parece ser inútil porque se desconoce a. Pero si $|\epsilon|$ es mucho menor que $\tilde{a}$, entonces es posible usar a en vez de a y obtener

$$\epsilon_r \approx \frac{\epsilon}{\tilde{a}}. \tag{2'}$$

Esta expresión sigue pareciendo problemática porque se desconoce ϵ; en caso de que fuera conocido, a partir de (1) se obtendría $a = \tilde{a} + \epsilon$ y se habría terminado. Pero lo que puede obtenerse en la práctica es una **cota para el error** para $\tilde{a}$; es decir, un número β tal que

$$|\epsilon| \leqq \beta, \qquad \text{por tanto,} \qquad |a - \tilde{a}| \leqq \beta.$$

Lo anterior establece la distancia máxima a la que puede estar la a desconocida de la a calculada. De manera semejante, para el error relativo, una cota para el error es un número β_r tal que

$$|\epsilon_r| \leqq \beta_r, \qquad \text{por tanto,} \qquad \left|\frac{a - \tilde{a}}{a}\right| \leqq \beta_r.$$

Propagación de errores

Esta es una cuestión importante. Se refiere a cómo los errores al principio y en pasos posteriores (de redondeo, por ejemplo) se propagan en los cálculos y cómo afectan la exactitud, algunas veces de manera muy drástica. A continuación se establecerá qué

[6] *¡Atención!* Los usuarios de la última edición de este libro observarán que la definición se ha cambiado de $\epsilon = \tilde{a} - a$ a $\epsilon = \tilde{a} - a$ porque la segunda parece ligeramente más conveniente, ya que guarda una semejanza con expresiones estándares que se presentan en análisis, como series = suma parcial + residuo, integral = suma de Riemann + error, etc.
En las publicaciones sobre el tema se usan ambas notaciones.

sucede con las cotas para el error en la adición y la sustracción: se suman, mientras que bajo la multiplicación y la división se suman las cotas para el error de los errores relativos.

Teorema 1 (Propagación de errores)

(a) *En la adición y en la sustracción, al sumar las cotas para el error de los términos se obtiene una cota para el error para los resultados.*

(b) *En la multiplicación y en la división, al sumar las cotas para el error de los errores relativos de los números dados se obtiene (aproximadamente) una cota para el error del error relativo de los resultados.*

Demostración. (a) Se usan las notaciones $x = \tilde{x} + \epsilon_1, y = \tilde{y} + \epsilon_2, |\epsilon_1| \leqq \beta_1, |\epsilon_2| \leqq \beta_2$. Así, para el error ϵ de la *diferencia* se obtiene

$$\begin{aligned} |\epsilon| &= |x - y - (\tilde{x} - \tilde{y})| \\ &= |x - \tilde{x} - (y - \tilde{y})| \\ &= |\epsilon_1 - \epsilon_2| \leqq |\epsilon_1| + |\epsilon_2| \leqq \beta_1 + \beta_2. \end{aligned}$$

La demostración para la *suma* es semejante y se deja para el estudiante.

(b) Para el error relativo ϵ_r de $\tilde{x}\tilde{y}$, a partir de los errores relativos ϵ_{r1} y ϵ_{r2} de $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ y de las cotas β_{r1} y β_{r2} se obtiene

$$|\epsilon_r| = \left|\frac{xy - \tilde{x}\tilde{y}}{xy}\right| = \left|\frac{xy - (x - \epsilon_1)(y - \epsilon_2)}{xy}\right| = \left|\frac{\epsilon_1 y + \epsilon_2 x - \epsilon_1\epsilon_2}{xy}\right|$$

$$\approx \left|\frac{\epsilon_1 y + \epsilon_2 x}{xy}\right| \leqq |\epsilon_{r1}| + |\epsilon_{r2}| \leqq \beta_{r1} + \beta_{r2}.$$

Esta demostración indica qué se entiende por "aproximadamente": se despreció $\epsilon_1 \epsilon_2$, cuyo valor absoluto es muy pequeño en comparación con $|\epsilon_1|$ y $|\epsilon_2|$. La demostración para la división es semejante, aunque ligeramente más ingeniosa (ver el problema 21).

Comentario sobre el método de selección

Mientras más poderosa sea la computadora y más grande sea el problema a resolver, más importante es la elección de un mejor método posible, ya que mayor será la pérdida provocada por el uso de matemáticas poco idóneas o de métodos de cálculo inferiores. Los programas brillantes no pueden funcionar adecuadamente para una elección deficiente de los métodos; por otra parte, programas deficientes pueden arruinar buenos métodos, proporcionando resultados inexactos al cabo de mucho tiempo transcurrido. Si se utiliza un programa paquete de la biblioteca, entonces debe conocerse exactamente cuáles son su objeto y sus limitaciones. En muchos casos es nece-

sario estar preparado para modificar o cambiar el programa hasta que se obtenga el óptimo para el problema en cuestión.

La computadora no reduce la necesidad de un conocimiento aceptable del área a que pertenece el problema y de la infraestructura matemática relacionada con la solución de éste. Inclusive en casos muy simples es posible aplicar recursos matemáticos numéricamente aceptables o numéricamente deficientes, como se ilustrará a continuación.

Ejemplo 1. Ecuación cuadrática.

Encontrar las raíces de la ecuación

$$x^2 - 40x + 2 = 0,$$

usando 4 dígitos significativos en los cálculos.

Solución. Una fórmula para encontrar las raíces x_1 y x_2 de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ es

$$(3) \qquad x_1 = \frac{1}{2a}(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}), \qquad x_2 = \frac{1}{2a}(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}).$$

Además, como $x_1 x_2 = c/a$, otra fórmula para encontrar tales raíces es

$$(4) \qquad x_1 \text{ como antes} \qquad x_2 = \frac{c}{ax_1}.$$

Con (3) se obtiene $x = 20 \pm \sqrt{398} = 20.00 \pm 19.95$, $x_1 = 39.95$, $x_2 = 0.05$, lo cual es deficiente, mientras que con (4) se obtiene $x_1 = 39.95$, $x_2 = 2.000/39.95 = 0.05006$, lo que guarda un error de menos de una unidad con respecto al último dígito, como puede observarse al efectuar un cálculo con más cifras.

Comentario. Para evitar malentendidos: la aproximación hasta 4S es por conveniencia; (4) es mejor que (3) sin importar el número de cifras que se use. Por ejemplo, el cálculo hasta 8S aplicando (3) es $x_1 = 39.949937$, $x_2 = 0.050\,063$, que es deficiente, y al aplicar (4) se obtiene x_1 como antes, $x_2 = 2/x_1 = 0.050062657$. ∎

Problemas de la sección 18.1

1. **(Punto flotante).** Escribir 98.17, −100.988, 0.0047869, −13 800 en forma de punto flotante con 4 dígitos significativos.
2. Escribir −0.0168409, 10.27845, −30 681.55 en forma de punto flotante con 6 dígitos significativos.
3. **(Representación binaria).** Casi todas las computadoras usan el sistema binario de numeración o una variante de éste, como el sistema en base 8 o el sistema en base 16. Escribir la conocida representación con base 10 en la forma $(81.5)_{10}$ y comprobar que

$$(81.5)_{10} = 8 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} = 2^6 + 2^4 + 2^0 + 2^{-1} = (1010001.1)_2.$$

Convertir $(100)_{10}$, $(29.25)_{10}$ y $(3.75)_{10}$ a forma binaria.
4. Convertir $(1000)_{10}$, $(13.78125)_{10}$ y $(-22.0625)_{10}$ a forma binaria.
5. Convertir $(11100.1)_2$, $(0.00101)_2$, $(1.10111)_2$ y $(-11.01101)_2$ a forma en base 10.
6. **(Diferencias pequeñas de grandes números).** Los errores por redondeo pueden volverse particularmente desventajosos en las expresiones $a - b$ cuando a y b son números muy próximos entre sí. Para ilustrar este hecho, calcular 0.36443/(17.862 − 17.798), primero usando los números como se dan, y luego redondeando paso a paso a 4, 3 y 2 dígitos significativos.
7. El cociente en el problema 6 es de la forma $a/(b-c)$. Escribirlo como $a(b+c)/(b^2-c^2)$ y calcularlo primero con 5 dígitos significativos y luego redondeando el numerador 12.996 y el denominador 2.2822 paso a paso como en el problema 6.
8. Resolver $x^2 - 20x + 1 = 0$ aplicando (3) y (4), usando 6 dígitos significativos (6S) en el cálculo. Comparar los resultados y hacer un comentario.
9. Efectuar el cálculo en el problema 8 con 4S y 2S.
10. Si a y b son casi iguales, escribir una forma aceptable de calcular $\cos a - \cos b$.
11. Indicar cómo es posible usar $\log a - \log b = \log(a/b)$ y $e^{a-b} = e^a/e^b$ en cálculos a fin de evitar la pérdida de dígitos significativos.
12. Algunas **aproximaciones a** $\pi = 3.14159265358979 \cdots$ son 22/7 y 355/113. Determinar los errores y los errores relativos correspondientes hasta 3 dígitos significativos.
13. Calcular π aplicando la aproximación de Machin 16 arc tan (1/5) − 4 arc tan (1/239) hasta 10 dígitos significativos. [¡Observar que estos dígitos son correctos! Para los primeros 100 000 dígitos de π, consulte la obra de D. Shanks y J. W. Wrench, *Mathematics of Computation* **16** (1962), págs. 76-99.]
14. Sean 32.03 y 12.2381 correctamente redondeados hasta el número de cifras que se muestra. Calcular el menor intervalo en que debe estar la suma exacta s de los números dados.
15. Contestar la misma pregunta que en el problema 14 para la diferencia 32.03 - 13.2381.
16. Ilustrar con un ejemplo que en cálculos con un número fijo de dígitos significativos el resultado de sumar números depende del orden en que se sumen.
17. Se tienen n números $a_1, \cdots, a_n$, en donde a_j está redondeado correctamente hasta D_j decimales. Al calcular la suma $a_1 + \cdots + a_n$ reteniendo $D = \min D_j$ decimales, ¿es esencial que primero se efectúe la adición y luego se redondee el resultado, o que primero se redondee cada número hasta D decimales y luego se efectúe la adición?
18. Demostrar el teorema 1(a) para la adición.
19. Calcular una tabla decimal a dos dígitos[7] de $f(x) = x/16$, $x = 0(1)20$ y encontrar cómo está distribuido el error por redondeo.
20. Demostrar que en el ejemplo 1 el valor absoluto del error de $x_2 = 2.000/39.95 = 0.05006$ es menor que 0.00001.
21. Demostrar el teorema 1(b) para la división.

18.2 SOLUCIÓN DE ECUACIONES POR ITERACIÓN

A partir de este momento, cada sección está dedicada a algún tipo fundamental de problema y los métodos de solución correspondientes. Se empezará con métodos para determinar las soluciones de una simple ecuación

$$(1) \qquad \boxed{f(x) = 0,}$$

tarea para la que prácticamente no existen fórmulas (excepto en unos cuantos casos simples), de modo que se depende casi por completo de los algoritmos

[7] La notación $x = a(h)b$ significa $x = a, a + h, a + 2h, \cdots, b$.

numéricos. f en (1) es una función dada. Una **solución** de (1) es un número x = s tal que $f(s) = 0$. Aquí, s sugiere el término "solución", aunque también se usarán otras letras.

Algunos ejemplos son $x^2 - 3x + 2 = 0$, $x^3 + x = 1$, sen $x = 0.5x$, tan $x = x$, cosh x = sec x, cosh x cos $x = -1$, todas las cuales pueden escribirse en la forma (1). Las dos primeras son **ecuaciones algebraicas** porque la f correspondiente es un polinomio y en este caso las soluciones también se denominan **raíces** de las ecuaciones. Las otras ecuaciones son **ecuaciones trascendentes** porque implican funciones trascendentes. La resolución de las ecuaciones (1) es una tarea de primera importancia, ya que las aplicaciones a la ingeniería son abundantes: algunas se presentaron en los capítulos 2, 4 y 7 (ecuaciones características), 6 (fracciones parciales), 11 (eigenvalores, ceros de las funciones de Bessel) y 15 (integración), aunque existen muchísimas más.

Las fórmulas con que se obtienen valores numéricos exactos de las soluciones existen sólo en situaciones muy simples. En la mayor parte de los casos es necesario usar un método de aproximación, en particular un **método de iteración**, es decir, un método en el que se empieza con un x_0 tentativo inicial (que puede ser deficiente) y paso a paso se calculan aproximaciones (que, en general, son mejores cada vez) x_0, $x_1, \cdots$ de una solución desconocida de (1). A continuación se analizarán tres de tales métodos, que revisten importancia práctica particular, y en los problemas de la sección se mencionarán otros dos.

En general, los métodos de iteración son fáciles de programar porque las operaciones de cálculo son las mismas en cada paso —de un paso a otro sólo cambian los datos— y, lo que es más importante, si en un caso concreto se tiene que el método converge, entonces en general es estable (ver la sección 18.1).

Iteración de punto fijo[8] para resolver ecuaciones $f(x) = 0$

(1) se transforma *algebraicamente* en la forma

$$x = g(x). \tag{2}$$

Luego se elige un x_0 y se calculan $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$ y, en general,

$$\boxed{x_{n+1} = g(x_n)} \qquad (n = 0, 1, \cdots). \tag{3}$$

Una solución de (2) se denomina **punto fijo** de g, lo cual motiva el nombre del método, y es una solución de (1), ya que a partir de $x = g(x)$ es posible volver a la forma original $f(x) = 0$. Con base en (1) es posible obtener varias formas distintas de (2), y por consiguiente el comportamiento de las sucesiones iterativas correspondientes x_0, $x_1, \cdots$ puede diferir, en particular con respecto a su rapidez de convergencia. Esto se ilustrará con un ejemplo sencillo.

[8] El uso actual de la expresión "punto fijo" no tiene absolutamente nada que ver con el de la sección anterior.

Ejemplo 1. Un proceso de iteración (iteración de punto fijo).

Establecer un proceso de iteración para la ecuación $f(x) = x^2 - 3x + 1 = 0$. Como se conocen las soluciones

$$x = 1.5 \pm \sqrt{1.25}, \quad \text{por tanto,} \quad 2.618\,034 \quad \text{y} \quad 0.381\,966,$$

entonces es posible observar el comportamiento del error a medida que avanza la iteración.

Solución. La ecuación puede escribirse como

$$x = g_1(x) = \tfrac{1}{3}(x^2 + 1), \quad \text{por tanto,} \quad x_{n+1} = \tfrac{1}{3}(x_n^{\,2} + 1), \tag{4a}$$

y si se elige $x_0 = 1$, se obtiene la sucesión (figura 401*a*)

$$x_0 = 1.000, \quad x_1 = 0.667, \quad x_2 = 0.481, \quad x_3 = 0.411, \quad x_4 = 0.390, \cdots$$

que parece tender a la solución menor. Si se elige $x_0 = 2$, la situación es semejante. Si se elige $x_0 = 3$, se obtiene la sucesión (figura 401*a*, parte superior)

$$x_0 = 3.000, \quad x_1 = 3.333, \quad x_2 = 4.037, \quad x_3 = 5.766, \quad x_4 = 11.415, \cdots$$

que parece divergir.

La ecuación también puede escribirse como

$$x = g_2(x) = 3 - \frac{1}{x}, \quad \text{por tanto,} \quad x_{n+1} = 3 - \frac{1}{x_n}, \tag{4b}$$

y si se elige $x_0 = 1$, se obtiene la sucesión

$$x_0 = 1.000, \quad x_1 = 2.000, \quad x_2 = 2.500, \quad x_3 = 2.600, \quad x_4 = 2.615, \cdots$$

que parece tender a la solución mayor. De manera semejante, si se elige $x_0 = 3$, se obtiene la sucesión (figura 401*b*)

$$x_0 = 3.000, \quad x_1 = 2.667, \quad x_2 = 2.625, \quad x_3 = 2.619, \quad x_4 = 2.618, \cdots.$$

En las figuras se muestra lo siguiente. En la parte inferior de la figura 401*a* la pendiente de $g_1(x)$ es menor que la pendiente de $y = x$, que es igual a 1; así, $|g_1'(x)| < 1$, y parece que hay convergencia. En la parte

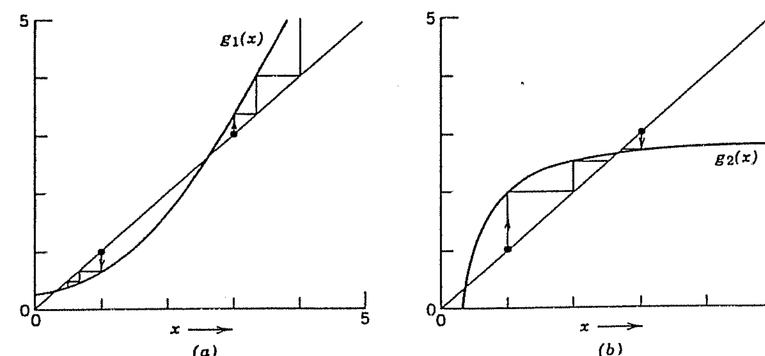


Figura 401. Ejemplo 1, iteraciones (4*a*) y (4*b*).

superior, $g_1(x)$ es más pronunciada ($g'_1(x) > 1$) y se tiene divergencia. En la figura 401*b*, la pendiente de $g_2(x)$ es menor cerca del punto de intersección ($x = 2.618$, punto fijo de g_2, solución de $f(x) = 0$), y parece que ambas sucesiones convergen. Con base en todo lo anterior es posible concluir que la convergencia parece depender del hecho de que en una vecindad de una solución la curva $g(x)$ es menos pronunciada que la recta $y = x$, y a continuación se verá que esta condición $g'(x) < 1$ (= pendiente de $y = x$) es suficiente para la convergencia. ∎

Un proceso de iteración definido por (3) se denomina **convergente** para un x_0 si la sucesión correspondiente $x_0, x_1, \cdots$, es convergente.

El siguiente teorema, que tiene varias aplicaciones prácticas, proporciona una condición suficiente para que haya convergencia.

Teorema 1 (Convergencia de una iteración de punto fijo).

Sea $x = s$ una solución de $x = g(x)$, y suponer que g tiene una derivada continua en algún intervalo J que contiene a s. Entonces si $|g'(x)| \leqq K < 1$ en J, el proceso de iteración definido por (3) converge para cualquier x_0 en J.

Demostración. Por el teorema del valor medio de cálculo diferencial, entre x y s existe una t tal que

$$g(x) - g(s) = g'(t)(x - s) \qquad (x \text{ in } J).$$

Como $g(s) = s$ y $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$, $\cdots$, a partir de esto se obtiene

$$\begin{aligned} |x_n - s| &= |g(x_{n-1}) - g(s)| \\ &= |g'(t)|\,|x_{n-1} - s| \\ &\leqq K|x_{n-1} - s| \\ &= K|g(x_{n-2}) - g(s)| \\ &= K|g'(\tilde{t})|\,|x_{n-2} - s| \\ &\leqq K^2|x_{n-2} - s| \\ \cdots &\leqq K^n|x_0 - s|. \end{aligned}$$

Como $K < 1$, se tiene que $K^n \to 0$; por tanto, $|x_n - s| \to 0$ cuando $n \to \infty$. ∎

Se menciona que una función g que satisface la condición del teorema 1 se denomina **contracción** porque $|g(x) - g(v)| \leqq K|x - v|$, en donde $K < 1$. Además, K proporciona información sobre la rapidez de convergencia. Por ejemplo, si $K = 0.5$, entonces la exactitud aumenta por lo menos en 2 dígitos en sólo 7 pasos, ya que $0.5^7 < 0.01$.

Ejemplo 2. Un proceso de iteración. Ilustración del teorema 1.

Encontrar una solución de $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$ por iteración.

Solución. Un esquema aproximado muestra que una solución real está cerca de $x = 1$. Es posible escribir la ecuación en la forma

$$x = g_1(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \qquad \text{de modo que} \qquad x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n^2}.$$

Así, $|g_1'(x)| = 2|x|/(1 + x^2)^2 < 1$ para cualquier x, ya que $4x^2/(1 + x^2)^4 = 4x^2(1 + 4x^2 + \cdots) < 1$, de modo que se tiene convergencia para cualquier x_0. Si se elige $x_0 = 1$, se obtiene (figura 402)

$$x_1 = 0.500, \quad x_2 = 0.800, \quad x_3 = 0.610, \quad x_4 = 0.729, \quad x_5 = 0.653, \quad x_6 = 0.701, \cdots.$$

La solución exacta hasta 6D es $s = 0.682328$. La ecuación también puede escribirse como

$$x = g_2(x) = 1 - x^3. \qquad \text{Entonces} \qquad |g_2'(x)| = 3x^2$$

y lo anterior es mayor que 1 cerca de la solución, de modo que no es posible esperar convergencia. Hacer $x_0 = 1$, $x_0 = 0.5$, $x_0 = 2$ y ver qué sucede. ∎

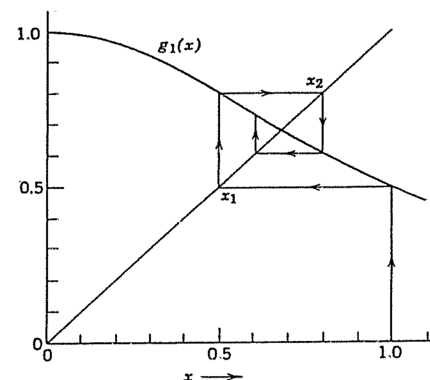


Figura 402. Iteración del ejemplo 2.

Método de Newton para resolver ecuaciones $f(x) = 0$

El **método de Newton** o **método de Newton-Raphson**[9] es otro método iterativo para resolver ecuaciones $f(x) = 0$, en donde se supone que f tiene una derivada continua f'. El método es bastante usado debido a su sencillez y gran rapidez. La idea subyacente es que la gráfica de f se aproxima por medio de tangentes idóneas. Usando un valor aproximado x_0 que se obtiene a partir de la gráfica de f, se hace que x_1 sea el punto de intersección del eje x y la tangente a la curva de f en x_0 (figura 403). Así, se tiene que

$$\tan\beta = f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}, \qquad \text{por tanto,} \qquad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

[9] JOSEPH RAPHSON (1648-1715). Matemático inglés, quien publicó un método semejante al de Newton. Para conocer los detalles históricos, consultar la obrada indicada como referencia [2], pág. 203, que se menciona en el apéndice 1.

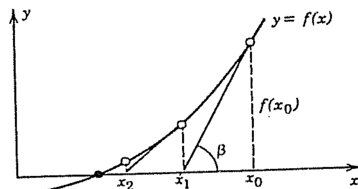


Figura 403. Método de Newton.

En el segundo paso se calcula $x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1)$; en el tercer paso x_3 se calcula a partir de x_2 aplicando la misma fórmula, etc. Por tanto, así se obtiene el algoritmo que se muestra en la tabla 18-1. La fórmula (5) de este algoritmo también puede obtenerse a partir de la fórmula de Taylor (ver el problema 20).

Tabla 18-1
Método de Newton para resolver ecuaciones $f(x) = 0$.

ALGORITMO NEWTON (f, f', x_0, ϵ, N)

Este algoritmo calcula una solución de $f(x) = 0$ dada una aproximación inicial x_0 (valor inicial de la iteración). Aquí la función $f(x)$ es continua y posee una derivada continua $f'(x)$.

ENTRADA: Aproximación inicial x_0, tolerancia $\epsilon > 0$, número máximo de iteraciones N.

SALIDA: Solución aproximada x_n ($n \leq N$) o mensaje de falla.

Para $n = 0, 1, 2, \cdots N - 1$, ejecutar:

1 Calcular $f'(x)$.

2 Si $f'(x) = 0$, entonces dar como SALIDA "Falla". Detener el proceso.
[*Procedimiento terminado sin éxito*]

3 O bien, calcular

(5) $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

4 Si $x_{n+1} - x_n$ entonces dar como SALIDA x_{n+1}. Detener el proceso.
[*Procedimiento terminado con éxito*]

Fin

5 Dar como SALIDA "Falla". Detener el proceso.
[*Procedimiento terminado sin éxito después de N iteraciones*]

Fin de NEWTON

Si sucede que $f'(x_n) = 0$ para alguna n (ver el segundo renglón del algoritmo), entonces se intenta con otro x_0. El tercer renglón constituye el meollo del método de Newton. La desigualdad del renglón 4 es el **criterio de terminación**; si se cumple, entonces se ha llegado a la exactitud deseada de la aproximación y el algoritmo se detiene. En el renglón 5 se proporciona otro *criterio de terminación* necesario porque el método de Newton puede divergir o porque el primer x_0 pudo ser tan deficiente que no se llegará a la exactitud deseada en un número razonable de iteraciones. Entonces se intenta con otro x_0. Si $f(x) = 0$ tiene más de una solución, entonces diferentes elecciones de x_0 pueden producir soluciones distintas. También, es posible que algunas veces una sucesión iterativa converja a una solución diferente a la esperada.

Ejemplo 3. Raíz cuadrada.

Establecer una iteración de Newton para calcular la raíz cuadrada x de un número positivo dado c y aplicarla a $c = 2$.

Solución. Se tiene $x = \sqrt{c}$, de donde $f(x) = x^2 - c = 0$, $f'(x) = 2x$ y (5) asume la forma

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right).$$

Para $c = 2$, al elegir $x_0 = 1$ se obtiene

$$x_1 = 1.500\,000, \quad x_2 = 1.416\,667, \quad x_3 = 1.414\,216, \quad x_4 = 1.414\,214, \cdots.$$

x_4 es exacto hasta 6D.

Ejemplo 4. Iteración de una ecuación trascendente.

Encontrar la solución positiva de $2 \operatorname{sen} x = x$.

Solución. Haciendo $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$ se obtiene $f'(x) = 1 - 2 \cos x$, y con (5) se obtiene

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - 2 \operatorname{sen} x_n}{1 - 2 \cos x_n} = \frac{2(\operatorname{sen} x_n - x_n \cos x_n)}{1 - 2 \cos x_n} = \frac{N_n}{D_n}.$$

A partir de la gráfica de f se concluye que la solución está próxima a $x_0 = 2$. Se calcula

n	x_n	N_n	D_n	x_{n+1}
0	2.00000	3.48318	1.83229	1.90100
1	1.90100	3.12470	1.64847	1.89552
2	1.89552	3.10500	1.63809	1.89550
3	1.89550	3.10493	1.63806	1.89549

$x_4 = 1.89549$ es exacto hasta 5D, ya que la solución hasta 6D es 1.895494.

Ejemplo 5. El método de Newton aplicado a una ecuación algebraica.

Aplicar el método de Newton a la ecuación $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$.

Solución. Por (5) se tiene que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + x_n - 1}{3x_n^2 + 1} = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 + 1}.$$

Empezando con $x_0 = 1$ se obtiene

$$x_1 = 0.750\,000, \qquad x_2 = 0.686\,047, \qquad x_3 = 0.682\,340, \qquad x_4 = 0.682\,328, \cdots$$

en donde x_4 es exacto hasta 6D. Al comparar con el ejemplo 2 se observa que la presente convergencia es mucho más rápida. Este hecho puede motivar el concepto de *orden de un proceso de iteración*, que se analizará a continuación.

Orden de un método de iteración. Rapidez de convergencia

A continuación se verá cómo es posible caracterizar la calidad de un método de iteración juzgando la rapidez de convergencia, como se muestra a continuación.

Sean $x_{n+1} = g(x_n)$ que define un método de iteración y x_n que se aproxima a una solución s de $x = g(x)$. Así, $x_n = s - \epsilon_n$, en donde ϵ_n es el error de x_n. Suponer que g es diferenciable varias veces, de modo que al aplicar la fórmula de Taylor se obtiene

$$(6) \qquad \begin{aligned} x_{n+1} = g(x_n) &= g(s) + g'(s)(x_n - s) + \tfrac{1}{2}g''(s)(x_n - s)^2 + \cdots \\ &= g(s) - g'(s)\epsilon_n + \tfrac{1}{2}g''(s)\epsilon_n^2 + \cdots . \end{aligned}$$

El exponente de ϵ_n en el primer término que no desaparece después de $g(s)$ se denomina **orden** del proceso de iteración definido por g. Este orden mide la rapidez de convergencia.

Para ver lo anterior, a ambos miembros de (6) se resta $g(s) = s$. Luego, en la izquierda se obtiene $x_{n+1} - s = -\epsilon_{n+1}$, en donde ϵ_{n+1} es el error de x_{n+1}, y en la derecha la expresión que queda es casi igual a su primer término diferente de cero porque $|\epsilon_n|$ es pequeño en el caso de convergencia. Así,

$$(7) \qquad \begin{array}{lll} \text{(a)} \quad \epsilon_{n+1} \approx +g'(s)\epsilon_n & \text{en el caso de primer orden} & \\ \text{(b)} \quad \epsilon_{n+1} \approx -\tfrac{1}{2}g''(s)\epsilon_n^2 & \text{en el caso de segundo orden,} & \text{etc.} \end{array}$$

Por tanto, si en algún paso se tiene que $\epsilon_n = 10^{-k}$, entonces para el segundo orden, $\epsilon_{n+1} = \mathit{constante} \cdot 10^{-2k}$, de modo que el número de dígitos significativos casi se duplica en cada paso.

Por ejemplo, en el **método de Newton**, $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ y por diferenciación,

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$

Como $f(s) = 0$, lo anterior muestra que también $g'(s) = 0$. Entonces, el método de Newton es por lo menos de segundo orden. Si de nuevo se extrae la derivada y se hace $x = s$, se encuentra que

$$(8) \qquad g''(s) = \frac{f''(s)}{f'(s)},$$

que, en general, es diferente de cero. Así se demuestra el

Teorema 2 (Convergencia de segundo orden del método de Newton)

Si $f(x)$ es tres veces diferenciable y f' y f'' son diferentes de cero en una solución s de $f(x) = 0$, entonces para x_0 suficientemente próximo a s, el método de Newton es de segundo orden.

Comentario. Para el método de Newton, (7b) se vuelve, por (8),

$$(9) \qquad \epsilon_{n+1} \approx -\frac{f''(s)}{2f'(s)}\epsilon_n^2.$$

Ejemplo 6. Estimación previa del error.

En el ejemplo 4, usar $x_0 = 2$ y $x_1 = 1.901$ para calcular cuántas iteraciones son necesarias para obtener la solución hasta 5D de exactitud. Esta es una **estimación a priori** o **estimación previa** porque es posible calcularla sólo después de una iteración, antes de efectuar iteraciones adicionales.

Solución. Se tiene

$$\frac{f''(s)}{2f'(s)} \approx \frac{f''(x_1)}{2f'(x_1)} = \frac{2 \operatorname{sen} x_1}{2(1 - 2\cos x_1)} \approx 0.57.$$

Por tanto, al aplicar (9) se obtiene

$$|\epsilon_{n+1}| \approx 0.57\epsilon_n^2 \approx 0.57^3\epsilon_{n-1}^4 \approx \cdots \approx 0.57^M\epsilon_0^{2n+2} \leqq 5 \cdot 10^{-6}$$

en donde $M = 2^n + 2^{n-1} + \cdots + 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$. A continuación se demostrará que $\epsilon_0 = -0.11$. En consecuencia, la condición se vuelve

$$0.57^M 0.11^{2n+2} = 5 \cdot 10^{-6}.$$

Por tanto, $n = 2$ es la menor n posible, según está cruda estimación, lo cual concuerda bien con el ejemplo 4.

$\epsilon_0 = -0.11$ se obtiene a partir de $\epsilon_1 - \epsilon_0 = (\epsilon_1 - s) - (\epsilon_0 - s) = -x_1 + x_0 = 0.10$, por tanto, $\epsilon_1 = \epsilon_0 + 0.10 = -0.57\epsilon_0^2$ o $0.57\,\epsilon_0^2 + \epsilon_0 + 0.10 = 0$, con lo que se obtiene $\epsilon_0 = -0.11$. ■

Dificultades en el método de Newton pueden presentarse si $|f'(x)|$ es muy pequeño cerca de una solución de $f(x) = 0$ o, geométricamente, si la tangente de $f(x)$ en el punto de intersección casi coincide con el eje x (de modo que puede ser necesario usar doble precisión a fin de obtener $f(x)$ y $f'(x)$ lo suficientemente exactas). Así, para valores $x = \tilde{s}$ lejanos a una solución s sigue siendo posible obtener pequeños valores funcionales

$$R(\tilde{s}) = f(\tilde{s}).$$

En este caso, se dice que la ecuación $f(x) = 0$ está **mal condicionada**. $R(\tilde{s})$ se denomina **residuo** de $f(x)$ en $\tilde{s}$. Por tanto, un residuo pequeño garantiza un pequeño error de $\tilde{s}$ sólo si la ecuación *no* está mal condicionada.

Ejemplo 7. Una ecuación mal condicionada.

$f(x) = x^5 - 10^{-4}x = 0$ está mal condicionada. $x = 0$ es una solución. $f'(0) = 10^{-4}$ es pequeña. En $\tilde{x} = 0.1$, el residuo $f(0.1) = 2 \cdot 10x^{-5}$ es pequeño, pero el error -0.1 es más grande en valor absoluto por un factor de 5000. Proponer un ejemplo más drástico. ∎

Método de la secante para resolver ecuaciones $f(x) = 0$

Si en el método de Newton se sustituye la derivada $f'(x)$ por el cociente de diferencias

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}},$$

entonces se obtiene el **método de la secante.**

Así, en vez de (5) se tiene

$$(10) \qquad x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

Geométricamente, el eje x es cortado en x_{n+1} por la secante de $f(x)$ que pasa por P_{n-1} y P_n en la figura 404. Se requieren dos valores iniciales x_0 y x_1, pero así se evita el cálculo de las derivadas. El método no es tan bueno como el de Newton (ver la obra [E16] citada como referencia en el apéndice 1), aunque es preferible si para calcular una $f'(x)$ se requiere más de la mitad de las operaciones necesarias para calcular una $f(x)$. El algoritmo es semejante al del método de Newton, como se pide demostrar al estudiante. *No* es recomendable escribir (10) como

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})},$$

porque esto puede producir la pérdida de dígitos significativos si x_n y x_{n-1} son casi iguales. (¿Puede ver esto a partir de la fórmula?)

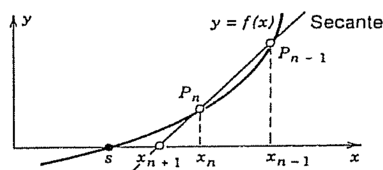


Figura 404. Método de la secante.

Ejemplo 8. Método de la secante.

Encontrar la solución positiva de $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x = 0$ aplicando el método de la secante, empezando desde $x_0 = 2$, $x_1 = 1.9$.

Solución. Aquí, (10) es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - 2\operatorname{sen} x_n)(x_n - x_{n-1})}{x_n - x_{n-1} + 2(\operatorname{sen} x_{n-1} - \operatorname{sen} x_n)} = x_n - \frac{N_n}{D_n}.$$

Los valores numéricos son

n	x_{n-1}	x_n	N_n	D_n	$x_{n+1} - x_n$
1	2.000 000	1.900 000	−0.000 740	−0.174 005	−0.004 253
2	1.900 000	1.895 747	−0.000 002	−0.006 986	−0.000 252
3	1.895 747	1.895 494	0		0

$x_3 = 1.895494$ es exacto hasta 6D. Ver el ejemplo 4. ∎

El método de bisección (que es más bien deficiente) y el **método de falsa posición (regula falsi)** serán considerados en los problemas de la sección.

Problemas de la sección 18.2

Iteración de punto fijo

1. ¿Por qué se obtiene una sucesión monótona en el ejemplo 1, pero no en el ejemplo 2?
2. Realizar las iteraciones indicadas a final del ejemplo 2. Trazar una figura semejante a la figura 402.
3. Calcular la solución de $x^4 = x + 0.12$ cerca de $x = 0$ transformando algebraicamente la ecuación a la forma (2) y empezando desde $x_0 = 0$ (8S = 8 dígitos significativos).
4. La ecuación en el problema 3 tiene una solución cerca de $x = 1$. Calcularla para $x = \sqrt[4]{x + 0.12}$, empezando desde $x_0 = 1$ (8S).
5. Usar iteración para demostrar que la menor solución positiva de $x = \tan x$ es aproximadamente 4.49. *Sugerencia.* A partir de las gráficas de x y $\tan x$ concluir que una solución está próxima a $x_0 = 3\pi/2$; escribir la ecuación en la forma $x = \pi + \arctan x$. (¿Por qué?)
6. Resolver $x = \cos x$ por iteración ($x_0 = 1$, 20 pasos, 6S.)
7. Demostrar que $x = \cos x$ puede transformarse a $x = 1 - (\operatorname{sen}^2 x)/(1 + x)$ y que 15 pasos con $x_0 = 1$ proporciona $x = 0.739085$ (exacto hasta 6S).
8. Demostrar que $x = \cos x$ puede transformarse a $(x \cos x)^{1/2} = x$, con lo que se obtiene el resultado del problema 7 con 6 pasos.
9. Demostrar que si g es continua en un intervalo cerrado I y su rango está en I, entonces la ecuación $x = g(x)$ tiene por lo menos una solución en ese intervalo. Ilustrar que puede tener más de una solución.
10. ¿De qué orden son los procesos en el ejemplo 1?

Método de Newton

Calcular la solución (hasta 6D de exactitud) por el método de Newton, empezando desde el x_0 dado. (Primero intentar trazar la gráfica de la función, a fin de ver qué sucede.)

11. $x^3 - 5x + 3 = 0$, $x_0 = 2$
12. $x = \cos x$, $x_0 = 1$
13. $x^5 + 0.85x^4 + 0.7x^3 - 3.45x^2 - 1.1x + 1.265 = 0$, $x_0 = 1$
14. $e^{-x} - \tan x = 0$, $x_0 = 1$
15. $\operatorname{sen} x = \cot x$, $x_0 = 1$
16. $x + \ln x = 2$, $x_0 = 2$
17. $e^{-x^2} - x$, $x_0 = 0.5$
18. Diseñar una iteración de Newton para $\sqrt[k]{c}$ $(c > 0)$. Usar lo anterior para calcular $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[5]{2}$, (6D, $x_0 = 2$).

19. Diseñar una iteración de Newton para las raíces cúbicas y calcular $\sqrt[3]{7}$ (6D, $x_0 = 2$).
20. Obtener la fórmula del método de Newton por truncamiento de la serie de Taylor.

Método de la secante

Resolver el problema dado aplicando el método de la secante, usando x_0 y x_1 como se indica.

21. Prob. 11; $x_0 = 1.5, x_1 = 2$
22. Prob. 14; $x_0 = 1, x_1 = 0.7$
23. Prob. 15; $x_0 = 1, x_1 = 0.5$
24. Prob. 12; $x_0 = 0.5, x_1 = 1$

Método de bisección y método de falsa posición

26. **(Método de bisección).** Este método sencillo pero de lenta convergencia para encontrar una solución de $f(x) = 0$ con f continua se basa en el **teorema del valor intermedio,** que establece que si una función continua f tiene signos opuestos en algunos $x = a$ y $x = b$ ($> a$); es decir, que si sucede $f(a) < 0, f(b) > 0$ o $f(a) > 0, f(b) < 0$, entonces f debe ser 0 en alguna parte de $[a, b]$. La solución se encuentra por bisección repetida del intervalo y eligiendo en cada iteración la mitad que también satisface esta condición del signo. Escribir un algoritmo para ejecutar el método de bisección, resolver $\cos x = x$, tomando $a = 0$, $b = 1$, y comparar la rapidez con la del problema 12.

Encontrar una solución de las siguientes ecuaciones aplicando el método de bisección (5 iteraciones).

26. $e^{-x} = \ln x, \quad a = 1, b = 2$
27. $e^x + x^4 + x = 2, \quad a = 0, b = 1$
28. $x^3 - 2x^2 + 6x = 10, a = 1.7, b = 1.8$
29. $x^2 = \ln x + 3, \quad a = 1, b = 2$

30. **(Método de falsa posición; regula falsi).** En la figura 405 se muestra la idea. Se supone que f es continua. Calcular la abscisa al origen c_0 de la recta que pasa por $(a_0, f(a_0)), (b_0, f(b_0))$. Si $f(c_0) = 0$, entonces ya se ha terminado. Si $f(a_0)f(c_0) < 0$ (como en la figura 405) se hace $a_1 = a_0$, $b_1 = c_0$ y se repite a fin de obtener c_1, etc. Si $f(a_0)f(c_0) > 0$, entonces $f(c_0)f(b_0) < 0$ y se hace $a_1 = c_0$, $b_1 = b_0$, etc. Demostrar que

$$c_0 = \frac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}$$

y escribir un algoritmo para ejecutar este método. [En general, el método es de primer orden y es aceptable para empezar, aunque no debe aplicarse cerca de una solución.]

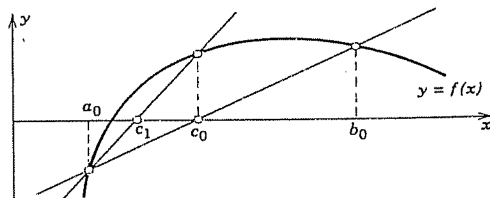


Figura 405. Método de falsa posición.

Encontrar todas las soluciones reales de las siguientes ecuaciones aplicando el método de falsa posición.

31. $x^3 = 5x + 6$
32. $\cos x = \sqrt{x}$
33. $x^4 = 2$

34. En el problema 33, los valores aproximados de la solución positiva siempre son algo menores que el valor exacto de la solución. ¿Por qué?

18.3 INTERPOLACIÓN

Interpolación significa encontrar valores funcionales (aproximados) $f(x)$ para una x entre valores x ***diferentes*** $x_0, x_1, \cdots, x_n$ para los que están dados los valores de $f(x)$. Lo anterior se conoce a partir de una tabla de logaritmos, o puede pensarse que se tienen valores registrados (temperaturas, resultados de censos como en el problema 54 de los problemas de la sección 1.7, etc.) Así, los valores dados

$$f_0 = f(x_0), \qquad f_1 = f(x_1), \qquad \cdots, \qquad f_n = f(x_n)$$

pueden provenir de una "*función matemática*" definida por una fórmula o de una "*función empírica*" que resulta de la observación o de la experimentación.

Así pues, una idea normal en la interpolación es encontrar un polinomio $p_n(x)$ de grado n (o menor) que asuma los valores dados; así,

$$(1) \qquad \boxed{p_n(x_0) = f_0, \qquad p_n(x_1) = f_1, \qquad \cdots, \qquad p_n(x_n) = f_n.}$$

Este p_n se denomina **polinomio de interpolación** y $x_0, \cdots, x_n$ se denominan **nodos.** Si $f(x)$ es una función matemática, entonces p_n se denomina **aproximación** de f (o **aproximación polinómica,** ya que existen otras clases de aproximaciones, como se verá posteriormente). p_n se usa para obtener valores (aproximados) de f para x que están entre x_0 y x_n (**"interpolación"**) o que algunas veces están fuera del intervalo (**"extrapolación"**).

Existencia y unicidad. p_n que satisface (1) para datos específicos existe: a continuación se proporcionarán fórmulas para p_n. p_n es único. En efecto, si un polinomio q_n también satisface $q_n(x_0) = f_0, \cdots, q_n(x_n) = f_n$, entonces $p_n(x) - q_n(x) = 0$ en $x_0, \cdots, x_n$, pero un polinomio $p_n - q_n$ de grado n (o menos) con $n + 1$ raíces debe ser idénticamente cero, como se sabe por álgebra; así, $p_n \equiv q_n$, con lo que se ha demostrado la unicidad.

Cómo determinar p_n. Esta es una importante pregunta práctica. Se contestará explicando varios métodos estándares. Para datos específicos, con tales métodos se obtiene el mismo polinomio, por la unicidad recientemente demostrada (¡que por esto reviste interés práctico!), aunque en varias formas, que difieren en la cantidad de esfuerzo computacional para determinarlas. ∎

Interpolación de Lagrange

Dados $(x_0, f_0), \cdots, (x_n, f_n)$ con x_j arbitrariamente espaciado, Lagrange tuvo la idea de multiplicar cada f_j por un polinomio que es 1 en x_j y 0 en los demás n nodos, y luego

efectuar la suma de estos $n + 1$ polinomios a fin de obtener el único polinomio de interpolación de grado menor o igual que n. Empezando con el caso más simple enseguida se verá cómo funciona lo anterior.

La **interpolación lineal** es interpolación mediante la recta que pasa por (x_0, f_0), (x_1, f_1); ver la figura 406. Así, debido a esta idea, el polinomio lineal de Lagrange p_1 es una suma $p_1 = L_0 f_0 + L_1 f_1$, en donde L_1 es el polinomio lineal que es igual a 1 en x_0 y 0 en x_1; de manera semejante, L_1 es 0 en x_0 y 1 en x_1. Resulta evidente que

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \qquad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Con lo anterior se obtiene el polinomio lineal de Lagrange

(2) $$p_1(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot f_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot f_1.$$

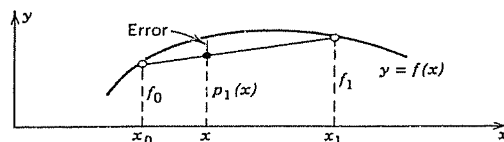


Figura 406. Interpolación lineal.

Ejemplo 1. Interpolación lineal de Lagrange.

Calcular ln 9.2 a partir de ln 9.0 = 2.1972, ln 9.5 = 2.2513 por interpolación lineal de Lagrange y determinar el error a partir de ln 9.2 = 2.2192 (4D).

Solución. $x_0 = 9.0$, $x_1 = 9.5$, $f_0 = \ln 9.0$, $f_0 = \ln 9.5$. En (2) se requiere

$$L_0(9.2) = \frac{9.2 - 9.5}{9.0 - 9.5} = 0.6, \qquad L_1(9.2) = \frac{9.2 - 9.0}{9.5 - 9.0} = 0.4$$

y se obtiene la respuesta

$$\ln 9.2 \approx p_1(9.2) = L_0(9.2)f_0 + L_1(9.2)f_1 = 0.6 \cdot 2.1972 + 0.4 \cdot 2.2513 = 2.2188.$$

El error es $\epsilon = a - \tilde{a} = 2.2192 - 2.2188 = 0.0004$. Por tanto, la interpolación lineal no es suficiente aquí para obtener 4D de exactitud; debe ser suficiente para 3D de exactitud. ∎

La **interpolación cuadrática** es interpolación de los puntos dados (x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2) mediante un polinomio de segundo grado $p_2(x)$, lo cual según la idea de Lagrange es

(3a) $$p_2(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + L_2(x)f_2$$

con $L_0(x_0) = 1$, $L_1(x_1) = 1$, $L_2(x_2) = 1$ y $L_0(x_1) = L_0(x_2) = 0$, etc. Se afirma que

(3b)
$$L_0(x) = \frac{l_0(x)}{l_0(x_0)} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$
$$L_1(x) = \frac{l_1(x)}{l_1(x_1)} = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$
$$L_2(x) = \frac{l_2(x)}{l_2(x_2)} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

¿Cómo se obtuvo esto? Bien, el numerador se hace $L_k(x_j) = 0$ si $j \neq k$, y el denominador se hace $L_k(x_k) = 1$ debido a que es igual al numerador en $x = x_k$.

Ejemplo 2. Interpolación cuadrática de Lagrange.

Calcular ln 9.2 aplicando (3) a partir de los datos del ejemplo 1 y ln 11.0 = 2.3979.

Solución. In (3),

$$L_0(x) = \frac{(x - 9.5)(x - 11.0)}{(9.0 - 9.5)(9.0 - 11.0)} = x^2 - 20.5x + 104.5, \qquad L_0(9.2) = 0.5400,$$
$$L_1(x) = \frac{(x - 9.0)(x - 11.0)}{(9.5 - 9.0)(9.5 - 11.0)} = -\frac{1}{0.75}(x^2 - 20x + 99), \qquad L_1(9.2) = 0.4800,$$
$$L_2(x) = \frac{(x - 9.0)(x - 9.5)}{(11.0 - 9.0)(11.0 - 9.5)} = \frac{1}{3}(x^2 - 18.5x + 85.5), \qquad L_2(9.2) = -0.0200,$$

de modo que con (3a) se obtiene, exacto hasta 4D,

$$\ln 9.2 \approx p_2(9.2) = 0.5400 \cdot 2.1972 + 0.4800 \cdot 2.2513 - 0.0200 \cdot 2.3979 = 2.2192.$$ ∎

Interpolación polinómica general de Lagrange. Para n en general se obtiene

(4a) $$f(x) \approx p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x)f_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{l_k(x)}{l_k(x_k)} f_k$$

en donde $L_k(x_k) = 1$ y 0 en los otros nodos. Esto se obtiene si se toma

(4b)
$$l_0(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n),$$
$$l_k(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n), \quad 0 < k < n,$$
$$l_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}).$$

Es fácil ver que $p_n(x_k) = f_k$. En efecto, al analizar (4b) se observa que $l_k(x_k) = 0$ si $j \neq k$, de modo que para $x = x_k$, la suma en (4a) se reduce al simple término $(l_k(x_k)/lk(x_k))f_k = f_k$.

Estimación del error. Si f es en sí un polinomio de grado n (o menos), entonces debe coincidir con p_n porque los $n + 1$ datos $(x_0, f_0), \cdots, (x_n, f_n)$ determinan un polinomio de manera única, de modo que el error es cero. Así, el f especial tiene su $(n + 1)$-ésima derivada idénticamente cero. Lo anterior hace plausible que para un f *general* su $(n + 1)$-ésima derivada $f^{(n+1)}$ debe medir el error $\epsilon_n(x) = f(x) - p_n(x)$. Es posible demostrar que esto es cierto si $f^{(n+1)}$ existe y es continua, y que, con una t idónea entre x_0 y x_n (o entre x_0, x_n y x si se extrapola),

$$(5) \qquad \boxed{\epsilon_n(x) = f(x) - p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}.}$$

Por tanto, $\epsilon_n(x) = 0$ en los nodos. También, se obtienen cotas del error al tomar los valores menor y mayor de $f^{(n+1)}(t)$ sobre el intervalo $x_0 \leqq t \leqq x_n$ (o sobre el intervalo que también contiene a x, en caso de que se *extra*pole). Lo que es más importante: como p_n es único, como acaba de demostrarse, entonces se tiene el siguiente

Teorema 1 (Error de interpolación)

Con la fórmula (5) se obtiene el error para ***cualquier*** *método de interpolación polinómica si la $(n + 1)$-ésima derivada de $f(x)$ es continua.*

Ejemplo 3. Estimación del error de la interpolación lineal. Daño por redondeo.

Estimar el error en el ejemplo 1 aplicando la expresión (5).

Solución. $n = 1$, $f(t) = \ln t$, $f'(t) = 1/t$, $f''(t) = -1/t^2$, de donde

$$\epsilon_1(x) = (x - 9.0)(x - 9.5)\frac{(-1)}{2t^2}, \qquad \text{así} \qquad \epsilon_1(9.2) = \frac{0.03}{t^2}.$$

Con $t = 9.0$ se obtiene el máximo $0.03/9^2 = 0.00037$ y con $t = 9.5$ se obtiene el mínimo $0.03/9.5^2 = 0.00033$, de modo que se obtiene $0.00033 \leqq \epsilon_1(9.2) \leqq 0.00037$ o, lo que es mejor, 0.00038 porque $0.3/81 = 0.003703 \cdots$.

Pero el error 0.0004 en el ejemplo 1 no concuerda, por lo que es posible aprender algo. Al repetir el cálculo con 5D en vez de con 4D se obtiene

$$\ln 9.2 \approx p_1(9.2) = 0.6 \cdot 2.19722 + 0.4 \cdot 2.25129 = 2.21885$$

con un error real $\epsilon = 2.21920 - 2.21885 = 0.00035$, que está satisfactoriamente próximo a la mitad entre las dos cotas para el error.

Lo anterior muestra que la discrepancia (0.0004 contra 0.00038) fue causada por el redondeo, que no es tomado en cuenta en (5). ∎

Interpolación de Newton con diferencias divididas

En la práctica, a menudo no se conoce el grado del polinomio de interpolación con el que se obtendrá la exactitud requerida, por lo que es necesario prepararse para incrementar el grado en caso de ser necesario. Mientras que en la interpolación de Lagrange sería necesario un polinomio totalmente nuevo, en la interpolación de Newton es

posible usar el trabajo ya realizado y simplemente agregar otro término, como se mostrará a continuación. Sea $p_{n-1}(x)$ el $(n - 1)$-ésimo polinomio de Newton (cuya forma se determinará posteriormente); así, $p_{n-1}(x_0) = f_0, \cdots, p_{n-1}(x_{n-1}) = f_{n-1}$. Además, el n-ésimo polinomio de Newton se escribirá como

$$(6) \qquad p_n(x) = p_{n-1}(x) + g_n(x),$$

con

$$(6') \qquad g_n(x) = p_n(x) - p_{n-1}(x)$$

a determinar de modo que $p_n(x_0) = f_0, \cdots, p_n(x_n) = f_n$.

Como p_n y p_{n-1} coinciden en $x_0, \cdots, x_{n-1}$, se observa que g_n es cero ahí. También, por lo general g_n es un polinomio de grado n porque este es el grado de p_n, en tanto que p_{n-1} puede ser cuando mucho de grado $n - 1$. Así, g_n debe ser de la forma

$$(6'') \qquad g_n(x) = a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}).$$

A continuación se determinará la constante a_n. Para lograrlo, se hace $x = x_n$ y (6") se resuelve algebraicamente para a_n. Al sustituir $g_n(x_n)$ según (6') y usar $p_n(x_n) = f_n$, se observa que con lo anterior se obtiene

$$(7) \qquad a_n = \frac{f_n - p_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1})}.$$

Se demostrará que a_k es igual a la **k-ésima diferencia dividida**, que se denota y define recursivamente como

$$a_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0},$$

$$a_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0},$$

y en general

$$(8) \qquad \boxed{a_k = f[x_0, \cdots, x_k] = \frac{f[x_1, \cdots, x_k] - f[x_0, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}.}$$

Demostración. Si $n = 1$, entonces $p_{n-1}(x_n) = p_0(x_1) = f_0$, de modo que con (7) se obtiene

$$a_1 = \frac{f_1 - p_0(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1],$$

y con (6) y (6") se obtiene el polinomio de interpolación de Newton de primer grado

$$p_1(x) = f_0 + (x - x_0)f[x_0, x_1].$$

Si $n = 2$, entonces con este p_1 y con (7) se obtiene

$$a_2 = \frac{f_2 - p_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{f_2 - f_0 - (x_2 - x_0)f[x_0, x_1]}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = f[x_0, x_1, x_2]$$

en donde la última igualdad se obtiene por cálculo directo y por comparación con la definición del miembro derecho. (Comprobar este hecho.) A partir de (6) y (6") se obtiene entonces el segundo polinomio de Newton

$$p_2(x) = f_0 + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2].$$

Para $n = k$, al aplicar la fórmula (6) se obtiene

$$(9) \quad p_k(x) = p_{k-1}(x) + (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})f[x_0, \cdots, x_k].$$

Con $p_0(x) = f_0$ por aplicación repetida con $k = 1, \cdots, n$, finalmente se obtiene la **fórmula de interpolación con diferencias divididas de Newton**.

$$(10) \quad f(x) \approx f_0 + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \cdots + (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})f[x_0, \cdots, x_n].$$

En la tabla 18-2 se presenta un algoritmo. En el primer ciclo "do" (de ejecución) se calculan las diferencias divididas y en el segundo, el valor deseado $p_n(\hat{x})$.

En el ejemplo 4 se muestra cómo arreglar diferencias próximas a los valores a partir de los cuales se obtienen; las últimas siempre están a medio renglón hacia arriba y medio renglón hacia abajo en la columna previa. Tal arreglo se denomina **tabla de diferencias** (divididas). ∎

Ejemplo 4. Fórmula de interpolación con diferencias divididas de Newton.

Calcular $f(9.2)$ a partir de los valores dados.

x_j	$f_j = f(x_j)$	$f[x_j, x_{j+1}]$	$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}]$	$f[x_j, \cdots, x_{j+3}]$
8.0	(2.079 442)			
		(0.117 783)		
			(−0.0006 433)	
9.0	2.197 225			(0.000 411)
		0.108 134		
			−0.005 200	
9.5	2.251 292			
		0.097 735		
11.0	2.397 895			

Solución. Las diferencias divididas se calculan como se muestra. Cálculo por muestreo: $(0.097735 - 0.108134)/(11 - 9) = -0.005200$. Los valores que se requieren en (10) están encerrados en un círculo. Se tiene

$$f(x) \approx p_3(x) = 2.079\ 442 + 0.117\ 783(x - 8.0) - 0.006\ 433(x - 8.0)(x - 9.0) + 0.000\ 411(x - 8.0)(x - 9.0)(x - 9.5).$$

En $x = 9.2$,

$$f(9.2) \approx 2.079\ 442 + 0.141\ 340 - 0.001\ 544 - 0.000\ 030 = 2.219\ 208.$$

El valor exacto hasta 6D es $f(9.2) = \ln 9.2 = 2.219203$. Observar que puede verse satisfactoriamente cómo la exactitud aumenta de término a término:

$$p_1(9.2) = 2.220\ 782, \quad p_2(9.2) = 2.219\ 238, \quad p_3(9.2) = 2.219\ 203.$$ ∎

Tabla 18-2
Interpolación de Newton con diferencias divididas

ALGORITMO INTERPOL $(x_0, \cdots x_n; f_0, \cdots, f_n; \hat{x})$

Este algoritmo calcula una aproximación $p_n(\hat{x})$ de $f(\hat{x})$ en $\hat{x}$.

ENTRADA: Datos $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \cdots, (x_n, f_n)$; $\hat{x}$

SALIDA: Aproximación $p_n(\hat{x})$ de $f(\hat{x})$

Hacer $f[x_j] = f_j$ $(j = 0, \cdots, n)$.

Para $m = 1, \cdots, n - 1$, ejecutar:

Para $j = 0, \cdots, n - m$, ejecutar:

$$f[x_j, \cdots, x_{j+m}] = \frac{f[x_{j+1}, \cdots, x_{j+m}] - f[x_j, \cdots, x_{j+m-1}]}{x_{j+m} - x_j}$$

Fin

Fin

Hacer $p_0(x) = f_0$.

Para $k = 1, \cdots, n$, ejecutar:

$$p_k(\hat{x}) = p_{k-1}(\hat{x}) + (\hat{x} - x_0) \cdots (\hat{x} - x_{k-1})f[x_0, \cdots, x_k]$$

Fin

SALIDA $p_n(\hat{x})$

Fin de INTERPOL

Separación igual: Fórmula de interpolación con diferencias hacia adelante de Newton

La fórmula de Newton (10) es válida para nodos *arbitrariamente espaciados* como pueden ocurrir en la práctica en experimentos u observaciones. Sin embargo, en muchas aplicaciones las x_j están *separadas de manera regular*, por ejemplo, en tablas de funciones o en mediciones a intervalos regulares de tiempo. Así, es posible escribir

$$\text{(11)} \qquad \boxed{x_0, \quad x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \quad \cdots, \quad x_n = x_0 + nh.}$$

Se demostrará cómo en este caso se simplifican (8) y (10).

Para empezar, la *primera diferencia hacia adelante* de f en x_j se define como

$$\Delta f_j = f_{j+1} - f_j,$$

la *segunda diferencia hacia adelante* de f en x_j se define como

$$\Delta^2 f_j = \Delta f_{j+1} - \Delta f_j,$$

y, continuando de esta manera, la **k-ésima diferencia hacia adelante** de f en x_j se define como

$$\text{(12)} \qquad \boxed{\Delta^k f_j = \Delta^{k-1} f_{j+1} - \Delta^{k-1} f_j} \qquad (k = 1, 2, \cdots).$$

A continuación se proporcionan ejemplos y la explicación de la expresión "hacia adelante". ¿Cuál es el interés de hacer esto? Se demostrará que si se tiene un espaciamiento regular (11), entonces

$$\text{(13)} \qquad f[x_0, \cdots, x_k] = \frac{1}{k!h^k} \Delta^k f_0.$$

Ahora, (13) se demostrará por inducción. Es verdadera para $k = 1$ porque $x_1 = x_0 + h$, de modo que

$$f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{1}{h}(f_1 - f_0) = \frac{1}{1!\,h} \Delta f_0.$$

Suponiendo que (13) es verdadera para todas las diferencias hacia adelante de orden k, se demostrará que también se cumple para $k + 1$. Se aplica (8) con $k + 1$ en vez de k, por lo que $x_{k+1} = x_0 + (k + 1)h$, que resulta de (11), y finalmente (12) con $j = 0$. Así, se obtiene

$$\begin{aligned} f[x_0, \cdots, x_{k+1}] &= \frac{f[x_1, \cdots, x_{k+1}] - f[x_0, \cdots, x_k]}{(k+1)h} \\ &= \frac{1}{(k+1)h}\left[\frac{1}{k!h^k}\Delta^k f_1 - \frac{1}{k!h^k}\Delta^k f_0\right] \\ &= \frac{1}{(k+1)!h^{k+1}} \Delta^{k+1} f_0 \end{aligned}$$

que es (13) con $k + 1$ en vez de k. Se ha demostrado la fórmula (13). ∎

Por último, en (10) se hace $x = x_0 + rh$. Entonces $x - x_0 = rh$, $x - x_1 = (r - 1)h$ porque $x_1 - x_0 = h$, etc. Con lo anterior y (13), la fórmula (10) se vuelve la **fórmula de interpolación con diferencias hacia adelante de Newton** (o *de Gregory*[10]*-Newton*)

$$\text{(14)} \qquad \boxed{\begin{aligned} f(x) \approx p_n(x) &= \sum_{s=0}^{n} \binom{r}{s} \Delta^s f_0 \qquad\qquad (x = x_0 + rh, \quad r = (x - x_0)/h) \\ &= f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}\Delta^n f_0 \end{aligned}}$$

en donde los **coeficientes binomiales** en el primer renglón se definen como

$$\text{(15)} \qquad \binom{r}{0} = 1, \quad \binom{r}{s} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-s+1)}{s!} \qquad (s > 0, \text{ número})$$

y $s! = 1 \cdot 2 \cdots s$.

Error. A partir de (5) se obtiene, con $x - x_0 = rh$, $x - x_1 = (r - 1)h$, etc.,

$$\text{(16)} \qquad \boxed{\epsilon_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} r(r-1)\cdots(r-n) f^{(n+1)}(t)}$$

con t como en (5). El siguiente ejemplo explica la aplicación.

Comentarios sobre la exactitud. (A) El error $\epsilon_n(x)$ es aproximadamente del orden de magnitud de la siguiente diferencia no usada en $p_n(x)$.

(B) Es necesario elegir $x_0, \cdots, x_n$ de modo que la x en que se interpola esté lo mejor centrada posible entre $x_0, \cdots, x_n$.

La razón que explica a (A) es que en (16)

$$f^{n+1}(t) \approx \frac{\Delta^{n+1} f(t)}{h^{n+1}}, \qquad \frac{|r(r-1)\cdots(r-n)|}{1 \cdot 2 \cdots (n+1)} \leqq 1 \quad \text{si} \quad |r| \leqq 1$$

(y en realidad para cualquier r, en la medida en que no se *extrapole*). La razón para (B) es que $|r(r-1)\cdots(r-n)|$ se vuelve lo más pequeño posible para tal elección.

Ejemplo 5. Fórmula de Newton con diferencias hacia adelante. Estimación del error.

Calcular cosh 0.56 a partir de (14) y los cuatro valores en la siguiente tabla y estimar el error.

---

[10] JAMES GREGORY (1638-1675), matemático escocés, profesor en San Andrés y Edimburgo

j	x_j	$f_j = \cosh x_j$	Δf_j	$\Delta^2 f_j$	$\Delta^3 f_j$
0	0.5	1.127 626			
			0.057 839		
1	0.6	1.185 465		0.011 865	
			0.069 704		0.000 697
2	0.7	1.255 169		0.012 562	
			0.082 266		
3	0.8	1.337 435			

Solución. Las diferencias hacia adelante se calculan como se muestra en la tabla. Los valores necesarios están encerrados en un círculo. En (14) se tiene $r = (0.56 - 0.50)/0.1 = 0.6$, de modo que con (14) se obtiene

$$\cosh 0.56 \approx 1.127\ 626 + 0.6 \cdot 0.057\ 839 + \frac{0.6(-0.4)}{2} \cdot 0.011\ 865 + \frac{0.6(-0.4)(-1.4)}{6} \cdot 0.000\ 697$$

$$= 1.127\ 626 + 0.034\ 703 - 0.001\ 424 + 0.000\ 039 = 1.160\ 944.$$

Estimación del error. Por (16), como $\cosh^{(4)} t = \cosh t$,

$$\epsilon_3(0.56) = \frac{0.1^4}{4!} \cdot 0.6(-0.4)(-1.4)(-2.4) \cosh t = A \cosh t,$$

en donde $A = -0.00000336$ y $0.5 \leqq t \leqq 0.8$. No se conoce t, pero al tomar el mayor y menor $\cosh t$ en tal intervalo se obtiene una desigualdad:

$$A \cosh 0.8 \leqq \epsilon_3(0.62) \leqq A \cosh 0.5.$$

Como $f(x) = p_3(x) + \epsilon_3(x)$, con lo anterior se obtiene

$$p_3(0.56) + A \cosh 0.8 \leqq \cosh 0.56 \leqq p_3(0.56) + A \cosh 0.5.$$

Valores numéricos son

$$1.160\ 939 \leqq \cosh 0.56 \leqq 1.160\ 941.$$

El valor exacto hasta 6D es $\cosh 0.56 = 1.160941$, que está dentro de las cotas indicadas. Tales cotas no siempre son tan estrictas. También, no se consideran errores por redondeo, que dependen del número de operaciones efectuadas. ∎

Este ejemplo también explica la expresión "fórmula con diferencias hacia *adelante*"; se observa que las diferencias en la fórmula tienden hacia adelante en la tabla de diferencias.

Separación igual: Fórmula de interpolación con diferencias hacia atrás de Newton

En vez de diferencias que tienden hacia adelante también es posible emplear diferencias que tienden hacia atrás. La tabla de diferencias queda igual (los mismos números, en las mismas posiciones), excepto por un ligero cambio muy inofensivo en el subíndice j (que se explicará en el ejemplo 6, a continuación). A pesar de lo anterior, exclusivamente por razones de conveniencia es normal introducir otra denominación y notación para las diferencias como se muestra enseguida. La *primera diferencia hacia atrás* de f en x_j se define como

$$\nabla f_j = f_j - f_{j-1},$$

la *segunda diferencia hacia atrás* de f en x_j se define como

$$\nabla^2 f_j = \nabla f_j - \nabla f_{j-1},$$

y, continuando de esta manera, la **k-ésima diferencia hacia atrás** de f en x_j se define como

$$\text{(17)} \qquad \boxed{\nabla^k f_j = \nabla^{k-1} f_j - \nabla^{k-1} f_{j-1}} \qquad (k = 1, 2, \cdots).$$

Una fórmula semejante a (14) pero que implica diferencias hacia atrás es la **fórmula de interpolación con diferencias hacia atrás de Newton** (o *de Gregory-Newton*)

$$\text{(18)} \quad \begin{aligned} f(x) \approx p_n(x) &= \sum_{s=0}^{n} \binom{r+s-1}{s} \nabla^s f_0 \qquad (x = x_0 + rh,\ r = (x - x_0)/h) \\ &= f_0 + r\nabla f_0 + \frac{r(r+1)}{2!}\nabla^2 f_0 + \cdots + \frac{r(r+1)\cdots(r+n-1)}{n!}\nabla^n f_0. \end{aligned}$$

Ejemplo 6. Interpolaciones hacia adelante y hacia atrás de Newton.

Calcular un valor hasta 7D de la función de Bessel $J_0(x)$ para $x = 1.72$ a partir de los cuatro valores que se proporcionan en la tabla siguiente, usando (a) la fórmula hacia adelante de Newton (14), (b) la fórmula hacia atrás de Newton (18)

j_{for}	j_{back}	x_j	$J_0(x_j)$	1st Diff.	2nd Diff.	3rd Diff.
0	−3	1.7	0.397 9849			
				−0.057 9985		
1	−2	1.8	0.339 9864		−0.000 1693	
				−0.058 1678		0.000 4093
2	−1	1.9	0.281 8186		0.000 2400	
				−0.057 9278		
3	0	2.0	0.223 8908			

Solución. El cálculo de las diferencias es el mismo en ambos casos. Sólo es diferente la notación.

(a) Hacia adelante. En (14) se tiene $r = (1.72 - 1.70)/0.1 = 0.2$, y j varía desde 0 hasta 3 (ver la primera columna). En cada columna es necesario el primer número dado, por lo que con (14) se obtiene entonces

$$J_0(1.72) \approx 0.397\ 9849 + 0.2(-0.057\ 9985) + \frac{0.2(-0.8)}{2}(-0.000\ 1693)$$
$$+ \frac{0.2(-0.8)(-1.8)}{6} \cdot 0.000\ 4093$$
$$= 0.397\ 9849 - 0.011\ 5997 + 0.000\ 0135 + 0.000\ 0196$$
$$= 0.386\ 4183,$$

que es exacto hasta 6D; y el valor exacto hasta 7D es 0.3864185.

(b) Hacia atrás. Para (18) se usa la j mostrada en la segunda columna, y en cada columna el último número. Como $r = (1.72 - 2.00)/0.1 = -2.8$, entonces a partir de (18) se obtiene

$$J_0(1.72) \approx 0.223\ 8908 - 2.8(-0.057\ 9278) + \frac{-2.8(-1.8)}{2} \cdot 0.000\ 2400$$
$$+ \frac{-2.8(-1.8)(-0.8)}{6} \cdot 0.000\ 4093$$
$$= 0.223\ 8908 + 0.162\ 1978 + 0.000\ 6048 - 0.000\ 2750$$
$$= 0.386\ 4184.$$

Notación de la diferencia central

Para las diferencias existe una tercera notación, que es de utilidad en ciertas fórmulas de interpolación (ver, por ejemplo, el problema 21), en derivación numérica que se analizará en la sección 18.5, y en relación con ecuaciones diferenciales (capítulo 20). Se trata de la notación de la diferencia central. La *primera diferencia central* de $f(x)$ en x_j se define como

$$\delta f_j = f_{j+1/2} - f_{j-1/2}$$

y la **k-ésima diferencia central** de $f(x)$ en x_j se define como

$$\text{(19)} \qquad \boxed{\delta^k f_j = \delta^{k-1} f_{j+1/2} - \delta^{k-1} f_{j-1/2}} \qquad (j = 2, 3, \cdots).$$

Por tanto, en esta notación una tabla de diferencias, por ejemplo para f_{-1}, f_0, f_1, f_2, es como sigue:

x_{-1}	f_{-1}			
		$\delta f_{-1/2}$		
x_0	f_0		$\delta^2 f_0$	
		$\delta f_{1/2}$		$\delta^3 f_{1/2}$
x_1	f_1		$\delta^2 f_1$	
		$\delta f_{3/2}$		
x_2	f_2			

Interpolación inversa

El problema de determinar x para $f(x)$ dada se denomina **interpolación inversa**. Si f es diferenciable y df/dx es diferente de cero cerca del punto en que la interpolación inversa habrá de efectuarse, entonces la inversa $x = F(y)$ de $y = f(x)$ existe localmente cerca del valor dado de f y es posible que F pueda aproximarse en esa vecindad por un polinomio de grado moderadamente bajo. Luego es posible efectuar la interpolación inversa tabulando F como una función de y y aplicando métodos de interpolación directa a F. Si $df/dx = 0$ cerca o en el punto deseado, entonces es de utilidad resolver $p(x) = \tilde{f}$ por iteración; aquí, $p(x)$ es un polinomio que aproxima $f(x)$ y $\tilde{f}$ es el valor dado.

Problemas de la sección 18-3

1. Calcular $p_1(x)$ en el ejemplo 1 a partir de $\ln 9.4 \approx p_1(9.4)$.
2. Estimar el error en el problema 1 aplicando la fórmula (5).
3. Calcular el polinomio de Lagrange $p_2(x)$ para los valores hasta 4D de la función gamma [(24), apéndice 3.1]; a saber, $\Gamma(1.00) = 1.0000$, $\Gamma(1.02) = 0.9888$, $\Gamma(1.04) = 0.9784$, y a partir de ese polinomio calcular aproximaciones de $\Gamma(1.01)$ y $\Gamma(1.03)$.
4. Calcular $p_2(x)$ en el ejemplo 2. A partir de este polinomio calcular aproximaciones de ln 9.4, ln 10, ln 10.5, ln 11.5, ln 12, calcular los errores usando valores exactos hasta 4D, y hacer un comentario.
5. Calcular el polinomio de Lagrange $p_2(x)$ para los valores hasta 4D de la integral senoidal $\mathrm{Si}(x)$ [(40), apéndice 3.1]; a saber, $\mathrm{Si}(0) = 0$, $\mathrm{Si}(1) = 0.9461$, $\mathrm{Si}(2) = 1.6054$, y a partir de p_2 calcular aproximaciones de $\mathrm{Si}(0.5)$ (= 0.4931, 4D) y $\mathrm{Si}(1.5)$ (= 1.3247, 4D).
6. A partir de (5) obtener cotas para el error para $p_2(9.2)$ en el ejemplo 2.
7. Calcular el polinomio de Lagrange $p_2(x)$ para los valores hasta 5D de la función error $f(x)$ = fer $x = (2/\sqrt{\pi})\int_0^x e^{-w^2}\,dw$, a saber, $f(0.25) = 0.27633$, $f(0.5) = 0.52050$, $f(1) = 0.84270$, y a partir de p_2 calcular una aproximación de $f(0.75)$ (= 0.71116, 5D).
8. A partir de (5) obtener una cota para el error en el problema 7.
9. Establecer la fórmula con diferencias hacia adelante de Newton para los datos del problema 3 y calcularla a partir de $\Gamma(1.01)$, $\Gamma(1.03)$, $\Gamma(1.05)$.
10. Establecer la fórmula con diferencias divididas de Newton para los datos del problema 4 y obtenerla a partir de $p_2(x)$ en el problema 4.
11. Hacer lo mismo que en el problema 10 para los datos del problema 7.
12. En el ejemplo 5 escribir la fórmula con diferencias hacia atrás con x general y luego aplicarla para comprobar cosh 0.56 en el ejemplo 5.
13. Establecer la fórmula con diferencias hacia adelante de Newton para los datos del problema 5 y obtenerla a partir de $p_2(x)$ el problema 5.
14. Usando (10), por interpolación cúbica calcular $f(6.5)$ a partir de $f(6.0) = 0.1506$, $f(7.0) = 0.3001$, $f(7.5) = 0.2663$, $f(7.7) = 0.2346$.
15. Calcular $f(0.8)$ y $f(0.9)$ a partir de $f(0.5) = 0.479$, $f(1.0) = 0.841$, $f(2.0) = 0.909$ por interpolación cuadrática.
16. Usando una tabla de diferencias, calcular la función de Bessel $J_1(x)$ para[11] $x = 0.1(0.2)0.9$ a partir de $J_1(x)$ para $x = 0(0.2)1.0$ dada por 0, 0.09950, 0.19603, 0.28670, 0.36884 y 0.44005, respectivamente.

[11] La notación estándar $x = a(h)b$ significa $x = a, a + h, a + 2h, \cdots, b$.

17. Escribir las diferencias en la tabla del ejemplo 5 en notación de diferencias centrales.
18. Calcular una tabla de diferencias de $f(x) = x^3$ para[11] $x = 0(1)5$. Elegir $x_0 = 2$ y escribir todos los números que ocurren, en términos de las notaciones de (a) diferencias centrales, (b) diferencias hacia adelante, (c) diferencias hacia atrás.
19. Demostrar que $\delta^n f_m = \Delta^n f_{m-n/2} = \nabla^n f_{m+n/2}$.
20. Demostrar que $\delta^2 f_m = f_{m+1} - 2f_m + f_{m-1}$, $\delta^3 f_{m+1/2} = f_{m+2} - 3f_{m+1} + 3f_m - f_{m-1}$.
21. **(Fórmula de interpolación de Everett)** Existen fórmulas que implican sólo diferencias de orden par. Una de éstas especialmente útil es la **fórmula de Everett**

$$f(x) \approx (1-r)f_0 + rf_1 + \frac{(2-r)(1-r)(-r)}{3!}\delta^2 f_0 + \frac{(r+1)r(r-1)}{3!}\delta^2 f_1 \tag{20}$$

en donde $r = (x - x_0)/h$. Aplicar esta fórmula para calcular $e^{1.24}$ a partir de $e^{1.1} = 3.004166$, $e^{1.2} = 3.320117$, $e^{1.3} = 3.669297$, $e^{1.4} = 4.055200$.
22. El error en la fórmula de Everett es

$$\epsilon(x) = f(x) - p(x) = h^4 \binom{r+1}{4} f^{(4)}(t), \tag{21}$$

en donde $p(x)$ denota el miembro derecho de (20) y $x_0 - h < t < x_0 + 2h$. Aplicar esta fórmula para obtener cotas para el error en el problema 21.
23. Usar (20) para calcular $J_0(1.72)$ a partir de $J_0(1.60) = 0.4554022$ y $J_0(1.7)$, $J_0(1.8)$, $J_0(1.9)$, en el ejemplo 6. Observar que la exactitud es mayor que en el ejemplo 6, aunque el trabajo computacional es menor. ¿Puede el lector explicar este hecho?
24. Calcular $J_1(x)$ para $x = 0.1(0.2)0.9$ a partir de $J_1(x)$ para $x = 0.2(0.2)0.8$ [dado en el problema 16] aplicando la fórmula de Everett.

18.4 INTERPOLACIÓN SEGMENTARIA (SPLINES)

Podría esperarse que la calidad de la interpolación aumente al aumentar el grado n del polinomio usado. Desafortunadamente, en términos generales esto no es cierto. En efecto, para varias funciones f, los polinomios de interpolación correspondientes pueden tender a oscilar más y más entre los nodos a medida que n crece. Por tanto, es necesario prepararse para tratar con posible **inestabilidad numérica**. En la figura 407 se muestra un famoso ejemplo para el que C. Runge[12] ha demostrado que para

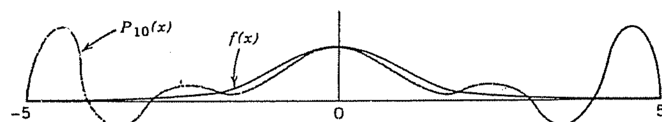


Figura 407. Ejemplo de Runge $f(x) = 1/(1 + x^2)$ y polinomio de interpolación $P_{10}(x)$.

[12] Ver el problema 20 en los problemas de la sección 19.7.

nodos equidistantes el error máximo tiende a infinito cuando $n \to \infty$. (Ver las obras citadas en la bibliografía como [E13], págs. 275-279, y [E24], p.148.) En la figura 408 se muestra cómo el error se vuelve más grande con n creciente.

En esta sección se analizará un método popular e importante: el método de interpolación segmentaria, con el que se evita la desventaja mencionada. Este método fue iniciado en 1946 por I. J. Schoenberg (*Quarterly of Applied Mathematics* 4 (1946), págs. 45-99, 112-141), y ha encontrado varias aplicaciones.

La **interpolación segmentaria** es interpolación polinómica por secciones. Esto significa que se tiene una función $f(x)$ sobre un intervalo $a \leq x \leq b$ y se desea aproximar $f(x)$ sobre este intervalo por una función $g(x)$ que se obtiene como se muestra a continuación. Se hace una *partición* de $a \leq x \leq b$; es decir, se subdivide en subintervalos con puntos extremos comunes, que nuevamente se denominan **nodos**,

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b. \tag{1}$$

Luego, se requiere que $g(x_0) = f(x_0), \cdots, g(x_n) = f(x_n)$, y que en estos subintervalos $g(x)$ esté definida por polinomios, uno por subintervalo, de modo que $g(x)$ sea varias veces diferenciable en los nodos. Por tanto, en vez de aproximar $f(x)$ mediante un solo polinomio sobre todo el intervalo $a \leq x \leq b$, ahora $f(x)$ se aproxima por n polinomios. Así es posible obtener una función de aproximación $g(x)$ que es más idónea en muchos problemas de interpolación y aproximación. En particular, este método es numéricamente ***estable*** en general; estas $g(x)$ no son tan oscilatorias entre nodos como a menudo lo es un solo polinomio sobre $a \leq x \leq b$. Las funciones $g(x)$ así obtenidas se denominan **splines**. Esta denominación se deriva de las delgadas reglas elásticas, denominadas *splines* o *cerchas*, que los ingenieros han utilizado durante mucho tiempo para ajustar curvas que deben pasar por puntos dados.

La aproximación polinómica por secciones continua más simple debe ser realizada mediante funciones *lineales* por secciones. Sin embargo, las gráficas de tales funciones presentan esquinas, por lo que revisten poco interés práctico (piense el lector en el diseño del cuerpo de una nave o de un automóvil). Así, es preferible usar funciones que poseen un número determinado de derivadas *en todas partes* sobre el intervalo $a \leq x \leq b$.

Se considerarán splines cúbicos, que quizá son las más importantes desde un punto de vista práctico. Por definición, un **spline cúbico** $g(x)$ sobre $a \leq x \leq b$ correspondiente a la partición (1) es una función continua $g(x)$ que tiene primera y segunda derivadas continuas en todas partes sobre este intervalo y, en cada subintervalo de la

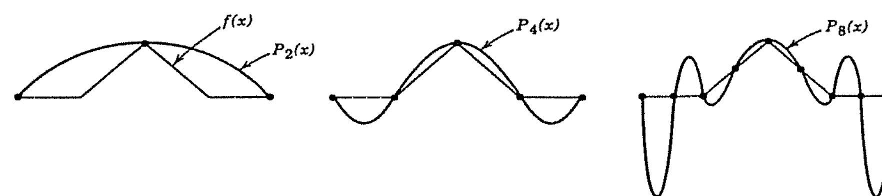


Figura 408. Función $f(x)$ lineal por secciones y polinomios de interpolación de grados crecientes.

partición (1), está representada por un polinomio de grado no mayor que tres. Por tanto, $g(x)$ consta de n de tales polinomios, uno en cada subintervalo.

Si se tiene $f(x)$ sobre $a \leqq x \leqq b$ y se ha elegido una partición (1), entonces se obtiene un spline cúbico $g(x)$ que aproxima a $f(x)$ al requerir que

$$(2) \quad g(x_0) = f(x_0) = f_0, \quad g(x_1) = f(x_1) = f_1, \quad \cdots, \quad g(x_n) = f(x_n) = f_n,$$

así como en el problema de interpolación clásico de la sección precedente. Se afirma que existe un spline cúbico $g(x)$ que satisface estas condiciones (2). Y si también se requiere que

$$(3) \quad g'(x_0) = k_0, \qquad g'(x_n) = k_n$$

(k_0 y k_n números dados), entonces se obtiene un spline cúbico determinado de manera única. Este es el contenido del siguiente teorema de existencia y unicidad, cuya demostración también preparará el camino para la obtención práctica de splines.

Teorema 1 (Splines cúbicos)

Sea $f(x)$ definida sobre el intervalo $a \leqq x \leqq b$, sea una partición (1) dada, y sean k_0 y k_n dos números dados cualesquiera. Entonces existe una y sólo un spline cúbico $g(x)$ correspondiente a (1) que satisface (2) y (3).

Demostración. Por definición, sobre todo subintervalo I_j definido por $x_j \leqq x \leqq x_{j+1}$, el **spline** $g(x)$ debe coincidir con un polinomio $p_j(x)$ de grado no mayor que tres, tal que

$$(4) \quad p_j(x_j) = f(x_j), \qquad p_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1}).$$

Se escribe $1/(x_{j+1} - x_j) = c_j$ y

$$(5) \quad p_j'(x_j) = k_j, \qquad p_j'(x_{j+1}) = k_{j+1},$$

en donde k_0 y k_n están dados, y $k_1, \cdots, k_{n-1}$ se determinarán más tarde. Las ecuaciones (4) y (5) son cuatro condiciones para $p_j(x)$. Por cálculo directo es posible comprobar que el único polinomio cúbico $p_j(x)$ que satisface (4) y (5) es

$$(6) \quad \begin{aligned} p_j(x) = {} & f(x_j)c_j^2(x - x_{j+1})^2[1 + 2c_j(x - x_j)] \\ & + f(x_{j+1})c_j^2(x - x_j)^2[1 - 2c_j(x - x_{j+1})] \\ & + k_jc_j^2(x - x_j)(x - x_{j+1})^2 \\ & + k_{j+1}c_j^2(x - x_j)^2(x - x_{j+1}). \end{aligned}$$

Al derivar dos veces se obtiene

$$(7) \quad p_j''(x_j) = -6c_j^2 f(x_j) + 6c_j^2 f(x_{j+1}) - 4c_jk_j - 2c_jk_{j+1}$$

$$(8) \quad p_j''(x_{j+1}) = 6c_j^2 f(x_j) - 6c_j^2 f(x_{j+1}) + 2c_jk_j + 4c_jk_{j+1}.$$

Por definición, $g(x)$ tiene segundas derivadas continuas. Así se obtienen las condiciones

$$p_{j-1}''(x_j) = p_j''(x_j) \qquad (j = 1, \cdots, n - 1).$$

Si se aplica (8) con j sustituida por $j - 1$, y (7), entonces estas $(n - 1)$ ecuaciones se vuelven

$$(9) \quad c_{j-1}k_{j-1} + 2(c_{j-1} + c_j)k_j + c_jk_{j+1} = 3[c_{j-1}^2 \nabla f_j + c_j^2 \nabla f_{j+1}].$$

En estas ecuaciones, $\nabla f_j = f(x_j) - f(x_{j-1})$ y $\nabla f_{j+1} = f(x_{j+1}) - f(x_j)$ y $j = 1, \cdots, n - 1$, como antes. Este sistema lineal de $n - 1$ ecuaciones tiene una solución única $k_1, \cdots, k_{n-1}$ porque todos los coeficientes del sistema son no negativos y cada elemento de la diagonal principal es mayor que la suma de los demás elementos en el renglón correspondiente, de modo que el determinante de coeficientes no puede ser cero. (Ver el problema 20 en los problemas de la sección 19.7.) Por tanto, ya es posible determinar los valores únicos $k_1, \cdots, k_{n-1}$ de la primera derivada de $g(x)$ en los nodos. Así se completa la demostración. ■

A continuación se mostrará cómo es posible aplicar las fórmulas de esta demostración para la determinación real de un spline. Por comodidad se considerará el caso de nodos equidistantes $x_0, x_1 = x_0 + h, \cdots, x_n = x_0 + nh$, en donde la idea de nodos no equidistantes es la misma (sólo que las fórmulas son ligeramente más complicadas). Así, se tiene $c_j = 1/(x_{j+1} - x_j) = 1/h$, de modo que (9), después de multiplicar por h y con la notación previa $f(x_j) = f_j$, simplemente se vuelve

$$(10) \quad k_{j-1} + 4k_j + k_{j+1} = \frac{3}{h}(f_{j+1} - f_{j-1}), \qquad j = 1, \cdots, n - 1,$$

k_0 y k_n están dados, por ejemplo, como $k_0 = f'(a)$, $k_n = f'(b)$ o de otra manera, y $k_1, \cdots, k_{n-1}$ se obtienen resolviendo el sistema lineal (10) que consta de $n - 1$ ecuaciones. Éste fue el primer paso.

Segundo paso. Se determinan los coeficientes del spline $g(x)$. Sobre el intervalo $x_j \leqq x \leqq x_{j+1} = x_j + h$ el spline $g(x)$ está definido por un polinomio cúbico, que se escribe en la forma

$$(11) \quad p_j(x) = a_{j0} + a_{j1}(x - x_j) + a_{j2}(x - x_j)^2 + a_{j3}(x - x_j)^3.$$

Aplicando la fórmula de Taylor se obtiene

$$(12) \quad \begin{aligned} a_{j0} &= p(x_j) = f_j & \text{por (2)}, \\ a_{j1} &= p_j'(x_j) = k_j & \text{por (5)}, \\ a_{j2} &= \frac{1}{2}p_j''(x_j) = \frac{3}{h^2}(f_{j+1} - f_j) - \frac{1}{h}(k_{j+1} + 2k_j) & \text{por (7)}, \\ a_{j3} &= \frac{1}{6}p_j'''(x_j) = \frac{2}{h^3}(f_j - f_{j+1}) + \frac{1}{h^2}(k_{j+1} + k_j) & \end{aligned}$$

en donde a_{j3} se obtiene al calcular $p''(x_{j+1})$ a partir de (11) e igualando el resultado a (8); es decir,

$$p_j''(x_{j+1}) = 2a_{j2} + 6a_{j3}h = \frac{6}{h^2}(f_j - f_{j+1}) + \frac{2}{h}(k_j + 2k_{j+1}),$$

y luego restando de lo anterior $2a_{j2}$ según se proporciona en (12), y simplificando el resultado.

Ejemplo 1. Interpolación segmentaria.

Interpolar $f(x) = x^4$ sobre el intervalo $-1 \leq x \leq 1$ mediante el spline cúbico $g(x)$ correspondiente a la partición $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ que satisface $g'(-1) = f'(-1)$, $g'(1) = f'(1)$.

Solución. Primero se escriben los datos en notación estándar, $f_0 = f(-1) = 1$, $f_1 = f(0) = 0$, $f_2 = f(1) = 1$. El intervalo dado se divide en $n = 2$ partes de longitud $h = 1$. Así, el spline g consta de $n = 2$ polinomios (11)

$$p_0(x) = a_{00} + a_{01}(x+1) + a_{02}(x+1)^2 + a_{03}(x+1)^3 \qquad (-1 \leq x \leq 0)$$

$$p_1(x) = a_{10} + a_{11}x + a_{12}x^2 + a_{13}x^3 \qquad (0 \leq x \leq 1)$$

Paso 1. El objetivo es determinar los coeficientes de p_0 y p_1, pero (12) muestra que esta determinación implica a las k_j, que así es necesario determinar primero a partir de (10). Como $n = 2$, entonces en (10) se tiene $j = 1$ y se llega a una sola ecuación

$$k_0 + 4k_1 + k_2 = \frac{3}{1}(f_2 - f_0) = 3(1 - 1) = 0.$$

Luego, (5) muestra que $p'_0(x_0) = k_0$ y $p'_1(x_2) = k_2$. Pero $g = p_0$ en $x_0 = -1$ y $g = p_1$ en $x_2 = 1$. Por tanto, como se proporcionó, ($g' = f'$ en ± 1),

$$f'(-1) = -4 = g'(-1) = p_0'(-1) = k_0, \qquad f'(1) = 4 = g'(1) = p_1'(1) = k_2.$$

Al sustituir $k_0 = -4$ y $k_2 = 4$ en (10) se obtiene $k_1 = 0$.

Paso 2. Por (12), ahora ya es posible obtener los coeficientes de p_0,

$$a_{00} = f_0 = 1, \qquad a_{01} = k_0 = -4$$

$$a_{02} = \frac{3}{1^2}(f_1 - f_0) - \frac{1}{1}(k_1 + 2k_0) = 3(0 - 1) - (0 - 8) = 5$$

$$a_{03} = \frac{2}{1^3}(f_0 - f_1) + \frac{1}{1^2}(k_1 + k_0) = 2(1 - 0) + (0 - 4) = -2.$$

De manera semejante, para los coeficientes de p_1, a partir de (12) se obtiene

$$a_{10} = f_1 = 0, \qquad a_{11} = k_1 = 0$$

$$a_{12} = 3(f_2 - f_1) - (k_2 + 2k_1) = 3(1 - 0) - (4 + 0) = -1$$

$$a_{13} = 2(f_1 - f_2) + (k_2 + k_1) = 2(0 - 1) + (4 + 0) = 2.$$

Con lo anterior se obtienen los polinomios

$$p_0(x) = 1 - 4(x+1) + 5(x+1)^2 - 2(x+1)^3 = -x^2 - 2x^3,$$

$$p_1(x) = -x^2 + 2x^3$$

de los cuales está compuesto el spline $g(x)$. En la figura 409 se muestran $f(x)$ y este spline.

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x^3 & \text{cuando } -1 \leq x \leq 0 \\ -x^2 + 2x^3 & \text{cuando } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

¿Se da cuenta de que en caso de haber aplicado simetría hubiera sido posible ahorrar aproximadamente la mitad del trabajo computacional? ∎

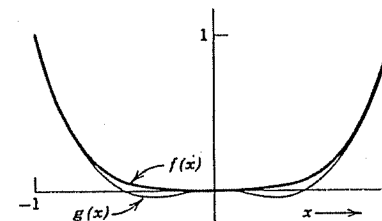


Figura 409. Función $f(x) = x^4$ y spline cúbico $g(z)$ en el ejemplo 1.

Ejemplo 2. Interpolación segmentaria.

Interpolar $f_0 = f(0) = 1$, $f_1 = f(2) = 9$, $f_2 = f(4) = 41$, $f_3 = f(6) = 41$ mediante el spline cúbico que satisface $k_0 = 0$, $k_3 = -12$.

Solución. $n = 3$, $h = 2$, de modo que (10) es

$$k_0 + 4k_1 + k_2 \qquad = \tfrac{3}{2}(f_2 - f_0) = 60$$

$$k_1 + 4k_2 + k_3 = \tfrac{3}{2}(f_3 - f_1) = 48.$$

Como $k_0 = 0$ y $k_3 = -12$, entonces la solución es $k_1 = 12$, $k_2 = 12$.

En (12) con $j = 0$ se tiene $a_{00} = f_0 = 1$, $a_{01} = k_0 = 0$,

$$a_{02} = \tfrac{3}{4}(9 - 1) - \tfrac{1}{2}(12 + 0) = 0$$

$$a_{03} = \tfrac{2}{8}(1 - 9) + \tfrac{1}{4}(12 + 0) = 1.$$

A partir de lo anterior y, de manera semejante, a partir de (12) con $j = 1$ y $j = 2$ se obtiene el spline $g(x)$ que consta de los tres polinomios siguientes (ver la figura 410)

$$p_0(x) = 1 + x^3 \qquad (0 \leq x \leq 2)$$

$$p_1(x) = 9 + 12(x-2) + 6(x-2)^2 - 2(x-2)^3 = 25 - 36x + 18x^2 - 2x^3 \qquad (2 \leq x \leq 4)$$

$$p_2(x) = 41 + 12(x-4) - 6(x-4)^2 = -103 + 60x - 6x^2 \qquad (4 \leq x \leq 6).$$ ∎

Los splines poseen una interesante propiedad del mínimo, que se obtendrá a continuación. Suponer que $f(x)$ en el teorema 1 es continua y que posee primera y segunda derivadas continuas sobre $a \leq x \leq b$. Suponer que (3) es de la forma

$$(13) \qquad g'(a) = f'(a), \qquad g'(b) = f'(b)$$

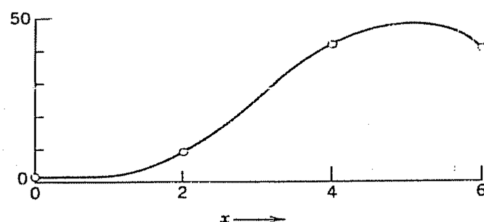


Figura 410. Spline en el ejemplo 2.

(como en el ejemplo 1). Entonces $f' - g'$ es cero en a y en b. Así, por integración por partes,

$$\int_a^b g''(x)[f''(x) - g''(x)]\,dx = -\int_a^b g'''(x)[f'(x) - g'(x)]\,dx.$$

Como $g'''(x)$ es constante sobre cada subintervalo de la partición, entonces al evaluar la integral del miembro derecho sobre un subintervalo se obtiene *constante* $\cdot\ [f(x) - g(x)]$ tomada en los puntos extremos del subintervalo, que por (2) es igual a cero. Por tanto, la integral del miembro derecho es cero. Así se demuestra la siguiente fórmula:

$$\int_a^b f''(x)g''(x)\,dx = \int_a^b g''(x)^2\,dx.$$

En consecuencia,

$$\int_a^b [f''(x) - g''(x)]^2\,dx = \int_a^b f''(x)^2\,dx - 2\int_a^b f''(x)g''(x)\,dx + \int_a^b g''(x)^2\,dx$$

$$= \int_a^b f''(x)^2\,dx - \int_a^b g''(x)^2\,dx.$$

Como el integrando del miembro izquierdo es no negativo, entonces también la integral es no negativa. Lo anterior conduce a

$$\int_a^b f''(x)^2\,dx \geqq \int_a^b g''(x)^2\,dx. \tag{14}$$

El resultado puede plantearse como sigue.

Teorema 2. (Propiedad del mínimo de los splines cúbicos).

Sea $f(x)$ que es continua y posee primera y segunda derivadas continuas sobre algún intervalo $a \leqq x \leqq b$. Sea $g(x)$ el spline cúbico correspondiente a alguna partición (1) *de ese intervalo y que satisface* (2) *y* (13). *Entonces $f(x)$ y $g(x)$ satisfacen la desigualdad* (14), *y la igualdad se cumple si y sólo si $f(x)$ es el spline cúbico $g(x)$.*

Los ingenieros utilizan reglas delgadas denominadas *splines* o *cerchas* para ajustar curvas que pasan por puntos dados, como ya se mencionó, y la energía de deformación minimizada por tales splines es proporcional, aproximadamente, a la integral del cuadrado de la segunda derivada del spline. Por tanto, la desigualdad (14) explica el empleo del término *spline* para las funciones $g(x)$ consideradas en esta sección.

Los splines cúbicos $g(x)$ que en vez de (13) satisfacen

$$g''(a) = 0, \qquad g''(b) = 0 \tag{15}$$

se denominan **splines naturales** porque poseen la siguiente interesante propiedad del mínimo. De todas las funciones $g(x)$ dos veces diferenciables sobre $a \leqq x \leqq b$ que satisfacen (2) y cuya segunda derivada es continua, los splines naturales son las funciones que proporcionan a la integral

$$\int_a^b g''(x)^2\,dx$$

su valor más pequeño posible. La condición (15) significa que $g(x)$ tiene una gráfica casi lineal cerca de los extremos a y b.

Problemas de la sección 18.4

1. Comprobar los cálculos en el ejemplo 1.
2. Comparar el spline $g(x)$ del ejemplo 1 con el polinomio de interpolación cuadrático $p(x)$ sobre todo el intervalo. ¿Cuáles son las máximas desviaciones de $g(x)$ y $p(x)$ con respecto a $f(x)$? Comentar la respuesta.
3. Derivar $p_1(x)$ y $p_2(x)$ en el ejemplo 2 y comprobar que $g(x)$ en el ejemplo 2 posee primera y segunda derivadas continuas.
4. Comprobar que (6) satisface (4) y (5).
5. Obtener (7) y (8) a partir de (6) según se indica en el texto.
6. Comprobar la obtención de (9) indicada en el texto.
7. Obtener (10) a partir de (9).
8. Proporcionar los detalles de la obtención de a_{j2} y a_{j3} en (12).

Encontrar los splines cúbicos de los datos siguientes, con k_1 y k_n como se indica.

9. $f_0 = f(0) = 0,\ f_1 = f(1) = 0,\ f_2 = f(2) = 4,\quad k_0 = -1,\ k_2 = 5$
10. $f_0 = f(-2) = 1,\ f_1 = f(0) = 5,\ f_2 = f(2) = 17,\quad k_0 = -2,\ k_2 = -14$
11. $f_0 = f(1) = 1,\ f_1 = f(4) = 46,\ f_2 = f(9) = 86,\quad k_0 = 0,\ k_2 = -157$
12. $f_0 = f(0) = 0,\ f_1 = f(1) = 1,\ f_2 = f(2) = 6,\ f_3 = f(3) = 10,\quad k_0 = 0,\ k_3 = 0$
13. $f_0 = f(0) = 1,\ f_1 = f(1) = 0,\ f_2 = f(2) = -1,\ f_3 = f(3) = 0,\quad k_0 = 0,\ k_3 = -6$
14. $f_0 = f(0) = 4,\ f_1 = f(2) = 0,\ f_2 = f(4) = 4,\ f_3 = f(6) = 80,\quad k_0 = 0,\ k_3 = 0$
15. $f(-2) = f(-1) = f(1) = f(2) = 0,\ f(0) = 1,\quad k_0 = k_4 = 0$

16. Volver a escribir los polinomios en la respuesta del problema 15 en potencias de x y demostrar que $g(x)$ es una función par de x; es decir, que $g(-x) = g(x)$. ¿Qué es de esperar?
17. Si en la figura 411 se hubiera empezado a partir de la función lineal por secciones $f(x)$, en el problema 15 se hubiera obtenido $g(x)$ como el spline que satisface $g'(-2) = f'(-2)$, $g'(2) = f'(2)$. Encontrar y trazar la gráfica del polinomio de interpolación de cuarto grado correspondiente y compararla con la gráfica de ese spline (ver la figura 411). Comentar la respuesta.

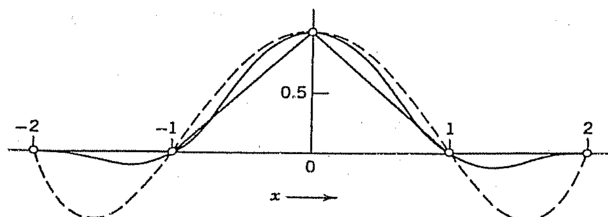


Figura 411. Spline y polinomio de interpolación en los problemas 15-17.

18. Algunas veces puede suceder que un spline está representado por el mismo polinomio en subintervalos adyacentes de $a \leqq x \leqq b$. A fin de ilustrar este hecho, encontrar el spline cúbico $g(x)$ para $f(x) = \operatorname{sen} x$ correspondiente a la partición $x_0 = -\pi/2$, $x_1 = 0$, $x_2 = \pi/2$ del intervalo $-\pi/2\, x \leqq \pi/2$ y que satisface $g'(-\pi/2) = f'(-\pi/2)$ y $g'(\pi/2) = f'(\pi/2)$.
19. Una posible interpretación geométrica de (14) es que una función spline cúbico minimiza la integral del cuadrado de la curvatura, por lo menos de manera aproximada. Explicar este hecho.
20. Si un spline cúbico es tres veces continuamente diferenciable (es decir, que posee primera, segunda y tercera derivadas continuas), demostrar que debe ser un polinomio.

18.5 INTEGRACIÓN Y DERIVACIÓN NUMÉRICAS

El problema de la **integración numérica** es la evaluación numérica de integrales

$$J = \int_a^b f(x)\, dx$$

en donde a y b están dados y f es una función definida analíticamente por una fórmula o empíricamente por medio de una tabla de valores. Geométricamente, J es el área bajo la curva de f entre a y b (figura 412).

Se sabe que si f es tal que es posible encontrar una función diferenciable F cuya derivada es f, entonces es posible evaluar J aplicando la conocida fórmula

$$J = \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \qquad [F'(x) = f(x)],$$

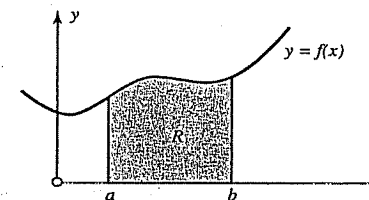


Figura 412. Interpretación geométrica de una integral definida.

y para lograr lo anterior pueden ser de utilidad tablas de integrales, como las que aparecen en la obra citada como referencia [3] en el apéndice 1.

Sin embargo, en las aplicaciones a la ingeniería frecuentemente se presentan integrales cuyo integrando es una función empírica definida por valores medidos, o bien, la integral no puede integrarse aplicando los métodos normales del cálculo. En tales casos es posible aplicar un método numérico de integración aproximada.

Regla rectangular. Regla trapezoidal

Los métodos de integración numérica se obtienen mediante la aproximación del integrando f por funciones que son fáciles de integrar. La fórmula más simple, la **regla rectangular**, se obtiene si el intervalo de integración $a \leqq x \leqq b$ se subdivide en n subintervalos de la misma longitud $h = (b-a)/n$ y en cada subintervalo f se aproxima por la constante $f(x_j^*)$, el valor de f en el punto medio x_j^* del j-ésimo subintervalo (figura 423). Así, f es aproximada por una **función escalón** (función constante por secciones), los n rectángulos de la figura 413 tienen las áreas $f(x_1^*)h, \cdots, f(x_n^*)h$, y la **regla rectangular** es

$$\text{(1)} \qquad \boxed{J = \int_a^b f(x)\, dx \approx h[f(x_1^*) + f(x_2^*) + \cdots + f(x_n^*)]}$$

en donde $h = (b-a)/n$.

La **regla trapezoidal** suele ser más exacta, y se obtiene si se considera la misma subdivisión que antes y f se aproxima mediante una recta discontinua de segmentos (cuerdas) con puntos extremos $[a, f(a)]$, $[x_1, f(x_1)]$, $\cdots$, $[b, f(b)]$ sobre la curva de f (figura 414). Así, el área bajo la curva de f entre a y b es aproximada por n trapezoides de áreas

$$\tfrac{1}{2}[f(a) + f(x_1)]h, \quad \tfrac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]h, \quad \cdots, \quad \tfrac{1}{2}[f(x_{n-1}) + f(b)]h,$$

y al efectuar su suma se obtiene la **regla trapezoidal**

$$\text{(2)} \qquad \boxed{J = \int_a^b f(x)\, dx \approx h[\tfrac{1}{2}f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \tfrac{1}{2}f(b)]}$$

en donde $h = (b - a)/n$, como en (1).

Ejemplo 1. Regla trapezoidal.

Evaluar $J = \int_0^1 e^{-x^2}\, dx$ por medio de (2) con $n = 10$.

Solución. $J \approx 0.1(0.5 \cdot 1.367879 + 6.778167) = 0.746211$ por la tabla 18-3.

Tabla 18-3
Cálculo en el ejemplo 1

j	x_j	x_j^2	$e^{-x_j^2}$	
0	0	0	1.000 000	
1	0.1	0.01		0.990 050
2	0.2	0.04		0.960 789
3	0.3	0.09		0.913 931
4	0.4	0.16		0.852 144
5	0.5	0.25		0.778 801
6	0.6	0.36		0.697 676
7	0.7	0.49		0.612 626
8	0.8	0.64		0.527 292
9	0.9	0.81		0.444 858
10	1.0	1.00	0.367 879	
Sumas			1.367 879	6.778 167

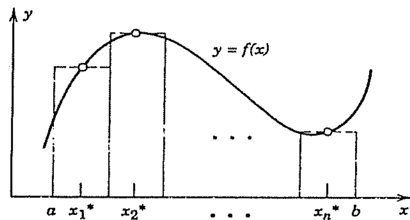


Figura 413. Regla rectangular.

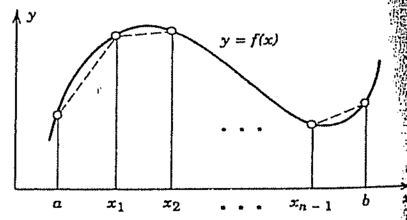


Figura 414. Regla trapezoidal.

Cotas para el error de la regla trapezoidal

Esta estimación del error puede obtenerse a partir de (5), sección 18.3, con $n = 1$, como se muestra a continuación. Empezando con un solo subintervalo, se tiene

$$f(x) - p_1(x) = (x - x_0)(x - x_1)\,\frac{f''(t)}{2}$$

con una t idónea dependiente de x, entre x_0 y x_1. Al integrar sobre x desde $a = x_0$ hasta $x_1 = x_0 + h$ se obtiene

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx - \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] = \int_{x_0}^{x_0+h} (x - x_0)(x - x_0 - h)\frac{f''(t(x))}{2}\,dx.$$

Al hacer $x - x_0 = v$ y usar el teorema del valor medio del cálculo integral, que es posible aplicar porque $(x - x_0)(x - x_0 - h)$ no cambia de signo, se encuentra que el miembro derecho es igual a

$$\int_0^h v(v - h)\,dv\,\frac{f''(\tilde{t})}{2} = \left(\frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2}\right)\frac{f''(\tilde{t})}{2} = -\frac{h^3}{12}f''(\tilde{t}),$$

en donde $\tilde{t}$ es un valor idóneo entre x_0 y x_1. Por tanto, el **error** ϵ de (2) es la suma de n de tales contribuciones de los n subintervalos; como $h = (b - a)/n$, entonces se obtiene

$$\epsilon = -\frac{(b - a)^3}{12n^2} f''(\hat{t})$$

con $\hat{t}$ idónea entre a y b. Finalmente, ahora las **cotas para el error** se obtienen tomando para f'' el valor más grande, por ejemplo M_2, y el más pequeño, M_2^*, en el intervalo de integración, con lo que se obtiene

$$\text{(3)} \qquad KM_2 \leqq \epsilon \leqq KM_2^* \quad \text{en donde} \quad K = -\frac{(b - a)^3}{12n^2}.$$

Ejemplo 2. Estimación del error para la regla trapezoidal.

Calcular el error del valor aproximado en el ejemplo 1.

Solución. Se aplicará (3). Por diferenciación, $f''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$. También, $f'''(x) > 0$ si $0 < x < 1$, de modo que el mínimo y el máximo ocurren en los extremos del intervalo. Se calcularán $M_2 = f''(1) = 0.735759$ y $M_2^* = f''(0) = -2$. Además, $K = -1200$ y con (3) se obtiene

$$-0.000\ 614 \leqq \epsilon \leqq 0.001\ 667.$$

Por tanto, el valor exacto de J debe estar entre

$$0.746\ 211 - 0.000\ 614 = 0.745\ 597 \quad \text{and} \quad 0.746\ 211 + 0.001\ 667 = 0.747\ 878.$$

(En realidad, $J = 0.746824$, exacto hasta 6D.) ∎

Regla de integración de Simpson

La aproximación constante por secciones de f produjo la regla rectangular (1); la aproximación lineal por secciones, la regla trapezoidal (2); y la cuadrática por secciones dará

lugar a la regla de Simpson, que reviste gran importancia práctica porque es suficientemente exacta para casi todos los problemas, sin dejar de ser suficientemente simple.

A fin de obtener la regla de Simpson, el intervalo de integración $a \leqq x \leqq b$ se divide en un número *par* de subintervalos iguales; por ejemplo, en $n = 2m$ subintervalos de la misma longitud $h = (b - a)/2m$, con puntos extremos $x_0 (= a), x_1, \cdots, x_{2m-1}, x_{2m} (= b)$; ver la figura 415. Luego se toman los dos primeros subintervalos y se aproxima $f(x)$ en el intervalo $x_0 \leqq x \leqq x_2 = x_0 + 2h$ por el polinomio de Lagrange $p_2(x)$ que pasa por (x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2), en donde $f_j = f(x_j)$. Por (4a) de la sección 18.3 se obtiene

$$p_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f_2. \qquad (4^*)$$

Los denominadores son $2h^2$, $-h^2$ y $2h^2$, respectivamente. Al hacer $s = (x - x_1)/h$ se tiene $x - x_0 = (s + 1)h$, $x - x_1 = sh$, $x - x_2 = (s - 1)h$, y se obtiene

$$p_2(x) = \tfrac{1}{2}s(s - 1)f_0 - (s + 1)(s - 1)f_1 + \tfrac{1}{2}(s + 1)sf_2.$$

Luego se integra con respecto a x desde x_0 hasta x_2. Lo anterior corresponde a integrar con respecto a s desde -1 hasta 1. Dado que $dx = h\,ds$, el resultado es

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_2} p_2(x)\,dx = h\left(\frac{1}{3}f_0 + \frac{4}{3}f_1 + \frac{1}{3}f_2\right).$$

Una fórmula semejante se cumple para los dos siguientes subintervalos desde x_2 hasta x_4, etc. Al sumar todas estas m fórmulas se obtiene la **regla de Simpson**[13]

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 2f_{2m-2} + 4f_{2m-1} + f_{2m}),} \qquad (4)$$

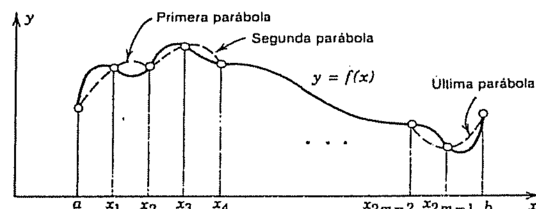


Figura 415. Regla de Simpson.

[13] THOMAS SIMPSON (1710-1761), matemático inglés autodidacto, autor de varios libros populares. La regla de Simpson fue usada mucho antes por Torricelli, Gregory (en 1668) y Newton (en 1676).

en donde $h = (b - a)/2m$ y $f_j = f(x_j)$. En la tabla 18-4 se muestra un algoritmo para efectuar la regla de Simpson.

Tabla 18-4
Regla de integración de Simpson

ALGORITMO SIMPSON $(x_j, f_j, j = 0, 1, \cdots, 2m)$

Este algoritmo calcula la integral $J = \int_a^b f(x)\,dx$ a partir de valores dados $f_j = f(x_j)$ en puntos equidistantes $x_0 = a, x_1 = x_0 + h, \cdots, x_{2m} = x_0 + 2mh = b$ mediante la regla de Simpson (4), en donde $h = (b - a)/2m$.

ENTRADA: $a, b, m, f_0, \cdots, f_{2m}$

SALIDA: Valor aproximado $\tilde{J}$ de J

Calcular $s_0 = f_0 + f_{2m}$

$s_1 = f_1 + f_3 + \cdots + f_{2m-1}$

$s_2 = f_2 + f_4 + \cdots + f_{2m-2}$

$h = (b - a)/2m$

$\tilde{J} = \frac{h}{3}(s_0 + 4s_1 + 2s_2)$

SALIDA $\tilde{J}$. Detener el proceso.

Fin de SIMPSON

Las **cotas para el error** ϵ_S en (4) pueden obtenerse con un método semejante al aplicado en el caso de la regla trapezoidal (2), suponiendo que la cuarta derivada de f existe y es continua en el intervalo de integración. El resultado es

$$\boxed{CM_4 \leqq \epsilon_S \leqq CM_4^*, \quad \text{mientras que} \quad C = -\frac{(b - a)^5}{180(2m)^4}} \qquad (5)$$

y M_4 y M_4^* son los valores más grande y más pequeño de la cuarta derivada de f en el intervalo de integración, respectivamente. Es trivial que $\epsilon_S = 0$ para un polinomio cuadrático f, pero (5) muestra que $\epsilon_S = 0$ inclusive para un polinomio cúbico, porque la cuarta derivada de tal polinomio es cero.

La regla de Simpson es suficientemente exacta para casi todos los propósitos prácticos, y es preferida a otras fórmulas más complicadas de mayor precisión que pueden obtenerse mediante el empleo de polinomios de aproximación de grado superior. En la pág. 361 de la obra citada como referencia [E13] en el apéndice 1 se proporciona una lista de estas así denominadas **fórmulas de Newton-Cotes**.

Ejemplo 3. Regla de Simpson. Estimación del error.

Evaluar $J = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ aplicando la regla de Simpson con $2m = 10$ y calcular el error.

Solución. Como $h = 0.1$, con la tabla 18-5 se obtiene

$$J \approx \frac{0.1}{3}(1.367\ 879 + 4 \cdot 3.740\ 266 + 2 \cdot 3.037\ 901) = 0.746\ 825.$$

Tabla 18-5
Cálculos en el ejemplo 3

j	x_j	x_j^2	$e^{-x_j^2}$		
0	0	0	1.000 000		
1	0.1	0.01		0.990 050	
2	0.2	0.04			0.960 789
3	0.3	0.09		0.913 931	
4	0.4	0.16			0.852 144
5	0.5	0.25		0.778 801	
6	0.6	0.36			0.697 676
7	0.7	0.49		0.612 626	
8	0.8	0.64			0.527 292
9	0.9	0.81		0.444 858	
10	1.0	1.00	0.367 879		
Sumas			1.367 879	3.740 266	3.037 901

Estimación del error. Al derivar se obtiene $f^{IV}(x) = 4(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2}$. Al considerar la derivada f^V de f^{IV} se encuentra que el mayor valor de f^{IV} en el intervalo de integración ocurre en $x = 0$ y que el menor valor lo hace en $x = x^* = 2.5 + 0.5\sqrt{10}$ Los cálculos dan por resultado los valores $M_4 = f^{IV}(0) = 12$ y $M_4^* = f^{IV}(x^*) = -7.359$. Como $2m = 10$ y $b - a = 1$, se obtiene $C = -1/1800000 = -0.00000056$. Por consiguiente, a partir de (5) se obtiene

$$-0.000\ 007 \leqq \epsilon_S \leqq 0.000\ 005.$$

Asi, J debe estar entre los valores 0.746825 - 0 000007 = 0.746818 y 0.746825 + 0.000005 = 0.746830, de modo que por lo menos cuatro dígitos del valor aproximado son exactos. En realidad, 0.746825 es exacto hasta 5D porque $J = 0.746824$ (exacto hasta 6D).

Por tanto, el resultado obtenido es mucho mejor que el del ejemplo 1, que se obtuvo aplicando la regla trapezoidal, a pesar de que el número de operaciones es casi el mismo en ambos casos. ∎

En el ejemplo se usaron primero alguna $n = 2m$ y luego se aplicó (5) para estimar el error resultante. De manera más realista, se requiere cierta exactitud, a partir de la cual se determina $n = 2m$. Lo anterior simplemente significa que dado ϵ_S, se resuelve (5) para n, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4. Determinación de n a partir de la exactitud requerida.

En el ejemplo 3, para alcanzar una exactitud hasta 6D, ¿qué n es necesario elegir?

Solución. Al usar $M_4 = 12$ (que es mayor en valor absoluto que M_4^*), a partir de (5) se obtiene, con $b - a = 1$ y la exactitud requerida,

$$|CM_4| = \frac{12}{180(2m)^4} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}, \quad \text{por lo que} \quad m = \left[\frac{2 \cdot 10^6 \cdot 12}{180 \cdot 2^4}\right]^{1/4} = 9.55.$$

Así, es necesario elegir $n = 2m = 20$. Se pide que el estudiante efectúe los cálculos pertinentes, que son semejantes a los del ejemplo 3.

Observar que las cotas para el error en (3) o en (5) algunas veces pueden ser holgadas, de modo que en tal caso puede ser suficiente una $n = 2m$ más pequeña. ∎

Estabilidad numérica. *Todas las fórmulas de Newton-Cotes son estables con respecto al error por redondeo.*

Para la regla de Simpson la afirmación anterior puede demostrarse como sigue (y para otras fórmulas de Newton-Cotes la demostración se efectúa siguiendo la misma idea). El error por redondeo ϵ_j de un valor $f(x_j)$ no excede la **unidad de redondeo** u, $|\epsilon_j| \leqq u$ (por ejemplo, $u = 1/2 \cdot 10^{-6}$ si se redondea hasta 6D). Cada uno de los $2m + 1$ valores funcionales contribuye con un ϵ_j multiplicado por su coeficiente 1, 4 o 2, de modo que para la suma de estos errores se tiene

$$|\epsilon_0 + 4\epsilon_1 + 2\epsilon_2 + \cdots + \epsilon_{2m}| \leqq (1 + 4 + \cdots + 4 + 1)u = 6mu.$$

En (4) lo anterior se multiplica por $h/3 = (b - a)/6m$, con lo que se obtiene la cota

$$6mu \cdot (b - a)/6m = (b - a)u.$$

Esta cota es independiente de m. Por tanto, el método es estable cuando h tiende a cero o bien, prácticamente, cuando se incrementa la exactitud al elegir valores cada vez más pequeños de h. ∎

Fórmulas gaussianas de integración

Las fórmulas de integración obtenidas hasta el momento implican valores funcionales para valores equidistantes de x y proporcionan resultados exactos para polinomios que no exceden cierto grado. De modo más general, puede hacerse

$$(6) \qquad \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{n} A_j f_j \qquad [f_j = f(x_j)]$$

(eligiendo $a = -1$ y $b = 1$, lo que puede efectuarse mediante una transformación lineal de escala), y determinar las $2n$ constantes $A_1, \cdots, A_n, x_1, \cdots, x_n$ de modo que con (6) se obtengan resultados exactos para polinomios de grado k tan alto como sea posible. Ya que $2n$ es el número de coeficientes de un polinomio de grado $2n - 1$, se concluye que $k \leqq 2n - 1$. Gauss demostró que la exactitud para polinomios cuyo grado no es mayor que $2n - 1$ (en vez de $n - 1$ o de n) puede alcanzarse si y sólo si los valores $x_1, \cdots, x_n$ son los n ceros del *polinomio de Legendre* $P_n(x)$, en donde

$$P_0 = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \tfrac{1}{2}(5x^3 - 3x), \cdots,$$

[respecto a la fórmula general, ver (11) en la sección 5.3] y los coeficientes A_j se eligen de manera idónea. Entonces, (6) se denomina **fórmula gaussiana de integra-**

ción. Algunos valores numéricos son (más valores se encuentran en la obra citada como referencia [1] en el apéndice 1)

n	Ceros		Coeficientes
2	$\pm 1/\sqrt{3}$	$= \pm 0.57735\ 02692$	1
3	0		8/9
	$\pm\sqrt{3/5}$	$= \pm 0.77459\ 66692$	5/9
4	$\pm\sqrt{(15-\sqrt{120})/35}$	$= \pm 0.33998\ 10436$	0.65214 51549
	$\pm\sqrt{(15+\sqrt{120})/35}$	$= \pm 0.86113\ 63116$	0.34785 48451

Ejemplo 5. Fórmula gaussiana de integración con $n = 3$

Evaluar la integral del ejemplo 3 aplicando la fórmula gaussiana (6) con $n = 3$.

Solución. La integral dada desde 0 hasta 1 debe convertirse en una integral desde -1 hasta 1. Se hace $x = 1/2(t+1)$. Entonces, $dx = 1/2\, dt$, y (6), con $n = 3$ y los valores antes dados de los ceros y los coeficientes conduce a

$$\int_0^1 \exp(-x^2)\, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \exp\left(-\frac{1}{4}(t+1)^2\right) dt$$

$$\approx \frac{1}{2}\left[\frac{5}{9}\exp\left(-\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2\right) + \frac{8}{9}\exp\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{5}{9}\exp\left(-\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2\right)\right] = 0.746\ 815$$

(exacto hasta 6D: 0.746825), lo cual es casi tan exacto como el resultado de la regla de Simpson que se obtuvo en el ejemplo 3 realizando un número mucho mayor de operaciones aritméticas. ∎

La fórmula gaussiana de integración (6) tiene la ventaja de que es muy exacta. Su desventaja la constituyen el espaciamiento irregular de $x_1, \cdots, x_n$ y los valores un tanto inconvenientes de los coeficientes, pero esto no es esencial si los $f(x_j)$ también se calculan (no se toman de tablas) u obtienen de un experimento en el que los x_j pueden fijarse de una vez por todas. La fórmula (6) es poco práctica si $f(x_j)$ resulta de la interpolación en una tabla en que f se proporciona a intervalos iguales, porque una interpolación de este tipo puede ser más importante que cualquier ganancia debida a una mayor exactitud.

Dado que los puntos extremos -1 y 1 del intervalo de integración de (6) no son ceros de $P_n(x)$, entonces no se encuentran entre $x_1, \cdots, x_n$ y, debido a ello, se dice que la fórmula de Gauss (6) es una **fórmula abierta**, en contraste con una **fórmula cerrada** en la que los puntos extremos del intervalo de integración son x_0 y x_n. Por ejemplo, (2) y (4) son fórmulas cerradas.

Se menciona que, precisamente como en el caso de la interpolación, existen métodos de integración numérica basados en diferencias. Un método muy eficaz utiliza la **fórmula de Gauss de diferencias centrales**

$$(7)\qquad \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx \approx \frac{h}{2}\left(f_0 + f_1 - \frac{\delta^2 f_0 + \delta^2 f_1}{12} + \frac{11(\delta^4 f_0 + \delta^4 f_1)}{720}\right).$$

Para obtener más detalles, consulte el texto dado como referencia [E24] en el apéndice 1.

Derivación numérica

La **derivación numérica** es la determinación de los valores de la derivada de una función f a partir de valores dados de f. La derivación numérica debe evitarse siempre que sea posible porque, mientras *la integración* es un *proceso suavizador* y no es afectada mucho por pequeñas inexactitudes en los valores funcionales, *la derivación* tiende a ser *menos suave* y, en general, proporciona valores de f' mucho menos exactos que los de f; recuerde que la derivada es el límite del cociente de diferencias y, en éste, normalmente se tiene una pequeña diferencia de dos cantidades grandes, que luego se divide entre una cantidad pequeña. Sin embargo, las fórmulas que se obtendrán son fundamentales en la solución numérica de ecuaciones diferenciales.

Se usarán las notaciones $f'_j = f'(x_j)$, $f''_j = f''(x_j)$, etc., y pueden obtenerse fórmulas preliminares de aproximación para las derivadas, recordando que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Lo cual sugiere que

$$(8)\qquad f'_{1/2} \approx \frac{\delta f_{1/2}}{h} = \frac{f_1 - f_0}{h}.$$

De manera semejante, para la segunda derivada se obtiene

$$(9)\qquad f''_1 \approx \frac{\delta^2 f_1}{h^2} = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2},$$

etcétera.

Derivando polinomios de Lagrange idóneos pueden obtenerse aproximaciones más exactas. Si se deriva (4*) y se recuerda que los denominadores en (4*) son $2h^2$, $-h^2$, $2h^2$, se tiene

$$f'(x) \approx p'_2(x) = \frac{2x - x_1 - x_2}{2h^2} f_0 - \frac{2x - x_0 - x_2}{h^2} f_1 + \frac{2x - x_0 - x_1}{2h^2} f_2.$$

Al evaluar lo anterior en x_0, x_1, x_2, se obtienen las "fórmulas de los tres puntos"

$$\text{(a)} \quad f_0' \approx \frac{1}{2h}(-3f_0 + 4f_1 - f_2),$$

$$\text{(10)} \qquad \text{(b)} \quad f_1' \approx \frac{1}{2h}(-f_0 + f_2),$$

$$\text{(c)} \quad f_2' \approx \frac{1}{2h}(f_0 - 4f_1 + 3f_2).$$

Aplicando la misma idea al polinomio de Lagrange $p_4(x)$ se obtienen fórmulas semejantes, en particular

$$\text{(11)} \qquad f_2' \approx \frac{1}{12h}(f_0 - 8f_1 + 8f_3 - f_4).$$

En el texto dado como referencia [E11] en el apéndice 1 se incluyen más detalles y fórmulas.

Problemas de la sección 18.5

1. Demostrar que al aplicar (1) con $n = 5$ se obtiene J 0.748053 para la integral del ejemplo 1 [exacto hasta 6D: 0.746824].
2. Para tener una idea del crecimiento en la exactitud, calcular $\int_0^1 x^2\,dx$ aplicando (1) con $h = 1$, $h = 0.5$, $h = 0.25$.
3. Efectuar la tarea de problema 2 aplicando la regla trapezoidal (2) en vez de (1). También graficar x^2 y los trapezoides.
4. Deducir una fórmula con la que se obtengan cotas inferior y superior para J en relación con la regla rectangular (1). Aplicar esta fórmula al problema 1.

Evaluar numéricamente las siguientes integrales según se indica y comparar el resultado con el valor exacto obtenido mediante una fórmula conocida del cálculo.

$$A(x) = \int_0^x \frac{dx^*}{1 + x^{*2}}, \qquad B(x) = \int_1^x \frac{dx^*}{x^*}, \qquad D(x) = \int_0^x x^* e^{-x^{*2}}\,dx^*.$$

5. $A(1)$ por (2), $n = 4$
6. $A(1)$ por (2), $n = 20$
7. $A(1)$ por (4), $2m = 4$
8. $A(1)$ por (4), $2m = 10$
9. $A(2)$ por (4), $2m = 10$
10. $A(10)$ por (2), $n = 10$
11. $B(2)$ por (4), $2m = 4$
12. $B(2)$ por (4), $2m = 10$
13. $B(2)$ por (2), $n = 10$
14. $D(0.4)$ por (4), $2m = 4$

Calcular las cotas para el error en el

15. Problema 5
16. Problema 6.
17. Problema 11.
18. ¿Cuál es la menor n al calcular B(2) para el que se garantiza una exactitud de 5D (a) aplicando (3) en el empleo de (2), (b) aplicando (5) en el empleo de (4)? Comparar lo anterior y hacer un comentario.

Evaluar numéricamente las siguientes integrales según se indica.

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} x^*}{x^*}\,dx^*, \qquad \mathrm{C}(x) = \int_0^x \cos(x^{*2})\,dx^*, \qquad J(x) = \int_0^x J_0(x^*)\,dx^*.$$

(Estas integrales no son elementales. Si(x) se denomina *integral senoidal*, C(x) es la *integral de Fresnel*, y $J_0(x)$ es la *función de Bessel de orden cero*.)

19. Si(1) por (2), $n = 5$, $n = 10$
20. Si(1) por (4), $2m = 2$ y $2m = 10$
21. C(2) por (4), $2m = 10$
22. C(2) por (2), $n = 10$
23. $J(1)$ por (2), $n = 10$, y valores de la tabla 1, apéndice 5
24. $J(1)$ por (4), $2m = 10$
25. Demostrar que la regla trapezoidal es estable con respecto al redondeo.
26. Escribir los detalles de la obtención de (10).
27. Considerar $f(x) = x^4$ para $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ y $x_4 = 0.8$. Calcular f_2' a partir de (10a), (10b), (10c), (11). Determinar los errores, comparar los resultados y hacer un comentario.
28. Una "fórmula de los cuatro puntos" para la derivada es

$$f_2' \approx \frac{1}{6h}(-2f_1 - 3f_2 + 6f_3 - f_4).$$

Aplicarla a $f(x) = x^4$ con $x_1, \cdots, x_4$ como en el problema 27, determinar el error y compararlo con el que se obtuvo en el caso de (11).

29. La derivada $f'(x)$ también puede aproximarse en términos de diferencias de primer orden y de orden superior:

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 f_0 + - \cdots\right).$$

Calcular $f'(0.4)$ en el problema 27 a partir de esta fórmula, usando diferencias hacia adelante e incluyendo diferencias de primero, segundo, tercero y cuarto orden.

30. Obtener la fórmula del problema 29 a partir de (14) en la sección 18.3.

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 18

1. ¿Cómo se representan los números en una computadora?
2. ¿Qué se entiende por punto flotante y punto fijo?
3. ¿Cuáles son las reglas del redondeo?
4. Mencionar y explicar algunas de las fuentes de errores al efectuar cálculos.
5. ¿Qué significa "estabilidad de un algoritmo"? ¿Por qué es importante?

6. Escribir las definiciones de error y error relativo de un valor aproximado.
7. ¿Cómo se comportan el error y el error relativo bajo la adición? ¿Bajo la multiplicación?
8. ¿Por qué la selección de un buen método es tan importante en una gran computadora como en una calculadora de bolsillo?
9. ¿Qué es la iteración de punto fijo? Escribir una condición suficiente para la convergencia.
10. ¿Qué se entiende por "orden de convergencia de una iteración"? ¿Por qué es importante?
11. Hacer una tabla de diferencias de $f(x) = 1/x^2$, $x = 1.0(0.2)2.0$, 4D, y escribir las diferencias en las tres notaciones.
12. ¿Cuál es el objetivo del método de Newton(-Raphson)? ¿Cuál es la idea?
13. ¿Qué es el método de bisección? ¿Puede divergir? ¿Es rápido?
14. ¿Qué es la regula falsi? ¿Cuándo es posible aplicarla?
15. ¿Cuál es una ventaja de las fórmulas de interpolación de Newton con respecto a la de Lagrange?
16. Al obtener la regla de Simpson se usó un polinomio de interpolación de Newton. Explicar cómo.
17. ¿Qué es "interpolación por cerchas"? ¿Por qué puede ser mejor que la interpolación polinómica usual?
18. ¿Qué recuerda sobre el error de la interpolación polinómica?
19. ¿Cómo se obtuvieron las fórmulas para la derivación numérica?
20. ¿Por qué en general la derivación numérica es más delicada que la integración numérica?
21. Escribir −0.53678, 1186.699, −0.00604, 23.9481, 1/3, 85/7 en forma de punto flotante con 5 dígitos significativos.
22. Convertir $(1992)_{10}$, $(5.25)_{10}$, $(15.6640625)_{10}$ y $(-24.875)_{10}$ a forma binaria.
23. Convertir $(111.101)_2$, $(10010.1)_2$ y $(11.1011)_2$ a forma en base 10.
24. Calcular 0.29731/(4.1232 - 4.0872) con los números así dados y luego redondear por pasos hasta 4, 3 y 2 dígitos significativos. Hacer un comentario.
25. Resolver $x^2 - 50x + 1 = 0$ aplicando (3) y (4), sección 18.1, usando 5 dígitos significativos en los cálculos. Comparar los resultados y hacer un comentario.
26. ¿Cuál sería una manera aceptable de calcular $\sqrt{x^2+9} - 3$ para $|x|$ pequeño?
27. Sean 4.81 y 12.752 redondeados correctamente hasta el número de dígitos mostrado. Determinar el menor intervalo en el que debe estar la suma $s = 4.81 + 12.752$ (usando para las cantidades valores reales en vez de redondeados).
28. Contestar lo que se pide en el problema 27 para la diferencia $d = 4.81 - 12.752$.
29. ¿Cuál es el error relativo de $n\tilde{a}$ en términos del de $\tilde{a}$?
30. Demostrar que el error relativo de $\tilde{a}^2$ es el doble que el de $\tilde{a}$.
31. Encontrar la solución de $x^5 = x + 0.2$ cerca de $x = 0$ transformando algebraicamente la ecuación en la forma (2), sección 18.2, y empezando en $x_0 = 0$.
32. La ecuación del problema 31 tiene una solución cerca de $x = 1$. Encontrar esta solución escribiendo la ecuación en la forma $x = \sqrt[5]{x+0.2}$ e iterando, empezando con $x_0 = 1$.
33. Resolver $x^6 + 3x^4 - 6x^2 - 8 = 0$ por iteración con $x_0 = 1$, en 10 pasos, hasta 6S.

34. Resolver $\cos x = x$ por iteración (6S, $x_0 = 1$), escribiendo la ecuación como $x = (0.74x + \cos x)/1.74$, obteniendo $x_4 = 0.739085$ (¡exacto hasta 6S!). ¿Por qué lo anterior converge tan rápido?
35. Resolver $x^4 - 4.00322x^3 + x^2 + 6.43105 = 0$ aplicando el método de Newton con $x_0 = 3.5$, hasta 6S de exactitud.
36. Resolver $x^4 - x^3 - 2x - 34 = 0$ aplicando el método de Newton con $x_0 = 3$, hasta 6S de exactitud.
37. Resolver $e^x - 1/x = 0$ aplicando el método de Newton con $x_0 = 0.5$, hasta 6S de exactitud.
38. Resolver $\cos x - x = 0$ aplicando el método de falsa posición.
39. Mediante interpolación cuadrática calcular senh 0.3 a partir de senh (−0.5) = −0.521, senh 0 = 0, senh 1 = 1.175.
40. Por interpolación lineal, calcular $f(1.75)$ a partir de $f(1.0) = 3.00000$, $f(1.2) = 2.98007$, $f(1.4) = 2.92106$, $f(1.6) = 2.82534$, $f(1.8) = 2.69671$, $f(2.0) = 2.54030$. Hacer lo mismo por interpolación cuadrática, usando los tres últimos valores.
41. Efectuar la misma tarea que en el problema 40, para $f(1.28)$.
42. En el problema 40, calcular $f(1.75)$ aplicando la fórmula de Everett (ver los problemas de la sección 18.3).
43. En el problema 40, calcular $f(1.28)$ por medio de la interpolación cúbica usual.
44. Calcular $f(0.3)$ a partir de $f(0) = 0.50000$, $f(0.2) = 0.69867$, $f(0.4) = 0.88942$, $f(0.6) = 1.06464$ aplicando la fórmula de Everett de los problemas de la sección 18.3.
45. Encontrar el spline cúbico para los datos $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(2) = -3$, $k_0 = k_2 = 0$.
46. Encontrar el spline cúbico para los datos $f(-1) = 3$, $f(1) = 1$, $f(3) = 23$, $f(5) = 45$, $k_0 = k_3 = 3$.
47. Aplicar la regla rectangular (1) de la sección 18.5 con $n = 5$ para calcular $\int_0^1 x^3\,dx$. ¿Cuál es el error?
48. Calcular la integral del problema 47 aplicando la regla trapezoidal (2) de la sección 18.5 con $n = 5$. ¿Qué cotas para el error se obtienen a partir de (3)? ¿Cuál es el error real del resultado? ¿Por qué este resultado es mayor que el valor exacto?
49. Calcular la integral de Fresnel $C(x) = \int_0^1 \cos(t^2)\,dt$ para $x = 1$ aplicando la regla de Simpson con $2m = 2$.
50. Calcular la integral del problema 49 aplicando la regla de Simpson con $2m = 10$.

Resumen del capítulo 18

Métodos numéricos en general

En este capítulo se analizaron conceptos relevantes a lo largo y ancho del trabajo numérico como un todo y métodos de naturaleza general, en oposición a los métodos para resolver problemas en álgebra lineal (capítulo 19) o en ecuaciones diferenciales (capítulo 20).

En cálculos científicos se usa la representación de **punto flotante** de los números (sección 18.1); la representación de punto fijo es menos adecuada en la mayor parte de los casos.

Los métodos numéricos proporcionan valores aproximados $\tilde{a}$ de cantidades. El **error** ϵ de $\tilde{a}$ es

(1) $$\epsilon = a - \tilde{a}$$ (Secc. 18.1)

en donde a es el valor exacto. El *error relativo* de $\tilde{a}$ es ϵ/a. Los errores surgen por redondeo, inexactitudes de valores medidos, truncamiento (es decir, la sustitución de integrales por sumatorias, derivadas por cocientes de diferencias, series por sumas parciales), etc.

Un algoritmo es **numéricamente estable** si pequeños cambios en los datos iniciales conducen sólo a pequeños cambios en los resultados finales. Los algoritmos inestables por lo general son inútiles porque los errores pueden volverse tan grandes que los resultados son muy inexactos. La inestabilidad numérica de los algoritmos no debe confundirse con la inestabilidad matemática de los problemas ("*problemas mal condicionados*", sección 18.2).

La **iteración de punto fijo** es un método para resolver ecuaciones $f(x) = 0$ en donde la ecuación se transforma primero algebraicamente a $x = g(x)$, se efectúa un intento inicial x_0 para la solución y luego de manera sucesiva se calculan aproximaciones $x_1, x_2 \cdots$, por iteración a partir de (ver la sección 18.2)

$$x_{n+1} = g(x_n) \qquad (n = 0, 1, \cdots). \tag{2}$$

El **método de Newton** para resolver ecuaciones $f(x) = 0$ es una iteración

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \text{(Secc. 18.2).} \tag{3}$$

en donde x_{n+1} es la abscisa al origen de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto x_n. Este método es de segundo orden (teorema 2, sección 18.2). Si en (3) se sustituye f' por un cociente de diferencias (geométricamente, la tangente se reemplaza por una secante), entonces se obtiene el **método de la secante**; ver (10) en la sección 18.2. Para el *método de bisección* (que es lento) y el *método de falsa posición*, ver los problemas de la sección 18.2.

Interpolación polinómica significa la determinación de un *polinomio de interpolación*; es decir, un polinomio $p_n(x)$ tal que $p_n(x_j) = f_j$, en donde $j = 0, \cdots, n$ y $(x_0, f_0), \cdots, (x_n, f_n)$ son valores medidos u observados, valores funcionales, etc. Cuando se tienen datos específicos, $p_n(x)$ de grado n (o menor) es único. Sin embargo, es posible expresarlo de varias formas, de las cuales destacan la **forma de Lagrange** (4), sección 18.3, o la **forma de diferencias divididas de Newton** (10), sección 18.3, que requiere menos operaciones y para $x_0, x_1 = x_0 + h, \cdots, x_n = x_0 + nh$ regularmente espaciados se vuelve la **fórmula con diferencias hacia adelante de Newton** (sección 18.3)

$$\begin{aligned} f(x) \approx p_n(x) &= f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \cdots \\ &\cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}\Delta^n f_0 \end{aligned} \tag{4}$$

en donde $r = (x - x_0)/h$ y las diferencias hacia adelante son $\Delta f_j = f_{j+1} - f_j$ y

$$\Delta^k f_j = \Delta^{k-1} f_{j+1} - \Delta^{k-1} f_j.$$

Una fórmula semejante es la *fórmula de interpolación con diferencias hacia atrás de Newton* (sección 18.3).

Los polinomios de interpolación pueden volverse numéricamente inestables cuando n crece, y en vez de interpolar y aproximar mediante un solo polinomio de grado elevado es preferible usar un **spline** cúbico $g(x)$; es decir, una función de interpolación dos veces diferenciable continuamente [así, $g(x_j) = f_j$], que en cada subintervalo $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ consta de un polinomio cúbico $p_j(x)$; ver la sección 18.4.

La **regla de Simpson** de integración numérica es (sección 18.5)

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(f_0 &+ 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots \\ &+ 2f_{2m-2} + 4f_{2m-1} + f_{2m}) \end{aligned} \tag{5}$$

en donde $h = (b - a)/2m$ y $f_j = f(x_j)$. Para estimación de errores y otros métodos de integración, consultar la sección 18.5.

Capítulo

19

Métodos numéricos en álgebra lineal

En este capítulo se considerarán algunos de los métodos numéricos más importantes para resolver sistemas lineales de ecuaciones (secciones 19.1 a 19.4), para ajustar rectas (sección 19.5) y para resolver problemas matriciales con eigenvalores (secciones 19.6 a 19.10). Estos métodos y otros semejantes revisten gran importancia práctica. En efecto, muchos problemas de ingeniería u otros campos (por ejemplo, de estadística) conducen a modelos matemáticos cuya solución requiere métodos de álgebra lineal numérica.

Este capítulo es independiente del capítulo 18 y puede estudiarse inmediatamente después del capítulo 7.

Prerrequisito para este capítulo: Secciones 7.1, 7.2, 7.3, 7.10.
Secciones que pueden omitirse en un curso más corto: Secciones 19.4, 19.5, 19.6, 19.9, 19.10
Bibliografía: Apéndice 1, *parte* E.
Respuestas a los problemas: Apéndice 2.

19.1 SISTEMAS LINEALES: ELIMINACIÓN DE GAUSS

Un **sistema lineal de *n* ecuaciones** en *n incógnitas* $x_1, \cdots, x_n$ es un conjunto de ecuaciones $E_1, \cdots, E_n$ de la forma:

$$\begin{aligned} E_1: &\quad a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ E_2: &\quad a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E_n: &\quad a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{aligned} \tag{1}$$

en donde los **coeficientes** a_{jk} y los b_j son números dados. El sistema se denomina **homogéneo** si todos los b_j son cero; en caso contrario es **no homogéneo**. Aplicando multiplicación matricial (sección 7.3), (1) puede escribirse como una simple ecuación vectorial

$$\text{(2)} \qquad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

en donde la **matriz de coeficientes** $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ es la matriz de $n \times n$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

son vectores columna. La **matriz aumentada** $\widetilde{\mathbf{A}}$ del sistema (1) es

$$\widetilde{\mathbf{A}} = [\mathbf{A} \quad \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}.$$

Una **solución** de (1) es un conjunto de números $x_1, \cdots, x_n$ que satisfacen todas las n ecuaciones, y un **vector solución** de (1) es un vector $\mathbf{x}$ cuyas componentes constituyen una solución de (1).

El método de resolución de tal sistema por medio de determinantes (regla de Cramer en la sección 7.9) no es práctico, inclusive si se cuenta con métodos eficientes para evaluar los determinantes.

Un método práctico para resolver un sistema lineal es la *eliminación de Gauss*, que se analizará a continuación (procediendo de manera independiente con respecto a la sección 7.4).

Eliminación de Gauss

Este método estándar para resolver el sistema lineal (1) es un proceso sistemático de eliminación que reduce (1) a una **"forma triangular"** porque entonces el sistema puede resolverse fácilmente por **"sustitución hacia atrás"**. Por ejemplo, un sistema triangular es

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 8 \\ 8x_2 + 2x_3 &= -7 \\ 6x_3 &= 3 \end{aligned}$$

y al aplicar sustitución hacia atrás se obtiene $x_3 = 3/6 = 1/2$ por la tercera ecuación, con lo que

$$x_2 = \tfrac{1}{8}(-7 - 2x_3) = -1$$

por la segunda ecuación, y finalmente por la primera ecuación

$$x_1 = \tfrac{1}{3}(8 - 5x_2 - 2x_3) = 4.$$

¿Cómo es posible reducir un sistema (1) dado a forma triangular? En el primer paso se elimina x_1 de las ecuaciones E_2 hasta E_n en (1). Lo anterior se efectúa restando múltiplos idóneos de la primera ecuación a las otras ecuaciones. Esta primera ecuación se denomina **ecuación pivotal** en este paso, y a_{11} se denomina **pivote**. Esta ecuación permanece sin modificación. En el segundo paso se toma la *nueva* segunda ecuación (que ya no contiene a x_1) como la ecuación pivotal y se usa para eliminar a x_2 de las nuevas ecuaciones E_3^* hasta E_n^* que se obtuvieron en el primer paso, etc. Con lo anterior se obtiene un sistema triangular que puede resolverse por sustitución hacia atrás como acaba de mostrarse. De esta manera se obtienen precisamente todas las soluciones del sistema *dado* (la demostración de este hecho se proporcionó en la sección 7.4). Los pivotes deben ser diferentes de cero. Para lograr lo anterior, puede ser necesario cambiar el orden de las ecuaciones. Esto se denomina **pivoteo parcial.**[1] También, los pivotes no deben ser demasiado pequeños en valor absoluto, debido a los errores por redondeo, y esta puede ser otra razón del pivoteo parcial, como se analizará más tarde. Primero se considerará un ejemplo sencillo.

Ejemplo 1. Eliminación de Gauss. Pivoteo.

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} 8x_2 + 2x_3 &= -7 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 8 \\ 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 &= 26. \end{aligned}$$

Solución. Para obtener una ecuación pivotal que contenga a x_1, es necesario reordenar las ecuaciones, por ejemplo, intercambiando la primera ecuación y la primera ecuación que contiene a x_1 (es decir, la segunda ecuación del sistema actual):

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 8 \\ 8x_2 + 2x_3 &= -7 \\ 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 &= 26. \end{aligned}$$

Primer paso. Eliminación de x_1.
Es suficiente mostrar la matriz aumentada y operar sobre ella. Se mostrarán tanto las ecuaciones como la matriz aumentada. En el primer paso, la primera ecuación es la ecuación pivotal. Así,

$$\begin{aligned} \text{Pivote} \rightarrow \boxed{3x_1} + 5x_2 + 2x_3 &= 8 \\ 8x_2 + 2x_3 &= -7 \\ \text{Eliminar} \rightarrow \boxed{6x_1} + 2x_2 + 8x_3 &= 26 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 8 & 2 & -7 \\ 6 & 2 & 8 & 26 \end{bmatrix}$$

[1] En oposición al **pivoteo total**, que se analizará más tarde en esta sección. Para la eliminación de Gauss-Jordan, consultar la sección 19.2.

Para eliminar x_1 de las otras ecuaciones (aquí, de la tercera ecuación), se hace

Restar 6/3 = 2 veces la ecuación pivotal de la tercera ecuación.

El resultado se muestra enseguida.

Segundo paso. Eliminación de x_2

La primer ecuación se deja sin modificar y se toma la *nueva* segunda ecuación como la ecuación pivotal. (En este caso sigue siendo la segunda ecuación anterior porque en el primer paso no hay término x_1 a eliminar.)

$$\begin{array}{rl} & 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8 \\ \text{Pivote} \rightarrow & \boxed{8x_2} + 2x_3 = -7 \\ \text{Eliminar} \rightarrow & \boxed{-8x_2} + 4x_3 = 10 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 8 & 2 & -7 \\ 0 & -8 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

Para eliminar x_2 de las ecuaciones que están abajo de la ecuación pivotal (aquí, a partir de la tercera ecuación), se hace:

Restar −8/8 = −1 veces la ecuación pivotal de la tercera ecuación.

A continuación se muestra el sistema triangular resultante. Aquí termina la eliminación hacia adelante. Ahora viene la sustitución hacia atrás.

Sustitución hacia atrás. Determinación de x_3, x_2, x_1.

El sistema triangular obtenido en el paso 2 es

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 8 \\ 8x_2 + 2x_3 &= -7 \\ 6x_3 &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 8 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

A partir de este sistema, al tomar primero la última ecuación, luego la segunda ecuación y por último la primera ecuación, se calcula la solución

$$x_3 = \tfrac{3}{6} = \tfrac{1}{2}$$

$$x_2 = \tfrac{1}{8}(-7 - 2x_3) = -1$$

$$x_1 = \tfrac{1}{3}(8 - 5x_2 - 2x_3) = 4.$$

Lo anterior coincide con los valores dados arriba. ∎

El algoritmo general se muestra en la tabla 19.1. Para explicarlo se han numerado algunos de sus renglones. Por uniformidad, b_j se denota por $a_{j,n+1}$. El término m_{jk} en el tercer renglón sugiere el término *multiplicador*, ya que éstos son los factores por los que es necesario multiplicar la ecuación pivotal E_k^* en el paso k antes de restarla de una ecuación E_j^* abajo de E_k^*, a partir de lo cual se desea eliminar x_k. Aquí, E_k^* y E_j^* se han escrito para indicar que después del paso 1 éstas ya no son las ecuaciones dadas en (1), sino que experimentaron un cambio en cada paso, como se indica en el renglón 4. En consecuencia, el posible pivoteo en el renglón 1 siempre se refiere a las ecuaciones más recientes, y $j \geqq k$ indica que se dejan sin modificar todas las ecuaciones que sirvieron como ecuaciones pivotales en pasos previos. Para $p = k$ en el renglón 4 se obtiene 0 en la derecha, como debe ser en la eliminación,

$$a_{jk} - m_j a_{kk} = a_{jk} - \frac{a_{jk}}{a_{kk}} a_{kk} = 0.$$

Tabla 19-1
Eliminación de Gauss

ALGORITMO GAUSS ($\widetilde{\mathbf{A}} = [a_{jk}] = [\mathbf{A} \;\; \mathbf{b}]$)

Este algoritmo calcula la solución única $\mathbf{x} = x_j$ del sistema (1) o indica que (1) no tiene solución única.

ENTRADA: La matriz aumentada $\widetilde{\mathbf{A}} = [a_{jk}]$ de $n \times (n+1)$, en donde $a_{j,n+1} = b_j$

SALIDA: La solución $\mathbf{x} = [x_j]$ de (1) o el mensaje de que el sistema (1) no tiene solución única.

Para $k = 1, \cdots, n-1$, ejecutar:

1 Encontrar el menor $j \geqq k$ tal que $a_{jk} \neq 0$.
Si tal j no existe, entonces dar como SALIDA "No existe solución única". Detener el proceso.
[*Procedimiento completado sin éxito;* A *es singular*]

2 En caso contrario, cambiar el contenido de los renglones j y k de $\widetilde{\mathbf{A}}$.
Para $j = k+1, \cdots, n$, ejecutar:

3 $$m_{jk} := \frac{a_{jk}}{a_{kk}};$$

Para $p = k+1, \cdots, n+1$, ejecutar:

4 $$a_{jp} := a_{jp} - m_{jk} a_{kp}$$

Fin

Fin

Fin

5 Si $a_{nn} = 0$, entonces dar como SALIDA "No existe solución única"
Detener el proceso.
En caso contrario,

6 $$x_n = \frac{a_{n,n+1}}{a_{nn}} \qquad [\textit{Iniciar sustitución hacia atrás}]$$

Para $i = n-1, \cdots, 1$, ejecutar:

7 $$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \right)$$

Fin

SALIDA $\mathbf{x} = [x_j]$. Detener el proceso.

Fin de GAUSS

En el renglón 5, si la última ecuación en el sistema *triangular* es $0 = b_n^* \neq 0$, entonces no hay solución. Si es $0 = b_n^* = 0$, no se tiene una solución única porque en este caso hay menos ecuaciones que incógnitas.

Ejemplo 2. Eliminación de Gauss en la tabla 19.1, muestra de cálculos.

En el ejemplo 1 se tenía $a_{11} = 0$ y $a_{21} \neq 0$, por lo que $j = 2$ y, por el renglón 2 del algoritmo, se intercambiaron las ecuaciones E_1 y E_2. Luego se calcularon $m_{21} = 0/3 = 0$ y $m_{31} = 6/3 = 2$, de modo que en el renglón 4 con $p = 2, 3, 4$ no se obtuvo ningún cambio en E_2, y en E_1 (identificando los nuevos elementos con un asterisco)

$$(p = 2) \qquad a_{32}^* = a_{32} - m_{31}a_{12} = 2 - 2 \cdot 5 = -8$$

$$(p = 3) \qquad a_{33}^* = a_{33} - m_{31}a_{13} = 8 - 2 \cdot 2 = 4$$

$$(p = 4) \qquad a_{34}^* = a_{34} - m_{31}a_{14} = b_3 - m_{31}b_1 = 26 - 2 \cdot 8 = 10$$

como los coeficientes de E_1^* en el paso 2.

Conteo de operaciones

De manera bastante general, la calidad de un método numérico se juzga en términos de:

La cantidad de almacenamiento
La cantidad de tiempo (≡ número de operaciones)
El efecto del error por redondeo

Para la eliminación de Gauss, el conteo de operaciones es como sigue. En el paso k se elimina x_k de $n - k$ ecuaciones. Para efectuar lo anterior se requieren $n - k$ divisiones para calcular m_{jk} (renglón 3) y $(n - k)(n - k + 1)$ multiplicaciones y el mismo número de sustracciones (ambas en el renglón 4). Como se ejecutan $n - 1$ pasos, entonces k varía desde 1 hasta $n - 1$ y así el número total de operaciones en esta eliminación hacia adelante es

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n-1} (n - k) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (n - k)(n - k + 1) \qquad \text{(escribir } n - k = s\text{)}$$

$$= \sum_{s=1}^{n-1} s + 2 \sum_{s=1}^{n-1} s(s + 1) = \tfrac{1}{2}(n - 1)n + \tfrac{2}{3}(n^2 - 1)n \approx \tfrac{2}{3}n^3$$

en donde $2n^3/3$ se obtiene al eliminar las potencias más bajas de n. Se observa que $f(n)$ crece de manera casi proporcional a n^3. Se dice que $f(n)$ es de *orden* n^3 y se escribe

$$f(n) = O(n^3),$$

en donde O sugiere el término **orden**. La definición general de O es como sigue. Se escribe

$$f(n) = O(h(n))$$

si el cociente $|f(n)/h(n)|$ permanece acotado (es decir, que no tiende a infinito) cuando $n \to \infty$. En este caso, $h(n) \to n^3$ y, en efecto, $f(n)/n^3 \to 2/3$ porque los términos omitidos divididos entre n^3 tienden a cero cuando $n \to \infty$.

En la sustitución hacia atrás de x_i se efectúan $n - i$ multiplicaciones y el mismo número de sustracciones, así como una división. Por tanto, el número de operaciones en la sustitución hacia atrás es

$$b(n) = \sum_{i=1}^{n} (n - i) + n = \sum_{s=1}^{n} s + n = \tfrac{1}{2}n(n + 1) + n \approx \tfrac{1}{2}n^2 = O(n^2).$$

Se observa que la expresión anterior crece más lentamente que el número de operaciones en la eliminación hacia adelante del algoritmo de Gauss, de modo que es despreciable para sistemas grandes debido a que es menor por un factor n, aproximadamente. Por ejemplo, si una operación se efectúa en 10^{-6} s, entonces los tiempos requeridos son:

n	Eliminación	Sustitución hacia atrás
100	0.7 sec	0.005 sec
1000	11 min	0.5 sec

Más sobre pivoteo. Cambio de escala

Se sabe que un elemento pivotal a_{kk}^* debe ser diferente de cero. Si es cero, entonces es *necesario* pivotear (intercambiar ecuaciones). Pero esto no es todo: si a_{kk}^* es pequeño en valor absoluto, *debe* pivotearse, porque entonces sería necesario restar grandes múltiplos de la ecuación pivotal de otras ecuaciones, amplificando así los errores por redondeo. Lo anterior puede afectar la exactitud del resultado. Antes de analizar cómo superar esta dificultad, se ilustrará con un ejemplo sencillo.

Ejemplo 3. Dificultad con pequeños elementos pivotales.

La solución del sistema

$$0.0004x_1 + 1.402x_2 = 1.406$$

$$0.4003x_1 - 1.502x_2 = 2.501$$

es $x_1 = 10$, $x_2 = 1$. Este sistema se resuelve por eliminación de Gauss, usando aritmética de punto flotante con cuatro dígitos.

(a) Si se elige la primera ecuación como la ecuación pivotal, es necesario multiplicar esta ecuación por $m = 0.4003/0.0004 = 1001$ y restar el resultado de la segunda ecuación, con lo que se obtiene

$$-1405x_2 = -1404.$$

Por tanto, $x_2 = -1404/(-1405) = 0.9993$, y por la primera ecuación, en vez de $x_1 = 10$ se obtiene

$$x_1 = \frac{1}{0.0004}(1.406 - 1.402 \cdot 0.9993) = \frac{0.005}{0.0004} = 12.5.$$

Esta falla ocurre porque $|a_{11}|$ es pequeño en comparación con $|a_{12}|$, de modo que un pequeño error por redondeo en x_2 produjo un gran error en x_1.

(b) Si se elige la segunda ecuación como la ecuación pivotal, es necesario multiplicar esta ecuación por 0.0004/0.4003 = 0.0009993 y restar el resultado de la primera ecuación, con lo que se obtiene

$$1.404x_2 = 1.404.$$

Por tanto, $x_2 = 1$, y por la segunda ecuación se tiene que $x_1 = 10$. Este éxito ocurre porque $|a_{21}|$ no es muy pequeño en comparación con $|a_{22}|$, de modo que un pequeño error por redondeo en x_2 no conduce a un gran error en x_1. En efecto, por ejemplo, si se tuviera $x_2 = 1.002$, entonces por la segunda ecuación seguiría teniéndose el valor aceptable $x_1 = (2.501 + 1.505)/0.4003 = 10.01$. ∎

En el *pivoteo parcial*, en el primer paso por lo general se elige como ecuación pivotal una ecuación en la que el coeficiente de x_1 es el de mayor valor absoluto; de manera semejante para x_2 en el segundo paso, etc. **Pivoteo total** significaría que se buscara un coeficiente con el mayor valor absoluto *de todo el sistema* y que la eliminación se iniciara con la variable correspondiente, usando este coeficiente como el elemento pivotal; y de manera semejante en los pasos subsiguientes. Lo anterior es difícil de realizar en la práctica, ya que es mucho más costoso que el pivoteo parcial.

Hay una trampa: un coeficiente podría amplificarse multiplicando una ecuación completa, *pero ésto no cambiaría la solución calculada*. Multiplicar una ecuación por un factor se denomina **cambio de escala** (o escalación) **del renglón**; aquí, por lo general se usa una potencia de 10 (o de la base β de la máquina), de modo que después los coeficientes de mayores valores absolutos de la ecuación tengan su valor absoluto entre 0.1 y 1 (o entre β^{-1} y 1, respectivamente).

En la práctica se utiliza el pivoteo parcial con cambio de escala, es decir, en el k-ésimo paso ($k = 1, 2, \cdots$) de la eliminación se elige como ecuación pivotal una ecuación de entre las $n - k + 1$ ecuaciones disponibles, de modo que el cociente del coeficiente de x_k y el coeficiente de mayor valor absoluto en la ecuación sea máximo en valor absoluto. En caso de que haya varias de tales ecuaciones, se toma la primera de ellas.

Ejemplo 4. Elección de las ecuaciones pivotales.

Aplicar el método recientemente mencionado a la elección de ecuaciones pivotales en el siguiente sistema y calcular la solución.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= -1 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 6x_1 + 8x_2 - x_3 &= 35. \end{aligned}$$

Solución. Se tiene

$$\frac{|a_{11}|}{\max |a_{1k}|} = \frac{3}{5}, \qquad \frac{|a_{21}|}{\max |a_{2k}|} = \frac{3}{3}, \qquad \frac{|a_{31}|}{\max |a_{3k}|} = \frac{6}{8}.$$

En consecuencia, como ecuación pivotal se elige la segunda ecuación y se elimina x_1, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 12x_2 + x_3 &= 37. \end{aligned}$$

Ahora se tiene

$$\frac{|a_{22}^*|}{\max |a_{2k}^*|} = \frac{2}{6}, \qquad \frac{|a_{32}^*|}{\max |a_{3k}^*|} = \frac{12}{12}.$$

Por tanto, como ecuación pivotal se elige la última ecuación y se obtiene el sistema triangular

$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 12x_2 + x_3 &= 37 \\ \tfrac{37}{6} x_3 &= \tfrac{37}{6}. \end{aligned}$$

Al aplicar sustitución hacia atrás ahora se obtiene la solución $x_3 = 1$, $x_2 = 3$, $x_1 = 2$, en este orden. ∎

Para dos importantes clases de matrices no se requiere pivoteo, a saber, las **matrices diagonalmente dominantes**, es decir,

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} |a_{jk}| \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

y las matrices simétricas y positivas definidas, es decir

$$\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A}, \qquad \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0 \quad \text{para todo } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

En la obra citada en el apéndice 1 como referencia [E13], pág. 37 se analizan estimaciones del error para la eliminación de Gauss.

Problemas de la sección 19.1

Resolver los siguientes sistemas lineales por eliminación de Gauss (con pivoteo parcial en caso de ser necesario).

1. $x_1 - 4x_2 = -2$, $3x_1 + x_2 = 7$

2. $6x_1 + x_2 = -3$, $4x_1 - 2x_2 = 6$

3. $5x_1 + 2x_2 = -1.5$, $12x_1 - 3x_2 = 12.0$

4. $4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$, $7x_2 + 4x_3 = 5$, $3x_2 + 2x_3 = 3$

5. $x_2 + 3x_3 = 9$, $2x_1 + 2x_2 - x_3 = 8$, $-x_1 + 5x_3 = 8$

6. $x_2 - 4x_3 = 2$, $x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4$, $2x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 6$

7. $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$, $-x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 32$, $3x_1 - 4x_3 = 17$

8. $-2.0x_2 + 12.0x_3 = 12.00$, $2.5x_1 + x_2 - 3.2x_3 = -1.88$, $0.5x_1 - 1.4x_2 + 0.5x_3 = 5.84$

9. $-0.8x_1 + 1.6x_2 - 4.3x_3 = 5.28$, $x_1 - 7.3x_2 + 0.5x_3 = -32.04$, $4.5x_1 - 3.5x_2 = -3.30$

10. $$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + x_3 &= 2 \\ -4x_2 + 8x_3 &= -3 \\ 10x_1 - 6x_2 + 26x_3 &= 0 \end{aligned}$$

11. $$\begin{aligned} 3.0x_1 + x_2 + 2.0x_3 &= 0 \\ -2.5x_1 - 0.5x_2 - 11.0x_3 &= 0 \\ 1.8x_1 + 2.8x_2 + 4.0x_3 &= 16.1 \end{aligned}$$

12. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4 \\ -6x_1 + 3x_2 - 9x_3 &= -6 \\ 4x_1 - 2x_2 &= -2 \end{aligned}$$

13. $$\begin{aligned} 4x_1 + 10x_2 - 2x_3 &= -20 \\ -x_1 - 15x_2 + 3x_3 &= 30 \\ 25x_2 - 5x_3 &= -50 \end{aligned}$$

Resolver los siguientes sistemas lineales por eliminación de Gauss con elección de las ecuaciones pivotales aplicando el método del ejemplo 4.

14. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3.8 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 &= -5.7 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2.8 \end{aligned}$$

15. $$\begin{aligned} 5x_1 + 10x_2 - 2x_3 &= -0.30 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1.91 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 1.16 \end{aligned}$$

16. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -11 \\ 10x_1 + x_2 + x_3 &= 8 \\ 10x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

17. Resolver el siguiente sistema por eliminación de Gauss sin pivoteo.

$$\begin{aligned} \epsilon x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 2. \end{aligned}$$

Demostrar que, para cualquier longitud de palabra de máquina fija y un $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, la computadora proporciona $x_2 = 1$ y luego $x_1 = 0$. Resolver el sistema exactamente y demostrar que para la solución exacta, $x_1 \epsilon \to 1$ y $x_2 \to 1$ cuando $\to 0$. Hacer un comentario.

18. Resolver el sistema del problema 17 por eliminación de Gauss con pivoteo. Comparar los resultados y hacer un comentario.

19. Intentar resolver cada uno de los dos sistemas siguientes por eliminación de Gauss. Explicar por qué la eliminación de Gauss fracasa en caso de que no exista solución.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 9x_1 + 5x_2 - x_3 &= 13 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ 9x_1 + 5x_2 - x_3 &= 12. \end{aligned}$$

20. Comprobar los cálculos del conteo de operaciones del método de Gauss presentado en el texto.

19.2 SISTEMAS LINEALES: FACTORIZACIÓN LU, INVERSIÓN DE MATRICES

Se continuará el análisis de los métodos numéricos para resolver sistemas lineales de n ecuaciones en n incógnitas $x_1, \cdots, x_n$,

(1) $$\mathbf{AX} = \mathbf{B},$$

en donde $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ es la matriz de coeficientes de $n \times n$, $\mathbf{x}^T = [x_1 \cdots x_n]$ y $\mathbf{b}^T = [b_1 \cdots b_n]$. Se presentarán tres métodos relacionados que son modificaciones de la eliminación de Gauss. Tales métodos reciben su denominación en honor de los científicos Doolittle, Crout y Cholesky, respectivamente, y usan la idea de la factorización **LU** de **A**, que se explicará en primer término.

Una **factorización LU** de una matriz cuadrada dada A es de la forma

(2) $$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{LU}}$$

en donde **L** es triangular inferior y **U** es triangular superior. Por ejemplo,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} = \mathbf{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Es posible demostrar que para cualquier matriz no singular (ver la sección 7.7) los renglones pueden reordenarse de modo que la matriz resultante **A** tiene una factorización **LU** (2) en la que **L** resulta ser la matriz de los multiplicadores m_{jk} de la eliminación de Gauss, con diagonal principal $1, \cdots, 1$, y **U** es la matriz del sistema triangular que se obtiene al término de la eliminación de Gauss. (Consultar la referencia [E3], págs. 155-156.)

Así pues, ahora la ***idea crucial*** es que **L** y **U** en (2) puedan calcularse directamente, sin resolver ecuaciones simultáneas (por tanto, sin usar la eliminación de Gauss). Como puede verse a partir de un conteo, para efectuar lo anterior se requieren aproximadamente $n^3/3$ operaciones, aproximadamente la mitad de las necesarias para ejecutar la eliminación de Gauss, que requiere casi $2n^3/3$ operaciones (ver la sección 19.1). Y una vez que se tiene (2), es posible usarla para resolver $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ en dos pasos, que implican sólo aproximadamente n^2 operaciones, notando simplemente que $\mathbf{Ax} = \mathbf{LUx} = \mathbf{b}$ puede escribirse como

(3) $$\boxed{\text{(a)}\quad \mathbf{Ly} = \mathbf{b} \quad \text{en donde} \quad \text{(b)}\quad \mathbf{Ux} = \mathbf{y}}$$

y resolviendo primero (3a) para **y** y luego (3b) para **x**. Lo anterior se denomina **método de Doolittle**. Los dos sistemas, (3a) y (3b), son triangulares, por lo que su solución es la misma que se obtiene al aplicar sustitución hacia atrás en la eliminación de Gauss.

A partir de (2) se obtiene un método semejante, el **método de Crout**, si se requiere que **U** (en vez de **L**) tenga diagonal principal $1, \cdots, 1$. En cualquier caso, la factorización (2) es única.

Ejemplo 1. Método de Doolittle.

Resolver el sistema del ejemplo 1 de la sección 19.1 aplicando el método de Doolittle.

Solución. La descomposición (2) se obtiene a partir de

$$\mathbf{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

mediante la determinación de los m_{jk} y los u_{jk}, usando multiplicación matricial. Al recorrer A renglón por renglón, sucesivamente se obtiene

$a_{11} = 3 = u_{11}$	$a_{12} = 5 = u_{12}$	$a_{13} = 2 = u_{13}$
$a_{21} = 0 = m_{21}u_{11}$	$a_{22} = 8 = m_{21}u_{12} + u_{22}$	$a_{23} = 2 = m_{21}u_{13} + u_{23}$
$m_{21} = 0$	$u_{22} = 8$	$u_{23} = 2$
$a_{31} = 6 = m_{31}u_{11}$	$a_{32} = 2 = m_{31}u_{12} + m_{32}u_{22}$	$a_{33} = 8 = m_{31}u_{13} + m_{32}u_{23} + u_{33}$
$= m_{31} \cdot 3$	$= 2 \cdot 5 + m_{32} \cdot 8$	$= 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 + u_{33}$
$m_{31} = 2$	$m_{32} = -1$	$u_{33} = 6$

Por tanto, la factorización (2) es

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Primero se resuelve $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$, determinando y_1, luego y_2, y después y_3, es decir,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 26 \end{bmatrix}. \qquad \text{Solución} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Luego se resuelve $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$, determinando x_3, luego x_2, y después x_1, es decir,

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}. \qquad \text{Solución} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

Lo anterior coincide con la solución del ejemplo 1 de la sección 19.1.

Las fórmulas en el ejemplo 1 sugieren que para n en general los elementos de las matrices $\mathbf{L} = [m_{jk}]$ (con diagonal principal $1, \cdots, 1$) y $\mathbf{U} = [u_{jk}]$ en el *método de Doolittle* se calculan a partir de

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned} u_{1k} &= a_{1k} & k &= 1, \cdots, n \\ u_{jk} &= a_{jk} - \sum_{s=1}^{j-1} m_{js}u_{sk} & k &= j, \cdots, n; \quad j \geqq 2 \\ m_{j1} &= \frac{a_{j1}}{u_{11}} & j &= 2, \cdots, n \\ m_{jk} &= \frac{1}{u_{kk}}\left(a_{jk} - \sum_{s=1}^{k-1} m_{js}u_{sk}\right) & j &= k+1, \cdots, n; \quad k \geqq 2. \end{aligned}$$

Las fórmulas correspondientes para la factorización **LU** en el *método de Crout* son bastante semejantes:

$$\text{(5)} \qquad \begin{aligned} m_{j1} &= a_{j1} & j &= 1, \cdots, n \\ m_{jk} &= a_{jk} - \sum_{s=1}^{k-1} m_{js}u_{sk} & j &= k, \cdots, n; \quad k \geqq 2 \\ u_{1k} &= \frac{a_{1k}}{m_{11}} & k &= 2, \cdots, n \\ u_{jk} &= \frac{1}{m_{jj}}\left(a_{jk} - \sum_{s=1}^{j-1} m_{js}u_{sk}\right) & k &= j+1, \cdots, n; \quad j \geqq 2. \end{aligned}$$

Método de Cholesky

Para una matriz **A** *simétrica positiva definida* (es decir, que $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{Ax} > 0$ para toda $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$), en (2) es posible elegir inclusive $\mathbf{U} = \mathbf{L}^{\mathsf{T}}$, por lo que $u_{jk} = m_{jk}$ (pero sin imponer condiciones sobre los elementos de la diagonal principal).

Por ejemplo,

$$\text{(6)} \qquad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 14 \\ 2 & 17 & -5 \\ 14 & -5 & 83 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 7 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

El método popular para resolver $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con base en esta factorización $\mathbf{A} = \mathbf{LL}^{\mathsf{T}}$ se denomina **método de Cholesky**.

Las fórmulas para la factorización son

$$\text{(7)} \qquad \begin{aligned} m_{11} &= \sqrt{a_{11}} & & \\ m_{jj} &= \sqrt{a_{jj} - \sum_{s=1}^{j-1} m_{js}^{2}} & j &= 2, \cdots, n \\ m_{j1} &= \frac{a_{j1}}{m_{11}} & j &= 2, \cdots, n \\ m_{jk} &= \frac{1}{m_{kk}}\left(a_{jk} - \sum_{s=1}^{k-1} m_{js}m_{ks}\right) & j &= k+1, \cdots, n; \quad k \geqq 2. \end{aligned}$$

Si **A** es simétrica pero no positiva definida, todavía puede aplicarse este método, pero entonces se obtiene una matriz *compleja* **L**, por lo que se vuelve impráctico.

Ejemplo 2. Método de Cholesky.

Resolver el siguiente sistema aplicando el método de Cholesky:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 14x_3 &= 14 \\ 2x_1 + 17x_2 - 5x_3 &= -101 \\ 14x_1 - 5x_2 + 83x_3 &= 155. \end{aligned}$$

Solución. A partir de (7) o de la forma de la factorización

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 14 \\ 2 & 17 & -5 \\ 14 & -5 & 83 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ 0 & m_{22} & m_{32} \\ 0 & 0 & m_{33} \end{bmatrix}$$

se calculan, en el orden dado,

$$m_{11} = \sqrt{a_{11}} = 2 \qquad m_{21} = \frac{a_{21}}{m_{11}} = \frac{2}{2} = 1 \qquad m_{31} = \frac{a_{31}}{m_{11}} = \frac{14}{2} = 7$$

$$m_{22} = \sqrt{a_{22} - m_{21}^2} = \sqrt{17 - 1} = 4$$

$$m_{32} = \frac{1}{m_{22}}(a_{32} - m_{31}m_{21}) = \frac{1}{4}(-5 - 7 \cdot 1) = -3$$

$$m_{33} = \sqrt{a_{33} - m_{31}^2 - m_{32}^2} = \sqrt{83 - 7^2 - (-3)^2} = 5.$$

Esto coincide con (6). Ahora es necesario resolver $Ly = b$, es decir,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 7 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -101 \\ 155 \end{bmatrix}. \qquad \text{Solución} \qquad y = \begin{bmatrix} 7 \\ -27 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Como segundo paso, es necesario resolver $Ux = L^T x = y$, es decir,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -27 \\ 5 \end{bmatrix}. \qquad \text{Solución} \qquad x = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

■

Eliminación de Gauss-Jordan. Inversión de matrices

Otra variante de la eliminación de Gauss es la **eliminación de Gauss-Jordan**, introducida por W. Jordan en 1920, en donde la sustitución hacia atrás se evita mediante cálculos adicionales con los que la matriz se reduce a forma diagonal, en vez de a la forma triangular que se obtiene en la eliminación de Gauss. Pero esta reducción de la forma triangular de Gauss a la forma diagonal requiere efectuar más operaciones que en la sustitución hacia atrás, de modo que el método es *desventajoso* para resolver sistemas $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Sin embargo, es posible usarlo para invertir matrices, en donde la situación es como sigue.

La **inversa** de una matriz cuadrada no singular **A** puede determinarse en principio resolviendo los n sistemas

$$\text{(8)} \qquad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}_j \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

en donde $\mathbf{b}_j$ es la j-ésima columna de la matriz unitaria de $n \times n$.

Sin embargo, es preferible producir $\mathbf{A}^{-1}$ operando sobre la matriz unitaria **I** de la misma manera que en el algoritmo de Gauss-Jordan, reduciendo **A** a **I**. En la sección 7.7 se proporcionó un típico ejemplo ilustrativo de este método.

Problemas de la sección 19.2

Resolver los siguientes sistemas lineales aplicando el método de Doolittle. También mostrar la factorización **LU**.

1. $3x_1 + 2x_2 = 18$, $18x_1 + 17x_2 = 123$

2. $2x_1 - 4x_2 = 0$, $8x_1 - 15x_2 = 0.5$

3. $4x_1 - 6x_2 = -17.0$, $8x_1 - 7x_2 = -26.5$

4. $x_1 + x_2 + x_3 = 5$, $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6$, $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8$

5. $x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -11$, $x_2 = 1$, $2x_1 + 9x_2 + 11x_3 = -20$

6. $3x_1 + 2x_2 = 14$, $12x_1 + 13x_2 + 6x_3 = 40$, $-3x_1 + 8x_2 + 9x_3 = -28$

7. $5x_1 + 4x_2 + x_3 = 3.4$, $10x_1 + 9x_2 + 4x_3 = 8.8$, $10x_1 + 13x_2 + 15x_3 = 19.2$

8. $x_1 - x_2 + 2.6x_3 = -4.94$, $0.5x_1 - 3.0x_2 + 3.3x_3 = -8.27$, $-1.5x_1 - 3.5x_2 - 10.4x_3 = 10.51$

9. $3x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 23$, $18x_1 + 48x_2 + 39x_3 = 136$, $9x_1 - 27x_2 + 42x_3 = 45$

Aplicando el método de Crout, resolver el

10. problema 1. **11.** problema 5. **12.** problema 6.

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales aplicando el método de Cholesky.

13. $9x_1 + 6x_2 + 12x_3 = 174$, $6x_1 + 13x_2 + 11x_3 = 236$, $12x_1 + 11x_2 + 26x_3 = 308$

14. $0.01x_1 + 0.03x_3 = 0.14$, $0.16x_2 + 0.08x_3 = 0.16$, $0.03x_1 + 0.08x_2 + 0.14x_3 = 0.54$

15. $4x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 0$, $6x_1 + 34x_2 + 52x_3 = -160$, $8x_1 + 52x_2 + 129x_3 = -452$

16. $4x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 44$, $10x_1 + 26x_2 + 26x_3 = 128$, $8x_1 + 26x_2 + 61x_3 = 214$

Encontrar la inversa de la matriz dada, aplicando el método de Gauss-Jordan.

17. $\begin{bmatrix} 2 & -0.5 \\ -1 & 1.5 \end{bmatrix}$ **18.** $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ **19.** $\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.7 & 0.2 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ **21.** $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$ **22.** $\begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$

19.3 SISTEMAS LINEALES: SOLUCIÓN POR ITERACIÓN

La eliminación de Gauss y sus variantes presentadas en las dos últimas secciones pertenecen a los **métodos directos** para resolver sistemas lineales de ecuaciones; son métodos con los que se obtienen soluciones después de efectuar cálculos que pueden especificarse de antemano. En contraste, en un **método indirecto** o **iterativo** se empieza a partir de una aproximación de la solución verdadera y, si se tiene éxito, se obtienen aproximaciones cada vez mejores a partir de un ciclo computacional que se repite tanto como sea necesario a fin de alcanzar una exactitud requerida, de modo que la cantidad de cálculos aritméticos depende de la exactitud requerida y varía de un caso a otro.

Los métodos iterativos se aplican si la convergencia es rápida (si las matrices tienen grandes elementos en la diagonal principal, como se verá), de modo que se ahorran operaciones en comparación con un método directo, o si un gran sistema es **ralo**, es decir, que tiene muchos coeficientes cero, de modo que se desperdiciaría espacio para almacenar ceros, por ejemplo, 9995 ceros por ecuación en un problema potencial de 10^4 ecuaciones en 10^4 incógnitas con típicamente sólo 5 términos diferentes de cero por ecuación (más sobre este tema se presentará en la sección 20.4).

Método de iteración de Gauss-Seidel

Este es un método iterativo de gran importancia práctica, que puede explicarse simplemente en términos de un ejemplo.

Ejemplo 1. Iteración de Gauss-Seidel.

Se considerará el sistema lineal

$$\begin{aligned} x_1 - 0.25x_2 - 0.25x_3 \qquad\qquad &= 50 \\ -0.25x_1 + x_2 \qquad\qquad - 0.25x_4 &= 50 \\ -0.25x_1 \qquad\qquad + x_3 - 0.25x_4 &= 25 \\ - 0.25x_2 - 0.25x_3 + x_4 &= 25. \end{aligned} \tag{1}$$

(Ecuaciones de esta forma se presentan en la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales y en interpolación por cerchas.) Este sistema se escribe en la forma

$$\begin{aligned} x_1 &= \qquad\quad 0.25x_2 + 0.25x_3 \qquad\qquad + 50 \\ x_2 &= 0.25x_1 \qquad\qquad\qquad + 0.25x_4 + 50 \\ x_3 &= 0.25x_1 \qquad\qquad\qquad + 0.25x_4 + 25 \\ x_4 &= \qquad\quad 0.25x_2 + 0.25x_3 \qquad\qquad + 25. \end{aligned} \tag{2}$$

Estas ecuaciones se usan para iteración, es decir, se empieza a partir de una aproximación (quizá deficiente) de la solución, por ejemplo, $x_1^{(0)} = 100$, $x_2^{(0)} = 100$, $x_3^{(0)} = 100$, $x_4^{(0)} = 100$ y a partir de (2) se calcula una aproximación presumiblemente mejor

Usar los valores "anteriores"

(Aquí todavía no se dispone de los valores "nuevos")

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \qquad\quad 0.25x_2^{(0)} + 0.25x_3^{(0)} \qquad\qquad + 50.00 = 100.00 \\ x_2^{(1)} &= 0.25x_1^{(1)} \qquad\qquad\qquad + 0.25x_4^{(0)} + 50.00 = 100.00 \\ x_3^{(1)} &= 0.25x_1^{(1)} \qquad\qquad\qquad + 0.25x_4^{(0)} + 25.00 = 75.00 \\ x_4^{(1)} &= \qquad\quad 0.25x_2^{(1)} + 0.25x_3^{(1)} \qquad\qquad + 25.00 = 68.75. \end{aligned} \tag{3}$$

Usar los valores "nuevos"

Se observa que estas ecuaciones se obtienen a partir de (2) al sustituir en la derecha las aproximaciones *más recientes*. De hecho, elementos correspondientes reemplazan a elementos previos tan pronto como han sido calculados, de modo que en las ecuaciones segunda y tercera se usa $x_1^{(1)}$ (no $x_1^{(0)}$), y en la última ecuación de (3) se usan $x_2^{(1)}$ y $x_3^{(1)}$ (no $x_2^{(0)}$ y $x_3^{(0)}$). En el siguiente paso se obtiene

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= \qquad\quad 0.25x_2^{(1)} + 0.25x_3^{(1)} \qquad\qquad + 50.00 = 93.75 \\ x_2^{(2)} &= 0.25x_1^{(2)} \qquad\qquad\qquad + 0.25x_4^{(1)} + 50.00 = 90.62 \\ x_3^{(2)} &= 0.25x_1^{(2)} \qquad\qquad\qquad + 0.25x_4^{(1)} + 25.00 = 65.62 \\ x_4^{(2)} &= \qquad\quad 0.25x_2^{(2)} + 0.25x_3^{(2)} \qquad\qquad + 25.00 = 64.06. \end{aligned}$$

En la práctica se efectuarían pasos adicionales y se obtendría una solución aproximada más exacta.

El lector puede demostrar que la solución exacta es $x_1 = x_2 = 87.5$, $x_3 = x_4 = 62.5$. ∎

A fin de obtener un algoritmo para la iteración de Gauss-Seidel, a continuación se obtendrán las fórmulas generales para esta iteración.

Se supondrá que $a_{jj} = 1$ para $j = 1, \cdots, n$. (Observar que esto puede lograrse en caso de que sea posible reordenar las ecuaciones de modo que ningún coeficiente en la diagonal sea cero; luego es posible dividir cada ecuación entre el coeficiente diagonal correspondiente.) Ahora se escribe

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} + \mathbf{L} + \mathbf{U} \tag{4}$$

en donde $\mathbf{I}$ es la matriz unitaria de $n \times n$ y $\mathbf{L}$ y $\mathbf{U}$ son, respectivamente, matrices triangular inferior y triangular superior con diagonales principales iguales a cero. Si (4) se sustituye en $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, se obtiene

$$\mathbf{Ax} = (\mathbf{I} + \mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Al tomar $\mathbf{Lx}$ y $\mathbf{Ux}$ en la derecha, entonces como $\mathbf{Ix} = \mathbf{b}$ se obtiene

$$\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{Lx} - \mathbf{Ux}. \tag{5}$$

Recordando por el cálculo en el ejemplo 1 que abajo de la diagonal principal se tomaron "nuevas" aproximaciones y que arriba de la diagonal principal se tomaron "viejas" aproximaciones, entonces por (5) se obtienen las fórmulas de iteración buscadas

$$\text{(6)} \qquad \boxed{\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{b} - \mathbf{L}\mathbf{x}^{(m+1)} - \mathbf{U}\mathbf{x}^{(m)}}$$

en donde $\mathbf{x}^{(m)} = [x_j^{(m)}]$ es la m-ésima aproximación y $\mathbf{x}^{(m+1)} = [x_j^{(m+1)}]$ es la $(m+1)$-ésima aproximación. En componentes, con lo anterior se obtiene la fórmula en el renglón 1 del algoritmo de la tabla 19.2, en donde el factor $1/a_{jj}$ satisface la hipótesis en (4) y (5) de que todos los elementos en la diagonal principal de **A** son iguales a 1.

Tabla 19-2
Iteración de Gauss-Seidel

ALGORITMO GAUSS-SEIDEL ($\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{x}^{(0)}$, $\in$, N)
Este algoritmo calcula una solución $\mathbf{x}$ del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dada una aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, en donde $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ es una matriz de $n \times n$ con $a_{jj} \neq 0$, $j = 1, \cdots, n$.

ENTRADA: $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, tolerancia $\in > 0$, número máximo de iteraciones N

SALIDA: Solución aproximada $\mathbf{x}^{(m)} = [x_j^{(m)}]$ o mensaje de falla indicando que $\mathbf{x}^{(N)}$ no satisface la condición de tolerancia

Para $m = 0, \cdots, N-1$, ejecutar:

Para $j = 1, \cdots, n$, ejecutar:

1 $$x_j^{(m+1)} = -\frac{1}{a_{jj}}\left(\sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}x_k^{(m+1)} + \sum_{k=j+1}^{n} a_{jk}x_k^{(m)} - b_j\right)$$

Fin

2 Si máx $|x_j^{(m+1)} - x_j^{(m)}| < \in$, entonces dar como SALIDA $\mathbf{x}^{(m+1)}$.
Detener el proceso
[*Procedimiento completado exitosamente*]

Fin

SALIDA: "Después de N pasos de iteración no se obtuvo ninguna solución que satisfaga la condición de tolerancia".
Detener el proceso.

[*Procedimiento completado sin éxito*]

Fin de GAUSS-SEIDEL

Convergencia. Normas matriciales

Se dice que un método iterativo para resolver $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ **converge** para una $\mathbf{x}^{(0)}$ inicial si la sucesión iterativa correspondiente $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \cdots$, converge a una solución del sistema dado. La convergencia depende de la relación entre $\mathbf{x}^{(m)}$ y $\mathbf{x}^{(m+1)}$. A fin de obtener esta relación para el método de Gauss-Seidel, se usa (6). Primero se tiene

$$(\mathbf{I} + \mathbf{L})\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{b} - \mathbf{U}\mathbf{x}^{(m)}$$

y al multiplicar por $(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1}$ por la izquierda,

$$\text{(7)} \qquad \mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(m)} + (\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{b} \qquad \text{donde} \qquad \mathbf{C} = -(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}.$$

La iteración de Gauss-Seidel converge para todo $\mathbf{x}^{(0)}$ si y sólo si todos los eigenvalores (sección 7.10) de la "matriz de iteración" $\mathbf{C} = [c_{jk}]$ tienen valor absoluto menor que 1. (La demostración de este hecho se encuentra en la obra citada en el apéndice 1 como referencia [E3], pág. 191.) ***¡Precaución!*** Si se desea obtener **C**, entonces primero deben dividirse los renglones de **A** entre a_{jj} para obtener diagonal principal $1, \cdots, 1$. Si el **radio espectral** de **C** (= máximo de estos valores absolutos) es pequeño, entonces la convergencia es rápida.

Una **condición suficiente para la convergencia** es

$$\text{(8)} \qquad \boxed{\|\mathbf{C}\| < 1.}$$

Aquí, $\|\mathbf{C}\|$ es alguna **norma matricial** tal que

$$\text{(9)} \qquad \|\mathbf{C}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{jk}^{2}} \qquad \textbf{(Norma de Frobenius)}$$

o bien,

$$\text{(10)} \qquad \|\mathbf{C}\| = \max_{k} \sum_{j=1}^{n} |c_{jk}| \qquad \textbf{(Norma "suma" de las columnas)}$$

o bien,

$$\text{(11)} \qquad \|\mathbf{C}\| = \max_{j} \sum_{k=1}^{n} |c_{jk}| \qquad \textbf{(Norma "suma" de los renglones)}$$

Estas son las normas matriciales más frecuentemente utilizadas en el trabajo numérico. En (9) se toma la suma de los cuadrados de todos los elementos y luego se extrae raíz cuadrada. En (10) se toma la suma de los $|c_{jk}|$ en la columna k, donde $k = 1, \cdots, n$, y luego se considera la mayor de tales n sumas. En (11) se suman los $|a_{jk}|$ en cada renglón y luego se considera la mayor de tales n sumas.

Ejemplo 2. Prueba de convergencia para la iteración de Gauss-Seidel.

Probar si la iteración de Gauss-Seidel converge para el sistema

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 4 \\ x + 2y + z &= 4 \\ x + y + 2z &= 4 \end{aligned} \qquad \text{escrito como} \qquad \begin{aligned} x &= 2 - \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}z \\ y &= 2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}z \\ z &= 2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}y. \end{aligned}$$

Solución. La descomposición

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} + \mathbf{L} + \mathbf{U} = \mathbf{I} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

muestra que

$$\mathbf{C} = -(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 1/8 & 3/8 \end{bmatrix}$$

Se calcula la norma de Frobenius de $\mathbf{C}$

$$\|\mathbf{C}\| = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{9}{64}\right)^{1/2} = \left(\frac{50}{64}\right)^{1/2} = 0.884 < 1$$

y a partir de (8) se concluye que esta iteración de Gauss-Seidel converge. Es interesante que las otras dos normas no permiten ninguna conclusión, como debe comprobar el estudiante. ∎

Residuo. Dado un sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, el **residuo** $\mathbf{r}$ se define como

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}.}$$

Resulta evidente que $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ si y sólo si $\mathbf{x}$ es una solución. Por tanto, $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ para una solución aproximada. En la iteración de Gauss-Seidel, en cada etapa se modifica o *relaja* una componente de una solución aproximada a fin de reducir a cero una componente de $\mathbf{r}$. Por tanto, la iteración de Gauss-Seidel pertenece a una clase de métodos que a menudo se denominan **métodos de relajación**. En la siguiente sección se dirá más sobre estos los métodos.

Iteración de Jacobi

La iteración de Gauss-Seidel es un método de **correcciones sucesivas** porque se reemplazan aproximaciones por nuevas aproximaciones correspondientes tan pronto como éstas son calculadas. Un método se denomina método de **correcciones simultáneas** si ninguna componente de una aproximación $\mathbf{x}^{(m+1)}$ se usa hasta que *todas* las componentes de $\mathbf{x}^{(m+1)}$ han sido calculadas. Un método de este tipo es la **iteración de Jacobi**, semejante a la iteración de Gauss-Seidel pero que consiste en *no* utilizar valores mejorados sino hasta que se ha completado un paso y luego sustituido $\mathbf{x}^{(m)}$ por $\mathbf{x}^{(m+1)}$ de una vez, directamente antes de empezar el siguiente ciclo. Por tanto, si $\mathbf{Ax} =$ $\mathbf{b}$ se escribe en la forma $\mathbf{x} = \mathbf{b} + (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}$, entonces la iteración de Jacobi en notación matricial es

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{b} + (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}^{(m)}. \tag{12}$$

Este método reviste bastante un interés teórico. Converge para toda elección de $\mathbf{x}^{(0)}$ si y sólo si el radio espectral de $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ es menor que 1; aquí de nuevo se supone $a_{jj} = 1$ para $j = 1, \cdots, n$.

Iteración para calcular la inversa

La **inversa** de una matriz cuadrada no singular $\mathbf{A}$ también puede determinarse aplicando un método iterativo sugerido por la siguiente idea. El recíproco x de un número dado a satisface $xa = 1$, y si desea determinarse x sin efectuar una división, entonces es posible aplicar el método de Newton (sección 18.2) a la función $f(x) = x^{-1} - a$. Como se tiene $f'(x) = -1/x^2$, entonces la iteración de Newton es

$$x_{m+1} = x_m - (x_m^{-1} - a)(-x_m^2) = x_m(2 - ax_m).$$

Lo anterior sugiere una fórmula de iteración análoga para determinar la inversa $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$ de $\mathbf{A}$, a saber,

$$\mathbf{X}^{(m+1)} = \mathbf{X}^{(m)}(2\mathbf{I} - \mathbf{AX}^{(m)}). \tag{13}$$

Este proceso converge (se obtiene $\mathbf{A}^{-1}$ cuando $m \to \infty$) si y sólo si se elige un $\mathbf{X}^{(0)}$ de modo que todo eigenvalor de $\mathbf{I} - \mathbf{AX}^{(0)}$ sea de valor absoluto menor que 1 (consultar la obra citada en el apéndice 1 como referencia [E24], pág. 225). El método es de interés práctico si las multiplicaciones que es necesario efectuar son sencillas, por ejemplo, si $\mathbf{A}$ tiene muchos ceros. Sin embargo, en general es difícil efectuar una elección idónea de $\mathbf{X}^{(0)}$, y el método es más utilizado para mejorar una inversa inexacta obtenida por otro método.

Problemas de la sección 19.3

Aplicar la iteración de Gauss-Seidel a los siguientes sistemas. Ejecutar cinco pasos, empezando desde 1, 1, 1 (y desde 1, 1, 1, 1 en los problemas 7 y 8), usando 6 dígitos significativos en los cálculos. *Sugerencia.* Asegurarse de que al principio se resuelve cada ecuación para la variable que tiene el mayor coeficiente. (¿Por qué?)

1. $\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 14 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 &= 10 \\ x_1 + x_2 + 8x_3 &= 20 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 10x_1 - x_2 - x_3 &= 13 \\ x_1 + 10x_2 + x_3 &= 36 \\ -x_1 - x_2 + 10x_3 &= 35 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 6x_1 + x_2 + x_3 &= 107 \\ x_1 + 9x_2 - 2x_3 &= 36 \\ 2x_1 - x_2 + 8x_3 &= 121 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 2x_1 + 10x_2 - x_3 &= -32 \\ -x_1 + 2x_2 + 15x_3 &= 17 \\ 10x_1 - x_2 + 2x_3 &= 58 \end{aligned}$

Iteración de Gauss-Seidel (*continuación*)

5. $$\begin{aligned} 10x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + 10x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 &= 6 \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} 6x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ -x_1 + x_2 + 7x_3 &= -17 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 18 \\ -2x_1 + 12x_2 - x_3 &= -7 \\ 2x_1 + 16x_3 + 2x_4 &= 54 \\ x_2 + 2x_3 - 20x_4 &= -14 \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} 7x_1 + x_3 - x_4 &= 1.2 \\ -x_1 + x_2 + 8x_3 &= -8.3 \\ 10x_2 - x_3 + x_4 &= 2.6 \\ 10x_1 + x_2 + 30x_4 &= 22.1 \end{aligned}$$

9. Aplicar la iteración de Gauss-Seidel (3 pasos) al sistema del problema 5, empezando desde (a) 0, 0, 0, (b) 10, 10, 10. Comparar los resultados y hacer un comentario.
10. Aplicar las iteraciones de Gauss-Seidel y de Jacobi (3 pasos cada una) al sistema del problema 5, empezando desde 1, 1, 1. Comparar los resultados y hacer un comentario.
11. Empezando desde 0, 0, 0, demostrar que para el sistema del ejemplo 2 la iteración de Jacobi diverge.
12. En el problema 5, calcular **C** (a) si la primera ecuación se resuelve para x_1, la segunda se resuelve para x_2 y la tercera se resuelve para x_3, demostrando convergencia; (b) si no siguiendo ninguna lógica la tercera ecuación se resuelve para x_1, la primera se resuelve para x_2 y la segunda se resuelve para x_3, demostrando divergencia.
13. Considerar una aproximación $\mathbf{X}^{(0)}$ a la inversa de una matriz **A**, en donde

$$\mathbf{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.1 & 0.4 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ -0.4 & 0.3 & -1.5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calcular $\mathbf{X}^{(1)}$ aplicando (13). Determinar $\mathbf{A}^{-1}$ y demostrar que cada elemento de $\mathbf{X}^{(0)}$ se desvía del elemento correspondiente de $\mathbf{A}^{-1}$ cuando mucho por 0.1, mientras que para $\mathbf{X}^{(1)}$ esta desviación máxima es 0.03.

14. Aplicar (13) con

$$\mathbf{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} 2.9 & -0.9 \\ -4.9 & 1.9 \end{bmatrix} \quad \text{a la matriz} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix},$$

comprobar que se satisface la condición para convergencia, ejecutar dos pasos y comparar los resultados con la inversa exacta.

Calcular cada una de las normas (9), (10) y (11) de las siguientes matrices.

15. $\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 \\ -0.6 & 0.8 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 4 & -8 & 12 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 8 & -8 & 0 \\ 22 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 0.3 & -1.2 & 2.8 \\ -0.3 & 1.2 & -2.8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

19.4 SISTEMAS LINEALES: MAL ACONDICIONAMIENTO, NORMAS

No se requiere mucha experiencia para observar que algunos sistemas $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ son "buenos", para los que se obtienen soluciones exactas inclusive bajo redondeo o cuando hay inexactitudes en los coeficientes, mientras que otros son "malos", de modo que estos factores afectan bastante a la solución. Se desea ver qué sucede y cómo es posible determinar si es posible o no "confiar" en un sistema.

El sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ se denomina **bien acondicionado** si pequeños errores en los coeficientes o en el proceso de resolución afectan sólo ligeramente a la solución, y se denomina **mal acondicionado** si el efecto sobre la solución es grande. Estos conceptos son fundamentales.

Para dos ecuaciones en dos incógnitas, en la figura 416 se explican tales conceptos. La situación de mal acondicionamiento ocurre si y sólo si las gráficas de las ecuaciones son dos rectas casi paralelas, de modo que su punto de intersección (la solución del sistema) se mueve demasiado, por ejemplo, si una de las rectas se eleva apenas ligeramente.

Ejemplo 1. Un sistema mal condicionado.

El lector puede comprobar que el sistema

$$\begin{aligned} 0.9999x - 1.0001y &= 1 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

tiene la solución $x = 0.5$, $y = -0.5$, mientras que el sistema

$$\begin{aligned} 0.9999x - 1.0001y &= 1 \\ x - y &= 1 + \epsilon \end{aligned}$$

tiene la solución $x = 0.5 + 5000.5\epsilon$, $y = -0.5 + 4999.5\epsilon$. Lo anterior muestra que el sistema está mal de acondicionado porque un cambio de magnitud sobre la derecha produce un cambio de magnitud 5000ϵ, aproximadamente, en la solución. Se observa que las rectas definidas por las ecuaciones tienen casi la misma pendiente. ∎

Para sistemas más grandes, la situación es semejante en principio, aunque la geometría deja de ser útil. El mal acondicionamiento puede considerarse como un enfoque hacia la singularidad. Es posible encontrar pérdida de dígitos significativos, lo que dificulta la obtención de soluciones o inversas exactas. La precisión doble o triple puede ser de utilidad en caso de que los coeficientes se obtengan a partir de fórmulas, pero si son resultado de mediciones, con exactitud limitada, entonces no hay ninguna ayuda posible, por lo que es necesario tratar de ***replantear el problema*** en términos de un sistema bien acondicionado.

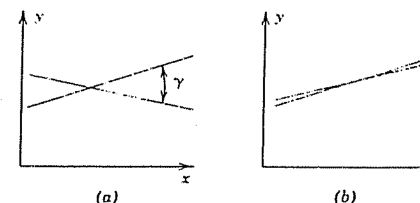


Figura 416. Sistema lineal de dos ecuaciones en dos incógnitas (a) bien acondicionado y (b) mal acondicionado.

El que un sistema esté **bien acondicionado** puede evaluarse si los elementos en la diagonal principal de **A** son grandes en valor absoluto comparados con los elementos fuera de la diagonal. De manera semejante si $\mathbf{A}^{-1}$ y **A** tienen elementos máximos de aproximadamente el mismo valor absoluto.

Síntomas de que un sistema está mal acondicionado son que $|\det \mathbf{A}|$ sea pequeño en comparación con el máximo de los $|a_{jk}|$, que $\mathbf{A}^{-1}$ tenga grandes elementos en valor absoluto comparados con los valores absolutos de las componentes de la solución, y que soluciones aproximadas deficientes puedan todavía producir residuos pequeños.

Residuo. El *residuo* **r** de una solución aproximada $\tilde{\mathbf{x}}$ de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ se define como

(1) $$\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}.$$

Luego, $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$, de modo que

(2) $$\mathbf{r} = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}).$$

Por tanto, **r** es pequeño si $\tilde{\mathbf{x}}$ es bastante exacto, aunque la conversa puede ser falsa.

Ejemplo 2. Solución aproximada deficiente con un residuo pequeño.

El sistema

$$\begin{aligned} 1.0001x_1 + \quad x_2 &= 2.0001 \\ x_1 + 1.0001x_2 &= 2.0001 \end{aligned}$$

tiene la solución exacta $x_1 = 1$, $x_2 = 1$. ¿Puede el lector ver esto por inspección? La muy deficiente aproximación $\tilde{x}_1 = 2.0000$, $\tilde{x}_2 = 0.0001$ tiene el muy pequeño residuo (hasta 4 decimales)

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 2.0001 \\ 2.0001 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.0001 & 1.0000 \\ 1.0000 & 1.0001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.0000 \\ 0.0001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0001 \\ 2.0001 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.0003 \\ 2.0001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0002 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

A partir de lo anterior, alguien ingenuo podría extraer la falsa conclusión de que la aproximación debe ser exacta hasta 3 o 4 decimales. ▮

Normas vectoriales

El resultado probablemente inesperado del ejemplo 2 está relacionado con la situación de mal acondicionamiento y requiere investigación adicional. Se han propuesto varias medidas para la situación de mal acondicionamiento. A continuación se explicará la medida de mayor uso, el *número de condición* de una matriz, que reviste importancia fundamental general en las matemáticas numéricas (que rebasan los objetivos de este libro). Para llevar a cabo lo anterior se requiere algo de preparación; se procederá en tres pasos, en los que se analizará lo siguiente:

1. **Normas vectoriales,**
2. **Normas matriciales,** y
3. **El número de condición** κ de una matriz cuadrada.

Norma vectorial. Una *norma vectorial* para todos los vectores columna $\mathbf{x} = [x_j]$ con n componentes (n fijo) es una longitud generalizada que se denota por $\|\mathbf{x}\|$ y se define mediante cuatro propiedades de la longitud usual de los vectores en el espacio tridimensional, a saber,

(3)
(a) $\|\mathbf{x}\|$ es un número no negativo.
(b) $\|\mathbf{x}\| = 0$ si y sólo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
(c) $\|k\mathbf{x}\| = |k|\,\|\mathbf{x}\|$ para todo k.
(d) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (Desigualdad del triángulo).

En caso de que se usen varias normas, deben identificarse por medio de subíndices. La más importante en relación con los cálculos es la *norma p*, definida como

(4) $$\|\mathbf{x}\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}$$

en donde p es un número fijo tal que $p \geqq 1$. En la práctica, suele tomarse $p = 1$ o 2 y, como una tercera norma, $\|\mathbf{x}\|_\infty$ (como se define a continuación), es decir,

(5) $$\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n| \qquad \text{("Norma } l_1\text{")}$$

(6) $$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \qquad \text{("Norma euclidiana" o "Norma } l_2\text{")}$$

(7) $$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_j |x_j| \qquad \text{("Norma } l_\infty\text{").}$$

Para $n = 3$, la norma l_2 es la longitud usual de un vector en el espacio tridimensional. Las normas l_1 y $l\infty$ suelen ser más convenientes en computación.

Ejemplo 3. Normas vectoriales.

Si $\mathbf{x}^T = [2\ -3\ 0\ 1\ -4]$, entonces

$$\|\mathbf{x}\|_1 = 10, \qquad \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{30}, \qquad \|\mathbf{x}\|_\infty = 4.$$ ▮

En el espacio tridimensional, la distancia entre dos puntos con vectores de posición $\mathbf{x}$ y $\tilde{\mathbf{x}}$ es $|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}|$. Lo anterior sugiere, para un sistema lineal $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, que $\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|$ se tome como una medida de la exactitud y se denomine **distancia** entre una solución exacta y una solución aproximada, o **error** de $\tilde{\mathbf{x}}$.

Normas matriciales

Si **A** es una matriz de $n \times n$ y **x** es cualquier vector con n componentes, entonces **Ax** es un vector con n componentes. Ahora se toma una norma vectorial y se consideran $\|\mathbf{x}\|$ y $\|\mathbf{Ax}\|$. Es posible demostrar (consultar la obra citada en el apéndice 1 como referencia [9], pág. 95) que existe un número c (que depende de **A**) tal que

(8) $$\|\mathbf{Ax}\| \leqq c\|\mathbf{x}\| \qquad \text{para todo } \mathbf{x}.$$

Sea $\mathbf{x} \neq 0$. Entonces $\|\mathbf{x}\| > 0$ por (3b) y al dividir se obtiene

$$\frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqq c.$$

El c más pequeño posible válido para *todo* $\mathbf{x}$ ($\neq \mathbf{0}$) se obtiene tomando el máximo sobre la izquierda, se denomina **norma matricial de A** *resultante de la norma vectorial elegida* y se denota por $\|\mathbf{A}\|$. Así,

$$\text{(9)} \qquad \boxed{\|\mathbf{A}\| = \max \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|}} \qquad (\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$$

en donde el máximo se toma sobre todos los $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. De manera alternativa (problema 24),

$$\text{(10)} \qquad \|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{Ax}\|.$$

Observar bien que $\|\mathbf{A}\|$ depende de la norma vectorial elegida.[2] En particular, es posible demostrar que se obtiene

para la norma l_1 (5), la norma "suma" columna (10), sección 19.3, y
para la norma ℓ_∞ (7), la norma "suma" renglón (11), sección 19.3.

Al tomar el mejor c posible (el menor), $c = \|\mathbf{A}\|$, por (8) se tiene

$$\text{(11)} \qquad \boxed{\|\mathbf{Ax}\| \leqq \|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{x}\|.}$$

Ésta es la fórmula necesaria. Para dos matrices de $n \times n$, la fórmula (9) también implica (consultar la referencia [9], pág. 98)

$$\text{(12)} \qquad \|\mathbf{AB}\| \leqq \|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{B}\|, \qquad \text{por tanto,} \qquad \|\mathbf{A}^n\| \leqq \|\mathbf{A}\|^n.$$

Consultar las referencias [9] y [E10] para otras fórmulas útiles sobre normas.

Antes de continuar se realizará un simple cálculo ilustrativo.

Ejemplo 4. Normas matriciales.

Calcular las normas matriciales de la matriz de coeficientes A en el ejemplo 1 y de su inversa $\mathbf{A}^{-1}$ suponiendo que se usa (a) la norma vectorial l_1, (b) la norma vectorial ℓ_∞.

Solución. Se aplican (4), sección 7.7, y luego (10) y (11) de la sección 19.3. Por tanto,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.9999 & -1.0001 \\ 1.0000 & -1.0000 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -5000.0 & 5000.5 \\ -5000.0 & 4999.5 \end{bmatrix}.$$

[2] El máximo en (10) y por tanto en (9) existe por el teorema 2.5-3 en la obra citada como referencia [9], pág. 77, ya que la norma es continua (ver la referencia [9], pág. 60). La denominación "*norma matricial*" está justificada porque $\|\mathbf{A}\|$ satisface (3) con x y y reemplazados por A y B (ver la referencia [9], págs. 92-93).

Así, (a) $\|\mathbf{A}\| = 2.0001$, $\|\mathbf{A}^{-1}\| = 10000$; (b) $\|\mathbf{A}\| = 2$, $\|\mathbf{A}^{-1}\| = 10000.5$. Se observa que $\|\mathbf{A}^{-1}\|$ es sorprendentemente grande, lo que hace grande a $\|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{A}^{-1}\|$ (20001). A continuación se verá que (y por qué) esto es típico de un sistema mal acondicionado.

Número de condición de una matriz

Ahora ya es posible introducir el concepto clave en el análisis sobre sistemas mal acondicionados: el **número de condición** $\kappa(\mathbf{A})$ de una matriz cuadrada (no singular) A, definido como

$$\text{(13)} \qquad \boxed{\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{A}^{-1}\|.}$$

El papel del número de condición se verá con base en el siguiente teorema.

Teorema 1 (Número de condición)

Un sistema lineal de ecuaciones $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *está bien acondicionado si su número de condición* (13) *es pequeño. Un número de condición grande indica que el sistema está mal acondicionado.*

Demostración. $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$ y con (11) se obtiene $\|\mathbf{b}\| \leqq \|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{x}\|$. Sean $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Entonces al dividir entre $\|\mathbf{b}\| \, \|\mathbf{x}\|$ se obtiene

$$\text{(14)} \qquad \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \leqq \frac{\|\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

Al multiplicar (2) por $\mathbf{A}^{-1}$ por la izquierda e intercambiar miembros se obtiene $\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}$. Luego, al escribir (11) con $\mathbf{A}^{-1}$ y $\mathbf{r}$ en vez de A y x se obtiene

$$\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}\| \leqq \|\mathbf{A}^{-1}\| \, \|\mathbf{r}\|.$$

Al dividir entre $\|\mathbf{x}\|$ y aplicar (14) finalmente se obtiene

$$\text{(15)} \qquad \frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqq \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \|\mathbf{A}^{-1}\| \, \|\mathbf{r}\| \leqq \frac{\|\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{b}\|} \|\mathbf{A}^{-1}\| \, \|\mathbf{r}\| = \kappa(\mathbf{A}) \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

Por tanto, si $\kappa(\mathbf{A})$ es pequeño, entonces un $\|\mathbf{r}\|/\|\mathbf{b}\|$ pequeño implica un pequeño error relativo $\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|/\|\mathbf{x}\|$, de modo que el sistema está bien acondicionado. Sin embargo, lo anterior no se cumple si $\kappa(\mathbf{A})$ es grande. ∎

Ejemplo 5. Número de condición para un sistema mal acondicionado.

A partir del ejemplo 4 se observa que el número de condición del sistema del ejemplo 1 es muy grande, $\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{A}^{-1}\| = 20001$. Esto confirma que este sistema está bastante mal acondicionado. ∎

Ejemplo 6. Número de condición para un sistema mal acondicionado.

Por (4) en la sección 7.7, la inversa de la matriz A en el ejemplo 2 es

$$A^{-1} = \frac{1}{0.0002}\begin{bmatrix} 1.0001 & -1.0000 \\ -1.0000 & 1.0001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5000.5 & -5000.0 \\ -5000.0 & 5.000.5 \end{bmatrix}.$$

Por (10), sección 19.3, entonces se obtiene el valor muy grande

$$\kappa(A) = (1.0001 + 1.0000)(5000.5 + 5000.0) \approx 20\ 002;$$

de manera semejante a partir de (9) o de (11) en la sección 19.3. Lo anterior muestra que el sistema en el ejemplo 2 está bastante mal acondicionado y explica el sorprendente resultado del ejemplo 2. ∎

En la práctica no se conoce A^{-1}, de modo que al calcular el número de condición $\kappa(A)$, es necesario estimar $\|A^{-1}\|$. En la obra citada en el apéndice 1 como referencia E10 se explica un método, propuesto en 1979, para efectuar lo anterior.

Elementos inexactos de una matriz. $\kappa(A)$ también puede usarse para calcular el efecto $\delta\mathbf{x}$ de una inexactitud δA de A (errores de medición de los a_{jk}, por ejemplo), de modo que en vez de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se tiene

$$(A + \delta A)(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b}.$$

Al multiplicar y restar $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en ambos miembros, se tiene

$$A\delta\mathbf{x} + \delta A(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Al multiplicar por A^{-1} por la izquierda se obtiene

$$\delta\mathbf{x} = -A^{-1}\delta A(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}).$$

Al aplicar (11) con A^{-1} y el vector $\delta A(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x})$ en vez de A y **x**, se obtiene

$$\|\delta\mathbf{x}\| = \|A^{-1}\delta A(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x})\| \leqq \|A^{-1}\|\,\|\delta A(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x})\|.$$

Nuevamente aplicando (11) con δA y $\mathbf{x} - \delta\mathbf{x}$ en vez de A y **x**, se obtiene

$$\|\delta\mathbf{x}\| \leqq \|A^{-1}\|\,\|\delta A\|\,\|\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}\|.$$

Luego, $\|A^{-1}\| = \kappa(A)/\|A\|$. de modo que al dividir entre $\|\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}\|$ se demuestra que la inexactitud relativa de **x** está relacionada con la de A a través del número de condición por medio de la desigualdad

$$(16) \qquad \frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \approx \frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}\|} \leqq \|A^{-1}\|\,\|\delta A\| = \kappa(A)\,\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}.$$

Conclusión. Si el sistema está bien acondicionado, entonces pequeñas inexactitudes $\|\delta A\|/\|A\|$ pueden tener sólo un pequeño efecto sobre la solución. Sin embargo, en caso de que el sistema esté mal acondicionado, si $\|\delta A\|/\|A\|$ es pequeño, $\|\delta\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ *puede* ser grande.

Miembro derecho inexacto. El estudiante puede demostrar que, de manera semejante, cuando A es exacta, una inexactitud $\delta\mathbf{b}$ de **b** provoca una inexactitud $\delta\mathbf{x}$ que satisface

$$(17) \qquad \frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leqq \kappa(A)\,\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

Así, $\|\delta\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|$ debe permanecer relativamente pequeño siempre que $\kappa(A)$ sea pequeño.

Comentarios adicionales sobre los números de condición. Las siguientes explicaciones adicionales pueden ser de utilidad.

1. No existe una línea divisoria clara entre un sistema "bien acondicionado" y uno "mal acondicionado", aunque en general la situación empeora a medida que se pasa de sistemas con $\kappa(A)$ pequeño a sistemas con $\kappa(A)$ más grande. Así, $\kappa(A) \geqq 1$ siempre, de modo que valores de 10, 20 o semejantes no constituyen motivo de preocupación, en tanto que $\kappa(A) = 100$, por ejemplo, requiere precaución, y sistemas como los de los ejemplos 1 y 2 están extremadamente mal acondicionados.

2. Si $\kappa(A)$ es grande (o pequeño) en una norma, entonces es grande (o pequeño, respectivamente) en cualquier otra norma.

3. Lo publicado sobre sistemas mal acondicionados es bastante amplio. Para una introducción al tema, consultar la referencia [E10], de W. Kahan [*Canad. Math. Bull.* 9 (1966), 757-801] y el artículo de J. Rice [*SIAM Journal Num. Analysis* 3 (1966), 287-310].

Aquí termina el análisis de los métodos numéricos para resolver sistemas lineales. En la siguiente sección se presentará una aplicación importante.

Problemas de la sección 19.4

Calcular cada una de las normas vectoriales (5), (6) y (7) de los siguientes vectores.

1. $[-1 \quad -3 \quad 4]$ **2.** $[0.3 \quad 1.2 \quad 0]$ **3.** $[4 \quad -3 \quad -1 \quad 5 \quad -5]$
4. $[0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$ **5.** $[3 \quad -4]$ **6.** $[3 \quad 4 \quad -7 \quad 0]$
7. $[1 \quad -1 \quad 1 \quad -1]$ **8.** $[5 \quad 4 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \quad 1]$

Para las siguientes matrices, calcular la norma matricial y el número de condición correspondiente a la norma vectorial ℓ_∞.

9. $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ **13.** $\begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} 3.0 & 1.5 & 1.0 \\ 1.5 & 1.0 & 0.75 \\ 1.0 & 0.75 & 0.60 \end{bmatrix}$

15. Comprobar (11) para $\mathbf{x}^T = [3 \quad 15 \quad -4]$ tomada con la norma ℓ_∞ y la matriz del problema 12.

16. Resolver cada uno de los dos sistemas siguientes, comparar las soluciones y hacer un comentario.

$$2x_1 + 1.4x_2 = 1.4 \qquad\qquad 2x_1 + 1.4x_2 = 1.44$$
$$1.4x_1 + \quad x_2 = 1 \qquad\qquad 1.4x_1 + \quad x_2 = 1$$

17. Calcular el número de condición en el problema 16 con respecto a la norma vectorial l_1 y hacer un comentario.
18. Resolver cada uno de los dos sistemas siguientes, comparar las soluciones y hacer un comentario.

$$5x_1 - 7x_2 = -2 \qquad 5x_1 - 7x_2 = -2$$
$$-7x_1 + 10x_2 = 3 \qquad -7x_1 + 10x_2 = 3.1$$

19. Calcular los números de condición en el problema 18 con respecto a las normas vectoriales l_1 y ℓ_∞.
20. Demostrar que la solución del sistema

$$6x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 21$$
$$7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 24$$
$$8x_1 + 9x_2 + 9x_3 = 26$$

es $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$. Calcular el determinante del sistema y el residuo correspondiente a $x_1 = -0.8, x_2 = 2.9, x_3 = 0.7$. Hacer un comentario.

21. **(Matriz de Hilbert)** Use eliminación de Gauss para resolver el sistema

$$x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 = 1$$
$$\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + \tfrac{1}{4}x_3 = 0$$
$$\tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + \tfrac{1}{5}x_3 = 0.$$

Calcular el número de condición (en la norma de la suma columna) para demostrar que el sistema está mal acondicionado. (La matriz de coeficientes se denomina *matriz de Hilbert* de 3×3.)

22. Por definición, la matriz de Hilbert $\mathbf{H}_n = [h_{jk}]$ de $n \times n$ consta de los elementos $h_{jk} = 1/(j + k - 1)$. Los elementos de la inversa $\mathbf{H}_n^{-1}$ crecen rápidamente en valor absoluto cuando n crece. Ilustrar este hecho calculando $\mathbf{H}_2^{-1}, \mathbf{H}_3^{-1}, \mathbf{H}_4^{-1}$. ($\mathbf{H}_n$ no es una curiosidad académica, ya que matrices comparables aparecen en relación con el ajuste de curvas por mínimos cuadrados.)
23. Demostrar que $\kappa(\mathbf{A}) \geqq 1$ para las normas matriciales (10) y (11) de la sección 19.3, y que $\kappa(\mathbf{A}) \geqq \sqrt{n}$ para la norma de Frobenius (9) de la sección 19.3.
24. Obtener (10) a partir de (9).
25. Demostrar que $\|\mathbf{x}_\infty\| \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq n\,\|\mathbf{x}\|$.

19.5 MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

En el **ajuste de curvas** se tienen n puntos (pares de números)

$$(x_1, y_1) \quad \cdots, (x_n, y_n)$$

y se quiere determinar una función $f(x)$ tal que $f(x_j) \approx y_j$, $j = 1, \cdots, n$. El tipo de función (por ejemplo, polinomios, funciones exponenciales, funciones senoidales y

cosenoidales) puede ser sugerido por la naturaleza del problema (la ley física subyacente, por ejemplo), y en muchos casos un polinomio de cierto grado es idóneo.

Si se requiere igualdad estricta $f(x_1) = y_1, \cdots, f(x_n) = y_n$ y se usan polinomios de grado suficientemente alto, entonces es posible aplicar uno de los métodos analizados en la sección 18.3 junto con interpolación. Sin embargo, en ciertas situaciones lo anterior no sería la solución apropiada para el problema en cuestión. Por ejemplo, a los cuatro puntos

$$(1) \quad (-1.0,\ 1.000), \qquad (-0.1,\ 1.099), \qquad (0.2,\ 0.808), \qquad (1.0,\ 1.000)$$

les corresponde el polinomio de Lagrange $f(x) = x^3 - x + 1$ (figura 417), pero si estos puntos se grafican, se observa que están próximos a una recta. Por tanto, si estos valores se obtienen en un experimento, por lo que implican un error experimental, y si la naturaleza del experimento sugiere una relación lineal, entonces mejor se ajusta una recta que pase por los puntos (figura 417). Tal recta puede ser de

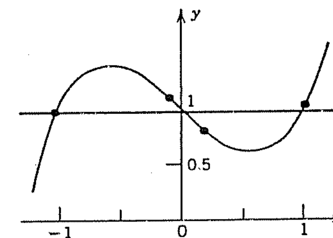


Figura 417. Ajuste aproximado de una recta.

utilidad para predecir valores esperados para otros valores de x. En casos simples una recta puede ajustarse a simple vista, pero si los puntos están dispersos, ésto se vuelve poco confiable y mejor se aplica un principio matemático. Un procedimiento ampliamente usado de este tipo es el **método de mínimos cuadrados** de Gauss, que en la presente situación puede plantearse como sigue.

Método de mínimos cuadrados. *La recta*

$$y = a + bx$$

debe ajustarse a través de los puntos dados $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ *de modo que la suma de los cuadrados de las distancias de tales puntos a la recta sea mínima, en donde la distancia se mide en la dirección vertical* (*la dirección* y).

El punto sobre la recta cuya abscisa es x_j tiene por ordenada a $a + bx_j$. Por tanto, su distancia a (x_j, y_j) es $|y_j - a - bx_j|$ (figura 418), y la suma de los cuadrados es

$$q = \sum_{j=1}^{n} (y_j - a - bx_j)^2.$$

q depende de a y b. Una condición necesaria para que q sea mínima es

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial a} &= -2 \sum (y_j - a - bx_j) = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial b} &= -2 \sum x_j(y_j - a - bx_j) = 0 \end{aligned}$$

(en donde se suma sobre j desde 1 hasta n). Al escribir cada suma como tres sumas y colocando una de ellas a la derecha se obtiene el resultado

$$(3) \qquad \boxed{\begin{aligned} an \qquad &+ b \sum x_j = \sum y_j \\ a \sum x_j &+ b \sum x_j^2 = \sum x_j y_j. \end{aligned}}$$

Estas ecuaciones se denominan **ecuaciones normales** del problema en cuestión.

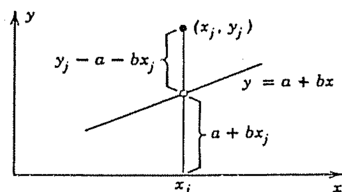


Figura 418. Distancia vertical de un punto (x_j, y_j) a una recta $y = a + bx$.

Ejemplo 1. Recta.

Aplicar el método de mínimos cuadrados para ajustar una recta a los cuatro puntos dados en la fórmula (1).

Solución. Se obtiene

$$n = 4, \qquad \sum x_j = 0.1, \qquad \sum x_j^2 = 2.05, \qquad \sum y_j = 3.907, \qquad \sum x_j y_j = 0.0517.$$

Por tanto, las ecuaciones normales son

$$\begin{aligned} 4a + 0.10b &= 3.9070 \\ 0.1a + 2.05b &= 0.0517. \end{aligned}$$

La solución es $a = 0.9773$, $b = -0.0224$ y se obtiene la recta (figura 417)

$$y = 0.9773 - 0.0224x. \qquad ■$$

El método de ajuste de curvas puede generalizarse de un polinomio $y = a + bx$ a un polinomio de grado m

$$p(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$$

en donde $m \leqq n - 1$. Así, q asume la forma

$$q = \sum_{j=1}^{n} (y_j - p(x_j))^2$$

y depende de $m + 1$ parámetros $b_0, \cdots, b_m$. En vez de (2), entonces se tienen $m + 1$ condiciones

$$\frac{\partial q}{\partial b_0} = 0, \qquad \cdots, \qquad \frac{\partial q}{\partial b_m} = 0$$

con las que se obtiene un sistema de $m + 1$ ecuaciones normales.

En el caso de un polinomio cuadrático

$$(4) \qquad p(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$$

las ecuaciones normales son (la sumatoria va desde 1 hasta n)

$$(5) \qquad \begin{aligned} b_0 n \qquad &+ b_1 \sum x_j + b_2 \sum x_j^2 = \sum y_j \\ b_0 \sum x_j &+ b_1 \sum x_j^2 + b_2 \sum x_j^3 = \sum x_j y_j \\ b_0 \sum x_j^2 &+ b_1 \sum x_j^3 + b_2 \sum x_j^4 = \sum x_j^2 y_j. \end{aligned}$$

La obtención de (5) se deja al lector.

Observar que este sistema es simétrico. A fin de resolverlo para las incógnitas b_0, b_1, b_2 es posible aplicar uno de los métodos analizados en las secciones 19-1 a 19-3.

En los problemas de la sección se incluyen varias aplicaciones.

Problemas de la sección 19.5

Aplicar el método de mínimos cuadrados para ajustar una recta a los puntos dados (x, y). Comprobar el resultado graficando los puntos y trazando la recta.

1. (2, 0), (3, 4), (4, 10), (5, 16)
2. (0, 0), (2, 1.8), (4, 3.4), (6, 4.6)
3. (5, 8.0), (10, 6.9), (15, 6.2), (20, 5.0)
4. (4, −20), (15, −7), (30, −10), (100, 47), (200, 67)
5. (9.6, 1), (8.5, 2.3), (7.0, 2.0), (0, 7.7), (−100, 9.7)
6. Revoluciones por minuto x / Potencia de un motor a diesel y [hp]

Revoluciones por minuto x	400	500	600	700	750
Potencia de un motor a diesel y [hp]	580	1030	1420	1880	2100

7. Densidad del mineral / Contenido de hierro

Densidad del mineral x [g/cm³]	2.8	2.9	3.0	3.1	3.2	3.2	3.2	3.3	3.4
Contenido de hierro y [%]	30	26	33	31	33	35	37	36	33

8. Si un automóvil viaja sobre un camino recto a velocidad constante $v = b_1$ [m/s], su posición y [m] en el instante t [s] es $y = b_0 + b_1 t$. Suponer que las mediciones son

t	0	3	5	8	10
y	200	230	240	270	290

Por mínimos cuadrados, ajustar una recta a estos datos y a partir de la recta calcular la velocidad.

9. Ajustar por mínimos cuadrados una recta a los datos $(I, U) = (0.8, 20), (1.7, 40), (2.3, 60)$; I (amperes) es la corriente, U (volts) es el voltaje, y a partir de la recta calcular la resistencia $R = U/I$ (ohms). Esta es la ley de Ohm.
10. Ajustar por mínimos cuadrados una recta a los datos $(s, F) = (0.9, 10), (0.5, 5), (1.6, 15), (2.1, 20)$, en donde s es la elongación de un resorte elástico sometido a una fuerza F, y a partir de la recta calcular el módulo del resorte $k = F/s$. ($F = ks$ se denomina *ley de Hooke*).

Aplicar el método de mínimos cuadrados para ajustar una parábola (4) a los siguientes datos:

11. $(-1, 2), (0, 0), (0, 1), (1, 2)$
12. $(0, 3), (1, 1), (2, 0), (4, 1), (6, 4)$
13. $(-1, 0), (0, -2), (0, -1), (1, 0)$
14. $(1.09, 1.35), (1.28, 1.58), (1.36, 1.68), (1.44, 1.85), (1.60, 2.23), (1.65, 2.38)$
15.

Velocidad de un tractor x [km/h]	1.4	1.8	2.3	3.0	4.0
Potencia de un tractor y [kg]	7400	7500	7600	7500	7200

16.

Tiempo de servicio de un trabajador x [h]	1	2	3	4	5	6
Tiempo de reacción del trabajador y [s]	1.50	1.48	1.75	1.65	1.72	1.55

17. Resolver el problema 13 aplicando el método de Cholesky (sección 19.2).
18. Determinar las ecuaciones normales en el caso de un polinomio de tercer grado.
19. En el principio de mínimos cuadrados que implica un polinomio se busca satisfacer

$$b_0 + b_1 x_j + b_2 x_j^2 + \cdots + b_m x_j^m = y_j \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

de la mejor forma posible. Introducir una matriz $\mathbf{C}$ de modo que la expresión anterior pueda escribirse como $\mathbf{Cb} = \mathbf{y}$ y demostrar que entonces las ecuaciones normales pueden escribirse como $\mathbf{C}^T\mathbf{Cb} = \mathbf{C}^T\mathbf{y}$.

20. En problemas de crecimiento a menudo se requiere ajustar una función exponencial $y = b_0 e^{kx}$ aplicando el método de mínimos cuadrados. Demostrar que al tomar logaritmos esta tarea puede reducirse a la de determinar una recta.

19.6 PROBLEMAS DE EIGENVALORES DE MATRICES: INTRODUCCIÓN

En las secciones restantes de este capítulo se analizarán algunas de las ideas y métodos numéricos más importantes concernientes a problemas de eigenvalores de matrices. Esta bastante amplia parte del álgebra lineal numérica reviste gran importancia práctica, a propósito de lo cual se está realizando bastante investigación, especialmente a partir de 1945, con cientos y quizá miles de artículos publicados en diversas revistas especializadas en matemáticas (ver las obras citadas como referencias [E9], [E10], [E12], [E19], [E22], [E26], [E27]. Se empezará con los conceptos y resultados generales que serán necesarios para explicar y aplicar métodos numéricos a problemas con eigenvalores. (Para aplicaciones típicas, consultar las secciones 7-11 a 7-15.)

Un **eigenvalor, valor característico** o *raíz latente* de una matriz dada $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ de $n \times n$ es un número real o complejo λ tal que la ecuación vectorial

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \tag{1}$$

tiene una solución no trivial; es decir, una solución $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, que entonces se denomina **eigenvector** o **vector característico** de $\mathbf{A}$ correspondiente a tal eigenvalor λ. El conjunto de todos los eigenvalores de $\mathbf{A}$ se denomina **espectro de A**. La ecuación (1) puede escribirse como

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{2}$$

en donde $\mathbf{I}$ es la matriz unitaria de $n \times n$. Este sistema homogéneo tiene una solución no trivial si y sólo si el **determinante característico** $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ es 0 (ver el teorema 2 en la sección 7.6). Con lo anterior se obtiene (ver la sección 7.10) el

Teorema 1 (Eigenvalores)

Los eigenvalores de $\mathbf{A}$ *son las soluciones de la* **ecuación característica**

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Al desarrollar el determinante característico se obtiene el **polinomio característico** de **A**, que es de grado n en λ. Por tanto, **A** tiene por lo menos uno y cuando mucho n eigenvalores numéricamente diferentes. Si **A** es real, entonces también lo son los coeficientes del polinomio característico. Por álgebra lineal ya conocida se concluye entonces que las raíces (los eigenvalores de **A**) son reales o conjugados complejos por pares.

Por lo general, los eigenvalores de **A** se denotan por

$$\boxed{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n}$$

en el entendido de que algunos (o todos) pueden ser numéricamente iguales.

La suma de estos n eigenvalores es igual a la suma de los elementos de la diagonal principal de **A**, que se denomina **traza de A**; así, se tiene

$$\text{traza } \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{jj} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k. \tag{4}$$

También,

$$\det \mathbf{A} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n. \tag{5}$$

Ambas fórmulas se concluyen de la representación de producto del polinomio característico $f(\lambda)$,

$$f(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n).$$

Si se reúnen los factores iguales y los eigenvalores *numéricamente distintos* de A se denotan por $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ $(r \leq n)$, entonces el producto se vuelve

(6) $$f(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}.$$

El exponente m_j se denomina **multiplicidad algebraica** de λ_j. El número máximo de eigenvectores linealmente independientes correspondientes a λ_j se denomina **multiplicidad geométrica** de λ_j, y es menor o igual que m_j.

Semejanza. Desplazamiento espectral. Matrices especiales

Una matriz **B** de $n \times n$ se denomina **semejante** a **A** si existe una matriz **T** tal que

(7) $$\boxed{\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}.}$$

La semejanza es importante por la siguiente razón.

Teorema 2 (Matrices semejantes)

Las matrices semejantes tienen los mismos eigenvalores. Si **x** *es un eigenvector de* **A**, *entonces* $\mathbf{y} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$ *es un eigenvector de* **B** *en* (7) *correspondiente al mismo eigenvalor.* (La demostración se proporcionó en la sección 7.14.)

A continuación se enuncia otro teorema que tiene varias aplicaciones en el trabajo numérico.

Teorema 3 (Desplazamiento espectral)

Si **A** *tiene los eigenvalores* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, *entonces* $\mathbf{A} - k\mathbf{I}$ *tiene los eigenvalores* $\lambda_1 - k, \cdots, \lambda_n - k$.

Este teorema es un caso especial del siguiente **teorema de mapeo espectral.**

Teorema 4 (Matrices polinómicas)

Si λ *es un eigenvalor de* **A**, *entonces*

$$q(\lambda) = \alpha_s\lambda^s + \alpha_{s-1}\lambda^{s-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

es un eigenvalor de la **matriz polinómica**

$$q(\mathbf{A}) = \alpha_s\mathbf{A}^s + \alpha_{s-1}\mathbf{A}^{s-1} + \cdots + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_0\mathbf{I}.$$

Demostración. $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ implica $\mathbf{A}^2\mathbf{x} = \mathbf{A}\lambda\mathbf{x} = \lambda\mathbf{Ax} = \lambda^2\mathbf{x}$, $\mathbf{A}^3\mathbf{x} = \lambda^3\mathbf{x}$, etc. Por tanto,

$$\begin{aligned} q(\mathbf{A})\mathbf{x} &= (\alpha_s\mathbf{A}^s + \alpha_{s-1}\mathbf{A}^{s-1} + \cdots)\mathbf{x} \\ &= \alpha_s\mathbf{A}^s\mathbf{x} + \alpha_{s-1}\mathbf{A}^{s-1}\mathbf{x} + \cdots \\ &= \alpha_s\lambda^s\mathbf{x} + \alpha_{s-1}\lambda^{s-1}\mathbf{x} + \cdots = q(\lambda)\mathbf{x}. \end{aligned}$$ ■

Los eigenvalores de matrices especiales importantes pueden caracterizarse por el

Teorema 5 (Matrices especiales)

Los eigenvalores de las matrices hermitianas (es decir, matrices **A** tales que $\overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}$), *y por tanto de las matrices simétricas reales* (es decir, matrices **A** tales que $\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}$), *son reales. Los eigenvalores de las matrices antihermitianas* (es decir, matrices **A** tales que $\overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}} = -\mathbf{A}$), *y por tanto de las matrices antisimétricas reales* (es decir, matrices **A** tales que $\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = -\mathbf{A}$) *son imaginarios puros o* 0. *Los eigenvalores de las matrices unitarias* (es decir, matrices **A** tales que $\overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^{-1}$), *y por tanto de las matrices ortogonales* (es decir, matrices **A** tales que $\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^{-1}$) *tienen valor absoluto igual a* 1. (La demostración de este teorema se proporcionó en la sección 7.13.)

La **elección de un método numérico** para resolver problemas de eigenvalores de matrices depende esencialmente de dos circunstancias: del tipo de matriz (simétrica real, real general, compleja, rala, o completa), y del tipo de información que desea obtenerse; es decir, si se quieren conocer todos los eigenvalores o simplemente algunos específicos, por ejemplo, el mayor; si se desean conocer los eigenvalores *y* los eigenvectores, etc. Resulta evidente que no es posible efectuar un análisis sistemático de todas estas y otras posibilidades que se presentan en la práctica (para tener una idea, consultar rápidamente la referencia [E27]), por lo que la atención se centrará en algunos aspectos y métodos fundamentales gracias a los cuales se adquirirán información aceptable y comprensión general de este terreno fascinante.

19.7 INCLUSIÓN DE EIGENVALORES DE MATRICES

Por "**inclusión**" se entiende la determinación de valores aproximados de eigenvalores y las correspondientes cotas para el error. Como un primer importante "teorema de inclusión", el teorema de Gerschgorin proporciona una región que consta de discos circulares cerrados en el plano complejo y que incluye a todos los eigenvalores de una matriz dada. En efecto, para cada $j = 1, \cdots, n$, la desigualdad (1) en el teorema determina un disco circular cerrado en el plano complejo λ con centro a_{jj} y radio definido por el miembro derecho de (1); y el teorema 1 establece que cada uno de los eigenvalores de **A** está en alguno de estos n discos.

Teorema 1 (Teorema de Gerschgorin)

Sea λ *un eigenvalor de una matriz arbitraria* $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ *de* $n \times n$. *Entonces, para algún entero* j $(1 \leq j \leq n)$ *se tiene*

(1) $|a_{jj} - \lambda| \leqq |a_{j1}| + |a_{j2}| + \cdots + |a_{j,j-1}| + |a_{j,j+1}| + \cdots + |a_{jn}|.$

Demostración. Sea **x** un eigenvector correspondiente a tal eigenvalor λ. Entonces

(2) $$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \qquad \text{o} \qquad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Sea x_j la componente de **x** que tiene el mayor valor absoluto. Entonces se tiene $|x_m/x_j| \leq 1$ para $m = 1, \cdots, n$. La ecuación vectorial (2) es equivalente a un sistema de n ecuaciones para las n componentes de los vectores de ambos miembros, y la j-ésima de estas n ecuaciones es

$$a_{j1}x_1 + \cdots + a_{j,j-1}x_{j-1} + (a_{jj} - \lambda)x_j + a_{j,j+1}x_{j+1} + \cdots + a_{jn}x_n = 0.$$

Al dividir entre x_j y reordenar términos se obtiene

$$a_{jj} - \lambda = -a_{j1}\frac{x_1}{x_j} - \cdots - a_{j,j-1}\frac{x_{j-1}}{x_j} - a_{j,j+1}\frac{x_{j+1}}{x_j} - \cdots - a_{jn}\frac{x_n}{x_j}.$$

Al tomar valores absolutos en ambos miembros de esta ecuación, aplicar la desigualdad del triángulo $|a + b| \leq |a| + |b|$ (en donde a y b son números complejos cualesquiera), y observar que debido a la elección de j (¡que es crucial!),

$$\left|\frac{x_1}{x_j}\right| \leqq 1, \qquad \cdots, \qquad \left|\frac{x_n}{x_j}\right| \leqq 1,$$

se obtiene (1), y así se ha demostrado el teorema.

Ejemplo 1. Teorema de Gerschgorin.

Para los eigenvalores de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 5 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

se obtienen los discos de Gerschgorin

D_1: Centro 0, radio 1
D_2: Centro 5, radio 1.5
D_3: Centro 1, radio 1.5.

Como A es simétrica, por lo anterior y el teorema 5, sección 19.6, se concluye que el espectro de A en realidad debe estar en los intervalos [−1, 2.5] y [3.5, 6.5] sobre el eje real. El estudiante puede confirmar ésto demostrando que, hasta tres decimales, $\lambda_1 = -0.209$, $\lambda_2 = 5.305$, $\lambda_3 = 0.904$.

Es interesante que aquí los discos de Gerschgorin constituyen dos conjuntos ajenos; a saber, $D_1 \cup D_3$, que contiene dos eigenvalores, y D_2, que contiene un eigenvalor. Este hecho es típico, como se muestra en el siguiente teorema. ∎

Teorema 2 (Extensión del teorema de Gerschgorin)

Si p discos de Gerschgorin forman un conjunto S que es ajeno de los otros $n - p$ discos de una matriz dada **A**, *entonces S contiene exactamente p eigenvalores de* **A** *(cada uno contado con su multiplicidad algebraica, según se definió en la sección* 19.6).

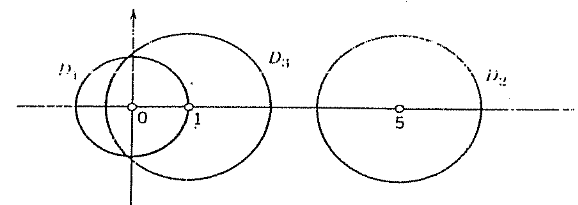


Figura 419. Discos de Gerschgorin en el ejemplo 1.

Demostración. Esta es una "*demostración de continuidad*". Sea $S = D_1 \cup D_2 \cdots \cup D_p$ sin restricción, en donde D_j es el disco de Gerschgorin con centro en a_{jj}. Se escribe $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$, en donde $\mathbf{B} = \text{diag}(a_{jj})$ es la matriz diagonal con la diagonal principal de **A** como diagonal. Ahora se considerará

$$\mathbf{A}_t = \mathbf{B} + t\mathbf{C} \qquad \text{para } 0 \leqq t \leqq 1.$$

entonces $\mathbf{A}_0 = \mathbf{B}$ y $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$. Así, por álgebra, las raíces del polinomio característico $f_t(\lambda)$ de $\mathbf{A}_t$ (es decir, los eigenvalores de $\mathbf{A}_t$) dependen continuamente de los coeficientes de $f_t(\lambda)$, que a su vez dependen continuamente de t. Para $t = 0$, lo eigenvalores son $a_{11}, \cdots, a_{nn}$. Si se deja que t crezca continuamente desde 0 hasta 1, entonces los eigenvalores se mueven continuamente y, por el teorema 1, cada t está en los discos de Gerschgorin con centros a_{jj} y radios

$$tr_j \qquad \text{en donde} \qquad r_j = \sum_{k \neq j} |a_{jk}|.$$

Como al final S es ajeno a cualquier otro disco, entonces se concluye la afirmación.

Ejemplo 2. Otra aplicación del teorema de Gerschgorin. Semejanza.

Suponer que se ha diagonalizado una matriz aplicando algún método numérico con el que se obtuvieron algunos elementos fuera de la diagonal de tamaño 10^{-5}, por ejemplo,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 10^{-5} & 10^{-5} \\ 10^{-5} & 2 & 10^{-5} \\ 10^{-5} & 10^{-5} & 4 \end{bmatrix}.$$

¿Qué puede concluirse sobre las desviaciones de los eigenvalores con respecto a los elementos de la diagonal principal?

Solución. Por el teorema 2, un eigenvalor debe estar en el disco de radio $2 \cdot 10^{-5}$ centrado en 4, y dos eigenvalores (o un eigenvalor de multiplicidad algebraica 2) en el disco de radio $2 \cdot 10^{-5}$ centrado en 2. En realidad, como la matriz es simétrica, estos eigenvalores deben estar en las intersecciones de tales discos y el eje real, por el teorema 5 de la sección 19.6.

A continuación se demostrará que (y cómo) un disco aislado puede reducirse siempre en tamaño aplicando una transformación de semejanza. La matriz

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 10^{-5} & 10^{-5} \\ 10^{-5} & 2 & 10^{-5} \\ 10^{-5} & 10^{-5} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 10^{-5} & 1 \\ 10^{-5} & 2 & 1 \\ 10^{-10} & 10^{-10} & 4 \end{bmatrix}$$

es semejante a A. Así, por el teorema 2 de la sección 19.6, tiene los mismos eigenvalores que A. Por el renglón 3 se obtiene el disco más pequeño, de radio $2 \cdot 10^{-10}$. Observar que los otros discos se hacen más grandes, aproximadamente por un factor de 10^5. Al elegir T es necesario cuidar que los nuevos discos no se traslapen con el disco cuyo tamaño desea disminuirse. ∎

Otros teoremas de inclusión

Un **teorema de inclusión** es un teorema que especifica un conjunto que contiene por lo menos un eigenvalor de una matriz dada. Así, los teoremas 1 y 2 son teoremas de inclusión; de hecho, incluyen a todo el espectro. A continuación se analizarán algunos teoremas famosos que conducen a inclusiones de eigenvalores.

Teorema 3 (Teorema de Schur[3])

Sea $\mathbf{A} = [ajk]$ *una matriz de* $n \times n$. *Sean* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *sus eigenvalores. Entonces*

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leqq \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|^2 \qquad \text{(Desigualdad de Schur).}$$

En (3) *la igualdad se cumple si y sólo si* **A** *es tal que*

$$(4) \qquad \overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}}\mathbf{A} = \mathbf{A}\overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}}.$$

Las matrices que satisfacen (4) se denominan **matrices normales**. No debe ser difícil ver que las matrices hermitiana, antihermitiana y unitaria son normales, así como también lo son las matrices simétrica real, antisimétrica y ortogonal.

Sea λ_m cualquier eigenvalor de la matriz A en el teorema 3. Entonces $|\lambda_m|^2$ es menor o igual que la sumatoria del miembro izquierdo de (3) y al tomar raíces cuadradas, a partir de (3) se obtiene

$$(5) \qquad |\lambda_m| \leqq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|^2}.$$

Observar que el miembro derecho es la norma de Frobenius de A (ver la sección 19.3).

[3] ISSAI SCHUR (1875-1941), matemático alemán, profesor en Berlín, también conocido por su importante obra sobre teoría de grupos.

Ejemplo 3. Cotas para los eigenvalores obtenidos a partir de la desigualdad de Schur.

Para la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 26 & -2 & 2 \\ 2 & 21 & 4 \\ 4 & 2 & 28 \end{bmatrix}$$

por la desigualdad de Schur se obtiene

$$|\lambda| \leqq \sqrt{1949} < 44.2.$$

(Los eigenvalores de A son 30, 25 y 20; por tanto, $30^2 + 25^2 + 20^2 = 1925 < 1949$; de hecho, A no es normal.) ∎

Los teoremas precedentes son válidos para cualquier matriz cuadrada real o compleja, aunque existen otros teoremas que se cumplen sólo para clases especiales de matrices. El siguiente teorema debido a Frobenius,[4] que se enunciará sin demostración, pertenece a este tipo de teoremas.

Teorema 4 (Teorema de Perron-Frobenius)

Sea **A** *una matriz cuadrada real cuyos elementos son todos positivos. Entonces* **A** *tiene por lo menos un eigenvalor real positivo* λ, *y el eigenvector correspondiente puede elegirse real y tal que todas sus componentes sean positivas.*

A partir de este teorema es posible deducir el siguiente resultado útil atribuido a Collatz.[5]

Teorema 5 (Teorema de Collatz)

Sea $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ *una matriz real de* $n \times n$ *cuyos elementos son todos positivos. Sea* **x** *cualquier vector real cuyas componentes* $x_1, \cdots, x_n$ *son positivas, y sean* $y_1, \cdots, y_n$ *las componentes del vector* $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$. *Entonces el intervalo cerrado sobre el eje real acotado por el menor y el mayor de los n cocientes* $q_j = y_j/x_j$ *contiene por lo menos un eigenvalor de* **A**.

Demostración. Se tiene $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$, o bien,

$$(6) \qquad \mathbf{y} - \mathbf{Ax} = \mathbf{0}.$$

La transpuesta $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ satisface las condiciones del teorema 4. Por tanto, $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ tiene un eigenvalor positivo λ y, correspondiente a este eigenvalor, un eigenvector **u** cuyas componentes u_j son todas positivas. Así, $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, y al tomar la transpuesta se obtiene $\mathbf{u}^{\mathsf{T}}\mathbf{A} = \lambda\, \mathbf{u}^{\mathsf{T}}$. Por ésto y (6),

$$\mathbf{u}^{\mathsf{T}}(\mathbf{y} - \mathbf{Ax}) = \mathbf{u}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} - \mathbf{u}^{\mathsf{T}}\mathbf{Ax} = \mathbf{u}^{\mathsf{T}}(\mathbf{y} - \lambda\mathbf{x}) = 0$$

[4] Ver la nota de pie de página de la sección 5.4. Para una demostración del teorema, consultar la referencia [B2], vol. II, págs. 53-62.

[5] LOTHAR COLLATZ (1910-1990), matemático alemán, conocido por su trabajo sobre análisis numérico.

o bien,

$$\sum_{j=1}^{n} u_j(y_j - \lambda x_j) = 0.$$

Como todas las componentes u_j son positivas, se concluye que

$$(7) \qquad \begin{array}{llll} y_j - \lambda x_j \geqq 0, & \text{es decir,} & q_j \geqq \lambda & \text{para por lo menos un } j. \\ y_j - \lambda x_j \leqq 0, & \text{es decir,} & q_j \leqq \lambda & \text{para por lo menos un } j. \end{array}$$

Como $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ tienen los mismos eigenvalores, λ es un eigenvalor de $\mathbf{A}$, y por (7) se concluye la afirmación del teorema. ▮

Ejemplo 4. Cotas para eigenvalores a partir del teorema de Collatz.

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}. \quad \text{Elegir} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \text{Entonces} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, $q_1 = 10$, $q_2 = 8$, $q_3 = 8$, y el teorema 5 implica que uno de los eigenvalores de A debe estar en el intervalo $8 \leq \lambda \leq 10$. Por supuesto, la longitud de este intervalo depende de la elección de x. El estudiante debe demostrar que $\lambda = 9$ es un eigenvalor de A.

Problemas de la sección 19.7

Aplicar el teorema 1 para determinar y dibujar discos que contienen los eigenvalores de las siguientes matrices.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 2.2 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 3.0 & -0.1 \\ 0 & -0.1 & 4.5 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 5 & 10^{-2} & 10^{-2} \\ 10^{-2} & 8 & 10^{-2} \\ 10^{-2} & 10^{-2} & 9 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 0 & 0.5i & -i \\ 1-i & 1+i & 0 \\ 0.1i & 1 & -i \end{bmatrix}$

7. Demostrar que en los problemas 1 y 4 los eigenvalores son 10, 0, −4 y 6, 3, 3, respectivamente.

8. Encontrar una matriz de 2×2 que ilustre el hecho de que un eigenvalor bien puede estar sobre un círculo de Gerschgorin (de modo que en general los discos de Gerschgorin no pueden sustituirse por discos más pequeños sin pérdida de la propiedad de inclusión).

9. Encontrar una transformación de semejanza $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$ que reduzca el radio del círculo de Gerschgorin con centro 5 en el problema 5 a 1/100 de su valor original.

Usando (5), obtener una cota superior para el valor absoluto de los eigenvalores de la matriz en el

10. problema 2. **11.** problema 3. **12.** problema 6. **13.** problema 5.

Aplicar el teorema 5 a las siguientes matrices, eligiendo los vectores dados como los vectores x.

14. $\begin{bmatrix} 20 & 8 & 1 \\ 8 & 21 & 8 \\ 1 & 8 & 20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

16. ¿Puede conjeturar a partir del problema 15 que si una matriz A tiene sumas renglón iguales o sumas columna iguales, por ejemplo, iguales a k, entonces k es un eigenvalor de A? Demostrar la conjetura.

17. Demostrar que la matriz del ejemplo 4 tiene los eigenvalores 9, 6, 3 y que (3) se cumple con el signo de igualdad. Concluir que la matriz es normal. Comprobar este hecho.

18. Demostrar que las matrices hermitiana, antihermitiana y unitaria son normales.

19. Demostrar que la matriz del problema 3 no es normal y que tiene los eigenvalores −1, 4, 9.

20. **(Determinante diferente de cero)** Si en cada renglón de un determinante el elemento sobre la diagonal principal es mayor en valor absoluto que la suma de los valores absolutos de los otros elementos en ese renglón, demostrar que el valor del determinante no puede ser cero. ¿Qué implica lo anterior respecto a la solubilidad de sistemas lineales de ecuaciones? ¿Y respecto al espectro de la matriz correspondiente?

19.8 EIGENVALORES POR ITERACIÓN (MÉTODO DE LAS POTENCIAS)

Un sencillo procedimiento estándar para calcular valores aproximados de los eigenvalores de una matriz $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ de $n \times n$ es el **método de las potencias.** En este método se empieza a partir de cualquier vector $\mathbf{x}_0$ ($\neq \mathbf{0}$) con n componentes y de manera sucesiva se calculan

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0, \qquad \mathbf{x}_2 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1, \qquad \cdots, \qquad \mathbf{x}_s = \mathbf{A}\mathbf{x}_{s-1}.$$

Para simplificar la notación, $\mathbf{x}_{s-1}$ se denotará por x y $\mathbf{x}_s$ se denotará por y, de modo que $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$. Si A es simétrica real, entonces el siguiente teorema proporciona una aproximación y cotas para el error.

Teorema 1 *Sea* **A** *una matriz simétrica real de $n \times n$. Sea* **x** ($\neq$ 0) *cualquier vector real con n componentes. Además, sean*

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax}, \qquad m_0 = \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}, \qquad m_1 = \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{y}, \qquad m_2 = \mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{y}.$$

Entonces el cociente

$$\boxed{q = \frac{m_1}{m_0}} \qquad \textbf{(Cociente de Rayleigh}^{6}\textbf{)}$$

[6] LORD RAYLEIGH (JOHN WILLIAM STRUTT) (1842-1919), físico y matemático inglés, profesor en Cambridge y Londres, conocido por sus importantes contribuciones a varias ramas de las matemáticas aplicadas y a la física teórica; en particular, a la teoría de las ondas, elasticidad e hidrodinámica.

[7] Suele ser común el λ de mayor valor absoluto, aunque no es posible efectuar afirmaciones generales.

es una aproximación de un eigenvalor[7] λ *de* **A**, *y si se hace* $q = \lambda - \varepsilon$, *de modo que* ε *es el error de* q, *entonces*

(1) $$|\epsilon| \leqq \sqrt{\frac{m_2}{m_0} - q^2}.$$

Demostración. Sea δ^2 que denota al radicando en (1). entonces, como $m_1 = qm_0$, se tiene

(2) $$(\mathbf{y} - q\mathbf{x})^{\mathsf{T}}(\mathbf{y} - q\mathbf{x}) = m_2 - 2qm_1 + q^2m_0 = m_2 - q^2m_0 = \delta^2 m_0.$$

Dado que **A** es simétrica real, entonces posee un conjunto ortogonal de n eigenvectores unitarios reales $\mathbf{z}_1, \cdots, \mathbf{z}_n$ que corresponden a los eigenvalores $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ respectivamente (algunos de los cuales pueden ser iguales). (La demostración de este hecho se encuentra en la obra mencionada en el apéndice 1 como referencia [B2], vol. 1, págs. 270-272). Así, **x** tiene una representación de la forma

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{z}_1 + \cdots + a_n\mathbf{z}_n.$$

Ahora, $\mathbf{A}\mathbf{z}_1 = \lambda_1\mathbf{z}_1$, etc., y se obtiene

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = a_1\lambda_1\mathbf{z}_1 + \cdots + a_n\lambda_n\mathbf{z}_n$$

y, como los $\mathbf{z}_j$ son vectores unitarios ortogonales,

(3) $$m_0 = \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} = a_1{}^2 + \cdots + a_n{}^2.$$

Se concluye que en (2)

$$\mathbf{y} - q\mathbf{x} = a_1(\lambda_1 - q)\mathbf{z}_1 + \cdots + a_n(\lambda_n - q)\mathbf{z}_n.$$

Como los $\mathbf{z}_j$ son vectores unitarios ortogonales, entonces por (2) se obtiene

$$\delta^2 m_0 = a_1{}^2(\lambda_1 - q)^2 + \cdots + a_n{}^2(\lambda_n - q)^2.$$

Al sustituir cada $(\lambda_j - q)^2$ por el menor de estos términos, por (3) se tiene

$$\delta^2 m_0 \geqq (\lambda_c - q)^2(a_1{}^2 + \cdots + a_n{}^2) = (\lambda_c - q)^2 m_0$$

en donde λ_c es un eigenvalor al que q está más próximo. Al dividir esta desigualdad entre m_0 y extraer raíces cuadradas se obtiene (1), con lo que se ha demostrado el teorema. ∎

Ejemplo 1. Una aplicación del teorema 1.

Así como en el ejemplo 4 de la sección precedente, se considerará la matriz simétrica real

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{y elegir} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces se obtiene sucesivamente

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 72 \\ -32 \\ 40 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 720 \\ -496 \\ 512 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 7776 \\ -6464 \\ 6496 \end{bmatrix}.$$

Tomando $\mathbf{x} = \mathbf{x}_3$ y $\mathbf{y} = \mathbf{x}_4$, se tiene

$$m_0 = \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} = 1\,026\,560, \quad m_1 = \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} = 12\,130\,816, \quad m_2 = \mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} = 144\,447\,488.$$

A partir de lo anterior se calcula

$$q = \frac{m_1}{m_0} = 11.817, \qquad |\epsilon| \leqq \sqrt{\frac{m_2}{m_0} - q^2} = 1.034.$$

La última expresión demuestra que $q = 11.817$ es una aproximación para un eigenvalor que debe estar entre 10.783 y 12.851. El estudiante debe demostrar que un eigenvalor es $\lambda = 12$. ∎

El **desplazamiento espectral**, la transición de **A** a $\mathbf{A} - k\mathbf{I}$ (sección 19.6), puede ser de utilidad para mejorar la convergencia del método de las potencias, que es simple, aunque algunas veces converge más bien lentamente. La información sobre el espectro resultante del problema o de las cotas obtenidas por otro método o a través de pequeños experimentos computacionales preliminares puede ser de ayuda para encontrar una k aceptable. En el ejemplo 1 la matriz es simétrica y al aplicar el teorema de Gerschgorin se obtiene $0 \leq \lambda \leq 12$. Si se desplaza demasiado, por ejemplo, $k = -6$, obteniéndose $-6 \leq \tilde{\lambda} \leq 6$, es posible obtener grandes eigenvalores negativos de la nueva matriz, de modo que se establecerá para desplazarse menos, por ejemplo, $k = -4$:

Ejemplo 2. Desplazamiento espectral.

Para **A** y $\mathbf{x}_0$ en el ejemplo 1 y $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - 4\mathbf{I}$ se obtiene

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \ \tilde{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \tilde{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} 24 \\ -16 \\ 24 \end{bmatrix}, \ \tilde{\mathbf{x}}_3 = \begin{bmatrix} 176 \\ -176 \\ 160 \end{bmatrix}, \ \tilde{\mathbf{x}}_4 = \begin{bmatrix} 1376 \\ -1344 \\ 1376 \end{bmatrix}.$$

A partir de lo anterior se obtiene

$$\tilde{m}_0 = 87\,552, \quad \tilde{m}_1 = 698\,880, \quad \tilde{m}_2 = 5\,593\,088, \quad \tilde{q} = 7.982$$

de modo que $q = \tilde{q} + 4 = 11.982$, con un error del 0.15%, en oposición a q en el ejemplo 1, cuyo error es de 1.5%; por tanto, ¡la mejora es por un factor de 10! También, con $|\varepsilon| \leq 0.404$ se obtiene $11.578 \leq \lambda \leq 12.386$. Es típico que $|\epsilon|$ sea mucho mayor que el error real, aunque las cotas resultantes no pueden mejorarse, como se ilustra con los ejemplos. ∎

Problemas de la sección 19.8

Si se elige $\mathbf{x}_0 = [1 \ \ 1]^{\mathsf{T}}$ o $\mathbf{x}_0 = [1 \ \ 1 \ \ 1]^{\mathsf{T}}$, respectivamente, aplicar el método de las potencias (3 pasos) a las siguientes matrices, calculando en cada paso el cociente de Rayleigh y las cotas para el error.

1. $\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 5. $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 6 & -2 \end{bmatrix}$ 6. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

7. Calcular los valores exactos de los eigenvalores del problema 1. Comprobar que los errores reales de las aproximaciones son mucho menores que las cotas para el error del problema 1. Este hecho es típico.

A fin de ver cómo se comporta el método de las potencias para diferentes elecciones de $\mathbf{x}_0$, aplicar este método a la matriz del problema 4; denominar **A** a esta matriz; efectuar 3 pasos y calcular el cociente de Rayleigh y las cotas para el error correspondientes al tercer paso. Comprobar que **A** tiene los eigenvalores 5, 3, 0 e indique cuál eigenvalor es aproximado por el resultado.

8. $[0 \;\; 1 \;\; -1]^T$ 9. $[1 \;\; 1 \;\; 0]^T$ 10. $[0 \;\; 0 \;\; 1]^T$

Si se elige $\mathbf{x}_0 = [1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1]^T$, calcular $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ y aproximaciones $q = \mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_0/\mathbf{x}_0^T\mathbf{x}_0$, $q = \mathbf{x}_2^T\mathbf{x}_1/\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_1$ y cotas para el error correspondientes para un eigenvalor de cada una de las siguientes matrices.

11. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ 12. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ 13. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

14. Para comprender la importancia de las cotas para el error (1), considerar la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \text{elegir} \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix},$$

y demostrar que $q = 0$ para toda s. Encontrar los eigenvalores y explicar qué sucedió. Empezar de nuevo, eligiendo otro $\mathbf{x}_0$.

15. **(Desplazamiento espectral)** Demostrar que la matriz del problema 6 es $\mathbf{A} + 5\mathbf{I}$, en donde **A** es la matriz del problema 5. Comprobar que **A** tiene los eigenvalores 7, –3, –7. (a) ¿Cuáles son los eigenvalores de $\mathbf{A} + 5\mathbf{I}$? (b) ¿Por qué es posible esperar una mejora en la convergencia mediante el "desplazamiento espectral" (ver la sección 19.6) desde **A** hasta $\mathbf{A} + 5\mathbf{I}$?

16. ¿Por qué en general el cociente de Rayleigh $q = m_1/m_0$ es una aproximación del eigenvalor λ_1 cuyo valor absoluto es el más grande? *Sugerencia.* Sean $\mathbf{z}_1, \cdots, \mathbf{z}_n$ como en la demostración del teorema 1. Demostrar que si

$$\mathbf{x}_0 = \sum c_j\mathbf{z}_j, \quad \text{then} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_{s-1} = \sum c_j\lambda_j^{s-1}\mathbf{z}_j, \quad \mathbf{y} = \mathbf{x}_s = \sum c_j\lambda_j^{s}\mathbf{z}_j,$$

$$q = m_1/m_0 = (c_1^2\lambda_1^{2s-1} + \cdots)/(c_1^2\lambda_1^{2s-2} + \cdots) \approx \lambda_1.$$

¿En qué condiciones lo anterior es una aproximación aceptable?

17. Demostrar que si **x** es un eigenvector, entonces $\varepsilon = 0$ en (1).

18. Sea **A** una matriz simétrica, con eigenvalores, $\lambda_1 > \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1} > \lambda_n$, suponiendo $|\lambda_1| > |\lambda_n|$, y sea α una buena estimación de λ_1. Entonces, al aplicar el método de las potencias a $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \alpha\mathbf{I}$, en general se obtienen aproximaciones a λ_n. ¿A qué se debe lo anterior, y qué significa "en general"?

19. Aplicar el método del problema 18 a la matriz del problema 4 con $\alpha = 4.9$ (como sugiere la respuesta del problema 4), $\mathbf{x}_0 = [1 \;\; 1 \;\; 1]^T$ y $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ como **x** y **y**.

20. El **teorema de Collatz** (sección 19.7) se aplica a la matriz del problema 6. Usando esta matriz con $\mathbf{x}_0 = [1 \;\; 1 \;\; 1]^T$, efectuar 2 pasos y comparar los resultados con los obtenidos al aplicar el teorema 1.

19.9 DEFLACIÓN DE UNA MATRIZ

En la práctica, a menudo sucede que se ha calculado o adivinado uno de los eigenvalores de una matriz dada **A**, λ_1, y se desea encontrar los demás eigenvalores $\lambda_2, \cdots, \lambda_n$ de **A**. Se demostrará que entonces a partir de **A** es posible obtener una matriz $\mathbf{A}_1$ cuyo espectro consta de 0 y los eigenvalores (aún desconocidos) $\lambda_2, \cdots, \lambda_n$ de **A**. El proceso de sustitución de **A** por $\mathbf{A}_1$ en la determinación de tales eigenvalores se denomina **deflación** de **A**. Se estudiará el conocido método de Wielandt. En el problema 16 se menciona un método más sencillo aunque numéricamente deficiente.

Deflación de Wielandt[8]

Sean **A** cualquier matriz real de $n \times n$ y λ_1 un eigenvalor conocido de **A**, como antes. Sea $\mathbf{x}_1$ un eigenvector de **A** correspondiente a λ_1. Sea **u** cualquier vector (que se determinará más tarde) tal que

$$\mathbf{u}^T\mathbf{x}_1 = \lambda_1. \tag{1}$$

Considerar

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} - \mathbf{x}_1\mathbf{u}^T. \tag{2}$$

Primero se demostrará que 0 es un eigenvalor de $\mathbf{A}_1$ y que $\mathbf{x}_1$ es un eigenvector correspondiente. En efecto, por (1),

$$\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1\mathbf{u}^T\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1 - \lambda_1\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}.$$

Sean $\lambda_j, j = 2, \cdots n$ los otros eigenvalores de **A**, con eigenvectores correspondientes $\mathbf{x}_j$. Se demostrará que $\lambda_j \neq 0$ es un eigenvalor de $\mathbf{A}_1$ con eigenvector correspondiente

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{x}_j - \frac{\mathbf{u}^T\mathbf{x}_j}{\lambda_j}\mathbf{x}_1. \tag{3}$$

Aplicando las definiciones, se tiene

[8] HELMUT WIELANDT (nacido en 1910), matemático alemán.

$$A_1 y_j = (A - x_1 u^T)\left(x_j - \frac{u^T x_j}{\lambda_j} x_1\right).$$

Al multiplicar y observar que $u^T x_j / \lambda_j$ es un escalar, de modo que es posible desplazarlo al efectuar productos, se obtiene

$$A_1 y_j = A x_j - \frac{u^T x_j}{\lambda_j} A x_1 - x_1 (u^T x_j) + \frac{u^T x_j}{\lambda_j} x_1 u^T x_1.$$

Así, en la derecha, $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ en el segundo término, y $x_1 u^T x_1 = x_1 \lambda_1$ en el cuarto término [por (1)], de modo que estos dos términos se cancelan. Así, se ha quedado con

$$A_1 y_j = \lambda_j x_j - x_1 (u^T x_j) = \lambda_j y_j.$$

Esto demuestra que λ_j es un eigenvalor de A_1.

Ahora se demostrará cómo obtener u en la práctica, y también se verá que la hipótesis $\lambda_j = 0$ no constituye ningún inconveniente para el método. Se tiene $Ax_1 = \lambda_1 x_1$. Es fácil encontrar un v tal que $v^T x_1 = 1$. Así,

$$v^T A x_1 = v^T \lambda_1 x_1 = \lambda_1 v^T x_1 = \lambda_1.$$

Debido a (1) lo anterior muestra que es posible tomar

$$u^T = v^T A.$$

Entonces (2) se vuelve

$$A_1 = A - x_1 v^T A \tag{4}$$

y en (3) ahora se elimina λ_j, ya que $A\lambda_j = \lambda_j x_j$ y así

$$y_j = x_j - \frac{v^T A x_j}{\lambda_j} x_j = x_j - v^T x_j x_1.$$

Además, si x_1 tiene una primera componente diferente de cero, es posible normalizarlo a fin de que su primera componente sea 1. Luego se puede simplemente tomar el vector $v^T = e^T = [1 \ 0 \cdots 0]$. Para esta elección,

$$\boxed{A_1 = (I - x_1 e_1^T) A.} \tag{5}$$

Ejemplo 1. Deflación de Wielandt.

Encontrar el espectro de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

en el ejemplo 1 de la sección precedente, suponiendo que se conoce uno de los eigenvalores, $\lambda_1 = 12$.

Solución. Aplicando la eliminación de Gauss, primero se calcula un eigenvector x_1 de A correspondiente a $\lambda_1 = 12$, con lo que se encuentra $x_1 = [1 \ -1 \ 1]^T$. Con el método de Wielandt ahora es posible tomar el vector $v_1^T = e_1^T = [1 \ 0 \ 0]$, ya que $v_1^T x_1 = 1$. Se calcula

$$x_1 e_1^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \quad 0 \quad 0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y a partir de lo anterior, por (5), se tiene que

$$A_1 = (I - x_1 e_1^T) A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & -2 \\ -6 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ahora ya es posible determinar los otros dos eigenvalores directamente a partir de $\det(A_1 - \lambda I) = 0$, en donde

$$\det(A_1 - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 6 & 4-\lambda & -2 \\ -6 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 8\lambda + 12).$$

Se obtiene $\lambda_2 = 6, \lambda_3 = 2$.

En el caso de una matriz más grande, el siguiente paso hubiera sido calcular otro eigenvalor (por ejemplo, aplicando el método de las potencias) seguido de otra aplicación del método de Wielandt, etc. ∎

En la siguiente sección se demostrará que para determinar todo el espectro de una matriz existen mejores métodos que la aplicación sucesiva de deflaciones.

Problemas de la sección 19.9

1. Comprobar que $A_1 x_1 = 0$ en el ejemplo 1 del texto.

Aplicar el método de deflación de Wielandt a las siguientes matrices. Mostrar la matriz deflactada y determinar los demás eigenvalores.

2. $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 31 & 16 & 72 \\ -24 & -12 & -57 \\ -8 & -4 & -19 \end{bmatrix}, \quad x_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & -6 & 2 \end{bmatrix}, \quad x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 8 & 0 \end{bmatrix}, \quad x_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 6 & -1 & -5 \\ -4 & 2 & -2 \\ 18 & -5 & -9 \end{bmatrix}, \quad x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} -5 & 11 & -13 \\ -92 & 39 & 22 \\ 74 & -13 & -44 \end{bmatrix}, \quad x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.8 \\ 0.8 & 0.4 & 1.6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 2 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 6 & 7 & 7 \\ 7 & 6 & 7 \\ 7 & 7 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} -6 & 4 & 4 & 4 \\ -6 & 4 & 4 & 4 \\ -4 & 0 & 6 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **13.** $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 2 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -5 \\ 5 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix} 3.4 & 3.4 & 1.3 & 1.3 \\ 3.4 & 3.4 & 1.3 & 1.3 \\ 1.3 & 1.3 & 1.5 & 1.4 \\ 1.3 & 1.3 & 1.4 & 1.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

16. **(Deflación de Hotelling)** Sean A una matriz simétrica, λ_1 un eigenvalor conocido de A, y $\mathbf{x}_1$ un eigenvector normalizado correspondiente, $\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_1 = 1$. Demostrar que

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1^T \qquad \text{(Deflación de Hotelling)}$$

tiene los eigenvalores $\lambda_1 = 0$ y los demás iguales a los de A. (Este método es numéricamente deficiente con respecto al redondeo.) *Sugerencia.* Aplicar el teorema 4 de la sección 7.14.

19.10 TRIDIAGONALIZACIÓN DE HOUSEHOLDER Y FACTORIZACIÓN QR

Se considerará el problema de calcular *todos* los eigenvalores de una matriz ***simétrica real*** $\mathbf{A} = [a_{jk}]$. Deflaciones sucesivas no son benéficas debido al crecimiento del error por redondeo. Se analizará un método bastante utilizado en la práctica. En la primera etapa se aplicará el método de Householder,[9] que reduce la matriz dada a una **matriz tridiagonal**, es decir, una matriz que tiene todos sus elementos diferentes de cero en la diagonal principal y en las posiciones inmediatamente adyacentes a la diagonal principal (como $\mathbf{A}_3$ en la figura 420). En la segunda etapa, la matriz tridiagonal se factoriza a la forma **QR**, en donde **Q** es ortogonal y **R** es triangular superior, y los eigenvalores se determinan realmente (de manera aproximada); esto se analizará más tarde. (Para extensiones para generar matrices, consultar la obra citada en el apéndice 1 como referencia [E27].)

[9] *Journal of the Association for Computing Machinery* 5 (1958), 335-342. Consultar también las obras citadas en el apéndice 1 como referencias [E25], [E26], etc.

Método de Householder

En este método, una matriz ***simétrica*** real $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ de $n \times n$ dada se reduce a una forma tridiagonal mediante la aplicación sucesiva de $n - 2$ transformaciones de semejanza (ver la sección 19.6). Las matrices $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_{n-2}$ son ortogonales y simétricas. Por tanto, $\mathbf{P}_1^{-1} = \mathbf{P}_1^T = \mathbf{P}_1$ y de manera semejante para las demás. Las $n - 2$ transformaciones de semejanza con las que a partir de la $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A} = [a_{jk}]$ dada se obtienen sucesivamente las matrices $\mathbf{A}_1 = [a_{jk}^{(1)}]$, $\mathbf{A}_2 = [a_{jk}^{(2)}]$, etc., son como se muestra a continuación.

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_0 \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{A}_2 &= \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_1 \mathbf{P}_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{B} = \mathbf{A}_{n-2} &= \mathbf{P}_{n-2} \mathbf{A}_{n-3} \mathbf{P}_{n-2}. \end{aligned}$$

Estas transformaciones crean los ceros necesarios, en el primer paso en el renglón 1 y en la columna 1, en el segundo paso en el renglón 2 y en la columna 2, etc., como se ilustra en la figura 420 para una matriz tridiagonal **B** de 5×5.

¿Cómo determinar $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots$? Todas estas $\mathbf{P}_r$ son de la forma

$$\text{(2)} \qquad \mathbf{P}_r = \mathbf{I} - 2\mathbf{v}_r \mathbf{v}_r^T \qquad (r = 1, \cdots, n-2)$$

en donde $\mathbf{v}_r = [v_{jr}]$ es un vector unitario con sus r primeras componentes iguales a 0; así, se tiene que

$$\text{(3)} \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ * \\ * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \mathbf{v}_{n-2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ * \\ * \end{bmatrix}$$

en donde los asteriscos denotan a cualesquiera otras componentes.

Primer paso. Las componentes de $\mathbf{v}_1$ son

(4)

(a) $$v_{11} = 0, \qquad v_{21} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{|a_{21}|}{S_1}\right)}$$

(b) $$v_{j1} = \frac{a_{j1} \operatorname{sgn} a_{21}}{2 v_{21} S_1} \qquad j = 3, 4, \cdots, n$$

en donde

(c) $$S_1 = \sqrt{a_{21}^2 + a_{31}^2 + \cdots + a_{n1}^2}$$

$$\begin{bmatrix} * & * & & & \\ * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} * & * & & & \\ * & * & * & & \\ & * & * & * & * \\ & & * & * & * \\ & & * & * & * \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} * & * & & & \\ * & * & * & & \\ & * & * & * & \\ & & * & * & * \\ & & & * & * \end{bmatrix}$$

Primer paso	Segundo paso	Tercer paso
$\mathbf{A}_1 = \mathbf{P}_1\mathbf{A}\mathbf{P}_1$	$\mathbf{A}_2 = \mathbf{P}_2\mathbf{A}_1\mathbf{P}_2$	$\mathbf{A}_3 = \mathbf{P}_3\mathbf{A}_2\mathbf{P}_3$

Figura 420. Método de Householder para una matriz de 5 × 5. Las posiciones en blanco son ceros generados por el método.

en donde $S_1 > 0$ y $\operatorname{sgn} a_{21} = +1$ si $a_{21} \geqq 0$ y $\operatorname{sgn} a_{21} = -1$ si $a_{21} < 0$. Con esto, $\mathbf{P}_1$ se calcula aplicando (2) y luego $\mathbf{A}_1$ se calcula aplicando (1). Este fue el primer paso.

Segundo paso. $\mathbf{v}_4$ se calcula aplicando (4) con todos los subíndices incrementados por 1 y los a_{jk} sustituidos por $a_{jk}^{(1)}$, los elementos de $\mathbf{A}_1$ que acaban de calcularse. Por tanto, [ver también (3)],

$$(4^*) \qquad \begin{aligned} v_{12} &= v_{22} = 0 \\ v_{32} &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{|a_{32}^{(1)}|}{S_2}\right)} \\ v_{j2} &= \frac{a_{j2}^{(1)} \operatorname{sgn} a_{32}^{(1)}}{2v_{32}S_2} \qquad j = 4, 5, \cdots, n \end{aligned}$$

en donde

$$S_2 = \sqrt{a_{32}^{(1)2} + a_{42}^{(1)2} + \cdots + a_{n2}^{(1)2}}.$$

Con esto, $\mathbf{P}_2$ se calcula aplicando (2) y luego $\mathbf{A}_1$ se calcula aplicando (1).

Tercer paso. $\mathbf{v}_3$ se calcula aplicando (4*) con todos los subíndices incrementados por 1 y los $a_{jk}^{(1)}$ sustituidos por los elementos $a_{jk}^{(2)}$ de $\mathbf{A}_2$, etc.

Ejemplo 1. Método de Householder.

Tridiagonalizar la matriz simétrica real

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Solución. Primer paso. A partir de (4c) se calcula $S_1^2 = 4^2 + 1^2 + 1^2 = 18$. Como $a_{21} = 4 > 0$, entonces en (4b) se tiene $\operatorname{sgn} a_{21} = +1$ y a partir de (4) por medio de un cálculo directo se obtiene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ v_{21} \\ v_{31} \\ v_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.985\,598\,56 \\ 0.119\,573\,16 \\ 0.119\,573\,16 \end{bmatrix}.$$

A partir de esto y (2),

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.942\,809\,04 & -0.235\,702\,26 & -0.235\,702\,26 \\ 0 & -0.235\,702\,26 & 0.971\,404\,52 & -0.028\,595\,48 \\ 0 & -0.235\,702\,26 & -0.028\,595\,48 & 0.971\,404\,52 \end{bmatrix}.$$

Con base en el primer renglón de (1), ahora se obtiene

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{P}_1\mathbf{A}_0\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 6 & -\sqrt{18} & 0 & 0 \\ -\sqrt{18} & 7 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 9/2 & 3/2 \\ 0 & -1 & 3/2 & 9/2 \end{bmatrix}.$$

Segundo paso. Por (4*) se calcula $S_2^2 = 2$ y

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_{32} \\ v_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.923\,879\,53 \\ 0.382\,683\,43 \end{bmatrix}.$$

A partir de lo anterior y por (2),

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

El segundo renglón en (1) ahora proporciona

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}_2 = \mathbf{P}_2\mathbf{A}_1\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 6 & -\sqrt{18} & 0 & 0 \\ -\sqrt{18} & 7 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz **B** es tridiagonal. Como la matriz dada es de orden $n = 4$, se necesitaron $n - 2 = 2$ pasos para efectuar la reducción anterior, como se había afirmado. (¿Puede ver que se obtienen más ceros de los que se esperan en general?) **B** es semejante a **A**, como se demostrará en general a continuación. Este hecho es esencial porque **B** tiene así el mismo espectro que **A**, por el teorema 2 de la sección 19.6. ∎

Ahora se demostrará que $\mathbf{B}$ en (1) es semejante a $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0$.
La matriz $\mathbf{P}_r$ es simétrica,

$$\mathbf{P}_r^{\mathsf{T}} = (\mathbf{I} - 2\mathbf{v}_r\mathbf{v}_r^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = \mathbf{I}^{\mathsf{T}} - 2(\mathbf{v}_r\mathbf{v}_r^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}$$
$$= \mathbf{I} - 2\mathbf{v}_r\mathbf{v}_r^{\mathsf{T}} = \mathbf{P}_r.$$

También, $\mathbf{P}_r$ es ortogonal porque

$$\mathbf{P}_r\mathbf{P}_r^{\mathsf{T}} = \mathbf{P}_r^2 = (\mathbf{I} - 2\mathbf{v}_r\mathbf{v}_r^{\mathsf{T}})^2 = \mathbf{I} - 4\mathbf{v}_r\mathbf{v}_r^{\mathsf{T}} + 4\mathbf{v}_r\mathbf{v}_r^{\mathsf{T}}\mathbf{v}_r\mathbf{v}_r^{\mathsf{T}}$$

y $\mathbf{v}_r^{\mathsf{T}}\mathbf{v}_r = 1$ en el último término porque $\mathbf{v}_r$ es un vector unitario (ver más arriba), de modo que el miembro derecho se reduce a $\mathbf{I}$. Así se obtiene $\mathbf{P}_r^{-1} = \mathbf{P}_r^{\mathsf{T}} = \mathbf{P}_r$. Entonces, por (1) ahora se obtiene

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}_{n-2}\mathbf{A}_{n-3}\mathbf{P}_{n-2} = \cdots$$
$$\cdots = \mathbf{P}_{n-2}\mathbf{P}_{n-3}\cdots\mathbf{P}_1\mathbf{A}\mathbf{P}_1\cdots\mathbf{P}_{n-3}\mathbf{P}_{n-2}$$
$$= \mathbf{P}_{n-2}^{-1}\mathbf{P}_{n-3}^{-1}\cdots\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}_1\cdots\mathbf{P}_{n-3}\mathbf{P}_{n-2}$$
$$= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \quad ,$$

en donde $\mathbf{T} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\cdots\mathbf{P}_{n-2}$. Así se demuestra la afirmación.

Método de factorización QR

En 1958, H. Rutishauser propuso la idea de aplicar la factorización LU (ver la sección 19.2; la denominó factorización LR) para resolver problemas de eigenvalores. Una versión mejorada del método de Rutishauser (que evita el rompimiento si ciertas submatrices se vuelven singulares, etc.; consultar la referencia [E26]) es el **método QR**,[10] que se basa en la factorización **QR**, en donde **R** es triangular superior como antes pero **Q** es ortogonal (en vez de triangular inferior). El método QR se analizará para una matriz simétrica real. (Para extensiones a matrices generales reales o complejas, consultar las obras citadas en el apéndice 1 como [E26] y [E27].) En este método se empieza con una matriz tridiagonal ***simétrica*** real $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}$ (según se obtiene a partir de una matriz simétrica real $\mathbf{A}$ aplicando el método de Householder). $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\cdots$ se calculan paso a paso según la regla siguiente:

Primer paso. Se factoriza

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{Q}_0\mathbf{R}_0$$

[10] Propuesto de manera independiente por J. G. F. Francis, *Computer Journal* 4 (1961-62) 265-271, 332-345, y por V. N. Kublanovskaya, *Zhurnal Vych. Mat. i Mat. Fiz.* 1 (1961), 555-570.

en donde $\mathbf{Q}_0$ es ortogonal y $\mathbf{R}_0$ es triangular superior. Luego se calcula

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{R}_0\mathbf{Q}_0.$$

Segundo paso. Se factoriza $\mathbf{B}_1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1$. Luego se calcula $\mathbf{B}_2 = \mathbf{R}_1\mathbf{Q}_1$.
Paso general. Se factoriza

$$\text{(5)} \qquad \boxed{\mathbf{B}_s = \mathbf{Q}_s\mathbf{R}_s}$$

en donde $\mathbf{Q}_s$ es ortogonal y $\mathbf{R}_s$ es triangular superior. Luego se calcula

$$\text{(6)} \qquad \boxed{\mathbf{B}_{s+1} = \mathbf{R}_s\mathbf{Q}_s.}$$

El método para obtener la factorización (5) se explicará a continuación.

Por (5) se tiene $\mathbf{R}_s = \mathbf{Q}_s^{-1}\mathbf{B}_s$. Al sustituir lo anterior en (6) se obtiene

$$\text{(7)} \qquad \mathbf{B}_{s+1} = \mathbf{R}_s\mathbf{Q}_s = \mathbf{Q}_s^{-1}\mathbf{B}_s\mathbf{Q}_s.$$

Así, $\mathbf{B}_{s+1}$ es semejante a $\mathbf{B}_s$. Por tanto, $\mathbf{B}_{s+1}$ es semejante a $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}$ para toda s. Por el teorema 2 de la sección 19.6, lo anterior implica que $\mathbf{B}_{s+1}$ tiene los mismos eigenvalores que $\mathbf{B}$.

También, $\mathbf{B}_{s+1}$ es simétrica. Lo anterior se concluye por inducción. En efecto, $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}$ es simétrica. Suponiendo que $\mathbf{B}_s$ es simétrica y usando $\mathbf{Q}_s^{-1} = \mathbf{Q}_s^{\mathsf{T}}$ (ya que $\mathbf{Q}_s$ es ortogonal), a partir de (7) se obtiene

$$\mathbf{B}_{s+1}^{\mathsf{T}} = (\mathbf{Q}_s^{\mathsf{T}}\mathbf{B}_s\mathbf{Q}_s)^{\mathsf{T}} = \mathbf{Q}_s^{\mathsf{T}}\mathbf{B}_s^{\mathsf{T}}\mathbf{Q}_s = \mathbf{Q}_s^{\mathsf{T}}\mathbf{B}_s\mathbf{Q}_s = \mathbf{B}_{s+1}$$

como se había afirmado.

Si los eigenvalores de $\mathbf{B}$ son diferentes en valor absoluto, por ejemplo, si se tiene $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|$, entonces

$$\lim_{s\to\infty} \mathbf{B}_s = \mathbf{D}$$

en donde $\mathbf{D}$ es diagonal, con elementos en la diagonal principal $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. (La demostración se encuentra en la obra citada en el apéndice 1 como referencia [E26].)

¿Cómo obtener la factorización QR, por ejemplo $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 = [b_{jk}] = \mathbf{Q}_0\mathbf{R}_0$? La matriz tridiagonal $\mathbf{B}$ tiene $n - 1$ elementos generalmente diferentes de cero por debajo de la diagonal principal. Estos elementos son $b_{21}, b_{32}, \cdots, b_{n,n-1}$. $\mathbf{B}$ se multiplica por la izquierda por una matriz $\mathbf{C}_2$ tal que $\mathbf{C}_2\mathbf{B} = [b_{jk}^{(2)}]$ tiene $b_{21}^{(2)} = 0$. Esto se multiplica por una matriz $\mathbf{C}_3$ tal que $\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2\mathbf{B} = [b_{jk}^{(3)}]$ tiene $b_{32}^{(3)} = 0$, etc. Después de efectuar $n - 1$ de tales multiplicaciones se llega a una matriz triangular superior $\mathbf{R}_0$, a saber,

$$\text{(8)} \qquad \mathbf{C}_n\mathbf{C}_{n-1}\cdots\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2\mathbf{B}_0 = \mathbf{R}_0.$$

Estas $\mathbf{C}_j$ son muy sencillas. $\mathbf{C}_j$ tiene la submatriz de 2×2

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_j & \operatorname{sen}\theta_j \\ -\operatorname{sen}\theta_j & \cos\theta_j \end{bmatrix} \qquad (\theta_j \text{ idóneo})$$

en los renglones $j-1$ y j y en las columnas $j-1$ y j, elementos 1 en todas partes de la diagonal principal y todos los demás elementos iguales a 0. (Esta submatriz es la matriz de una rotación del plano a través del ángulo θ_j; ver el problema 17 de la sección 7.3.) Por ejemplo, si $n=4$, al escribir $c_j = \cos\theta_j$, $s_j = \operatorname{sen}\theta_j$, se tiene

$$C_2 = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & s_3 & 0 \\ 0 & -s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_4 & s_4 \\ 0 & 0 & -s_4 & c_4 \end{bmatrix}.$$

Estas C_j son ortogonales. Por tanto, su producto en (8) es ortogonal, así como la inversa de este producto. Esta inversa se denomina Q_0. Entonces, por (8), se tiene

(9a) $$B_0 = Q_0 R_0$$

en donde, con $C_j^{-1} = C_j^T$,

(9b) $$Q_0 = (C_n C_{n-1} \cdots C_3 C_2)^{-1} = C_2^T C_3^T \cdots C_{n-1}^T C_n^T.$$

Ésta es la factorización QR de B_0. Con base en ella se tiene por (6) con $s=0$

(10) $$B_1 = R_0 Q_0 = R_0 C_2^T C_3^T \cdots C_{n-1}^T C_n^T.$$

Q_0 no se requiere de manera explícita, aunque para obtener B_1 a partir de (10) primero se calcula $R_0 C_2^T$, luego $(R_0 C_2^T) C_3^T$. De manera semejante, en los pasos siguientes con los que se obtienen $B_2, B_3, \cdots$.

A continuación se demostrará cómo determinar $\cos\theta_2$ y $\operatorname{sen}\theta_2$ en C_2 de modo que $b_{21}^{(2)} = 0$ en el producto

$$C_2 B = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 & \cdots \\ -s_2 & c_2 & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots \\ b_{21} & b_{22} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots \end{bmatrix}.$$

Ahora, $b_{21}^{(2)}$ se obtiene al multiplicar el segundo renglón de C_2 por la primera columna de B, es decir,

$$b_{21}^{(2)} = -s_2 b_{11} + c_2 b_{21} = 0.$$

Por tanto, $\tan\theta_2 = s_2/c_2 = b_{21}/b_{11}$, y

(11) $$\cos\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + (b_{21}/b_{11})^2}}, \qquad \operatorname{sen}\theta_2 = \frac{b_{21}/b_{11}}{\sqrt{1 + (b_{21}/b_{11})^2}}.$$

De manera semejante para $\theta_3, \theta_4, \cdots$.

El siguiente ejemplo ilustra todo lo anterior.

Ejemplo 2. Método de factorización QR.

Calcular todos los eigenvalores de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Solución. Primero, A se reduce a forma tridiagonal. Al aplicar el método de Householder, se obtiene (ver el ejemplo 1)

$$A_2 = \begin{bmatrix} 6 & -\sqrt{18} & 0 & 0 \\ -\sqrt{18} & 7 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

A partir del determinante característico se observa que A_2, y por tanto A, tiene un eigenvalor 3. Así, es suficiente con aplicar el método QR a la matriz de 3 × 3

$$B_0 = B = \begin{bmatrix} 6 & -\sqrt{18} & 0 \\ -\sqrt{18} & 7 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 6 \end{bmatrix}.$$

Primer paso. B se multiplica por

$$C_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \operatorname{sen}\theta_2 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y luego } C_2B \text{ por} \quad C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_3 & \operatorname{sen}\theta_3 \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta_3 & \cos\theta_3 \end{bmatrix}.$$

Aquí, con $(-\operatorname{sen}\theta_2)\cdot 6 + (\cos\theta_2)(-\sqrt{18}) = 0$ se obtiene ver (11)

$$\cos\theta_2 = 0.816\,496\,58, \qquad \operatorname{sen}\theta_2 = -0.577\,350\,27.$$

Con estos valores se calcula

$$C_2B = \begin{bmatrix} 7.348\,469\,23 & -7.505\,553\,50 & -0.816\,496\,58 \\ 0 & 3.265\,986\,32 & 1.154\,700\,54 \\ 0 & 1.414\,213\,56 & 6.000\,000\,00 \end{bmatrix}.$$

En C_3, a partir de $(-\text{sen}\ \theta_3)\ 3.26598632 + (\cos\theta_3)\cdot 1.41421356 = 0$ se obtienen los valores

$$\cos\theta_3 = 0.917\,662\,94, \qquad \text{sen}\ \theta_3 = 0.397\,359\,71.$$

Así, se obtiene

$$R_0 = C_3C_2B = \begin{bmatrix} 7.348\,469\,23 & -7.505\,553\,50 & -0.816\,496\,58 \\ 0 & 3.559\,026\,08 & 3.443\,784\,13 \\ 0 & 0 & 5.047\,146\,15 \end{bmatrix}.$$

A partir de lo anterior se calcula

$$B_1 = R_0C_2^TC_3^T = \begin{bmatrix} 10.333\,333\,33 & -2.054\,804\,67 & 0 \\ -2.054\,804\,67 & 4.035\,087\,72 & 2.005\,532\,51 \\ 0 & 2.005\,532\,51 & 4.631\,578\,95 \end{bmatrix}$$

que es simétrica y tridiagonal. Los elementos fuera de la diagonal en B_1 son grandes en valor absoluto. Por tanto, es necesario continuar el proceso.

Segundo paso. Se efectúan los mismos cálculos que en el primer paso, con $B_0 = B$ sustituida por B_1. Se obtiene

$$R_1 = \begin{bmatrix} 10.535\,653\,75 & -2.802\,322\,42 & -0.391\,145\,88 \\ 0 & 4.083\,295\,83 & 3.988\,240\,28 \\ 0 & 0 & 3.068\,326\,68 \end{bmatrix}$$

y a partir de lo anterior,

$$B_2 = \begin{bmatrix} 10.879\,879\,88 & -0.796\,379\,19 & 0 \\ -0.796\,379\,19 & 5.447\,386\,64 & 1.507\,025\,00 \\ 0 & 1.507\,025\,00 & 2.672\,733\,48 \end{bmatrix}.$$

Se observa que los elementos fuera de la diagonal son algo menores en valor absoluto que los de B_1.
Tercer paso. Ahora se obtiene

$$R_2 = \begin{bmatrix} 10.908\,987\,40 & -1.191\,925\,04 & -0.110\,016\,02 \\ 0 & 5.581\,996\,06 & 2.168\,774\,94 \\ 0 & 0 & 2.167\,703\,93 \end{bmatrix}$$

y a partir de ésto,

$$B_3 = \begin{bmatrix} 10.966\,892\,94 & -0.407\,497\,54 & 0 \\ -0.407\,497\,54 & 5.945\,898\,56 & 0.585\,235\,81 \\ 0 & 0.585\,235\,82 & 2.987\,208\,51 \end{bmatrix}.$$

El lector debe comprobar que los eigenvalores de B son 11, 6, 2. Por tanto, la matriz dada A tiene el espectro 11, 6, 3, 2. ∎

Revisando el análisis anterior, se acepta que el propósito de aplicar al método de Householder antes que el método de factorización QR constituye una reducción sustancial de costo en cada factorización QR.

Mediante desplazamiento espectral (ver la sección 19.6) en cada paso puede lograrse **aceleración de la convergencia**, es decir, en vez de B_s se toma $B_s - k_sI$ con un k_s idóneo. Por ejemplo, si se toma $k_s = b_{nn}^{(s)}$ (el elemento en el ángulo inferior derecho de B_s), entonces en general lo anterior dará por resultado una disminución más rápida a 0 del otro elemento en el n-ésimo renglón de B_s, de modo que pronto es posible determinar un eigenvalor con suficiente exactitud y reducir el tamaño de la matriz en el trabajo subsecuente. (Ver la referencia [E26], pág. 510, para un análisis de otras elecciones de k_s.) Es justo mencionar que el método QR, precedido por la tridiagonalización de Householder, es el mejor método de propósito general para matrices simétricas conocido actualmente.

Ejemplo 3. Desplazamiento espectral en el método QR.

En el ejemplo 2 se tiene $b_{nn} = b_{33} = 6$, de modo que al aplicar desplazamiento espectral con $k_0 = b_{nn} = 6$ se obtiene la matriz

$$\hat{B}_0 = B - b_{33}I = B - 6I = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{18} & 0 \\ -\sqrt{18} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

A partir de esto se obtiene $(-\text{sen}\ \theta_2)\cdot 0 + (\cos\theta_2)(-\sqrt{18}) = 0$, $\cos\theta_2 = 0$, $\text{sen}\ \theta_2 = 1$ y

$$C_2\hat{B}_0 = \begin{bmatrix} -\sqrt{18} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{18} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

From this we get $(-\text{sen}\ \theta_3)\sqrt{18} + (\cos\theta_3)\sqrt{2} = 0$, por tanto,

$$\cos\theta_3 = 0.948\,683\,30, \qquad \text{sen}\ \theta_3 = 0.316\,227\,77$$

y

$$\hat{R}_0 = C_3C_2\hat{B}_0 = \begin{bmatrix} -4.242\,640\,69 & 1.000\,000\,00 & 1.414\,213\,56 \\ 0 & 4.472\,135\,96 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por tanto,

$$\hat{B}_1 = \hat{R}_0C_2^TC_3^T = \begin{bmatrix} 1.000\,000\,00 & 4.472\,135\,96 & 0 \\ 4.472\,135\,96 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lo anterior demuestra que 0 es un eigenvalor de $\hat{\mathbf{B}}_0$. Entonces, por el teorema 3 de la sección 19.6, se tiene que 6 es un eigenvalor de **B**.

Este resultado *no* es típico. Por lo general, sólo es de esperar que el elemento fuera de la diagonal en el n-ésimo renglón se vuelva rápidamente menor en los siguientes pasos.

El hecho de que ahora ya sea posible encontrar los otros eigenvalores de **B** a partir de una ecuación cuadrática es una consecuencia del pequeño tamaño de la matriz, que se eligió con este fin: no se aprende más trabajando con una matriz enorme. En la práctica, para una matriz más grande ahora se tendría que trabajar con el método QR (efectuando desplazamientos) según se aplica a una matriz de orden $n-1$. ■

Las matrices no simétricas **A** también pueden tratarse con el método QR. En vez de reducir **A** a forma tridiagonal, primero se reduce a una **matriz B superior de Hessenberg**, es decir, **B** puede tener elementos diferentes de cero sólo donde una matriz triangular superior o una matriz tridiagonal tenga tales elementos (ver la figura 421). Para más detalles al respecto, consultar las obras citadas en el apéndice 1 como referencias [E26] o [E27].

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & & * & * & * \\ & & & * & * \end{bmatrix}$$

Figura 421. Un matriz superior de Hessenberg de 5 × 5. Los espacios en blanco son ceros.

Problemas de la sección 19.10

Tridiagonalizar las siguientes matrices aplicando el método de Householder.

1. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 5 & 1 & 6 \\ 9 & 6 & 15 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

7. Realizar 1 paso del método QR para la matriz tridiagonal en la respuesta del problema 5.

8. Determinar los eigenvalores de la matriz del problema 2 aplicando el método QR a la matriz tridiagonalizada en la respuesta del problema 2.

9. Efectuar 1 paso del método QR (con desplazamiento espectral) para la matriz $\hat{\mathbf{B}}_0 = \mathbf{B}_0 - b_{33}\mathbf{I} = \mathbf{B}_0 + 4.46153846\mathbf{I}$, en donde $\mathbf{B}_0$ es la matriz en la respuesta del problema 5. Comparar con el resultado del problema 7 y hacer un comentario.

10. Aplicar otro paso del método QR con desplazamiento espectral a la matriz en la respuesta del problema 9. Aplicar el teorema de Gerschgorin al renglón 3 de la respuesta y usando la simetría de la matriz, encontrar un intervalo de inclusión y deducir a partir de éste que la matriz **A** dada en el problema 5 tiene un eigenvalor en el intervalo $-6.08 \le \lambda \le -5.92$. Comprobar directamente que $\lambda = -6$ es un eigenvalor de **A**.

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 19

1. ¿Qué es el pivoteo? ¿Cuándo debe aplicarse?
2. ¿Qué sucede si se aplica eliminación de Gauss a un sistema sin solución?
3. ¿Cómo se calcula la inversa de una matriz? ¿Este método es aceptable para resolver sistemas de ecuaciones? Explicar las respuestas.
4. El método de Gauss-Seidel, ¿es directo o indirecto? Explicar la respuesta.
5. ¿Para qué sistemas aplicaría un método indirecto de resolución?
6. ¿Cuál es la diferencia entre el método de Gauss-Seidel y el método de Jacobi? ¿Cuál es mejor?
7. ¿Qué sabe sobre la convergencia del método de Gauss-Seidel?
8. ¿Qué son las normas vectoriales y matriciales? ¿Cómo se usaron?
9. ¿Qué es un sistema mal acondicionado? ¿Qué haría para resolverlo?
10. ¿Un pequeño residuo indica gran exactitud de una solución aproximada? Explicar la respuesta.
11. ¿Cuál es la idea común a los métodos de Doolittle y de Crout? ¿Y la diferencia?
12. ¿Cuándo aplicaría el lector el método de Cholesky?
13. ¿Qué es el método de mínimos cuadrados? Proporcionar un ejemplo típico.
14. Escriba de memoria el teorema de Gerschgorin. ¿Puede el lector recordar su demostración?
15. ¿Puede el lector recordar cómo se hizo disminuir el tamaño de los círculos de Gerschgorin?
16. ¿Qué es una transformación de semejanza de una matriz y por qué es importante en el trabajo numérico?
17. ¿Cuál es el método de las potencias para eigenvalores? ¿Cuáles son sus ventajas y sus desventajas?
18. Escribir la desigualdad de Schur. ¿Para qué sirve?
19. ¿Qué es la tridiagonalización? ¿Cuándo la aplicaría el lector?
20. ¿Cuál es la idea fundamental del método QR? ¿Cuándo lo aplicaría el lector?

Resolver los siguientes sistemas lineales por eliminación de Gauss.

21. $$\begin{aligned} 2x_1 \quad\quad\quad + 3x_3 &= 15 \\ 4x_2 - x_3 &= -13 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 &= 26 \end{aligned}$$

22. $$\begin{aligned} 0.1x_1 + x_2 - 2x_3 &= -0.3 \\ 10x_1 - 3x_2 + 0.5x_3 &= 149.9 \\ -3x_1 + 4x_2 \quad\quad &= -44.2 \end{aligned}$$

23. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

24. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 3.5 \\ 2x_1 + 13x_2 + 23x_3 &= 13.0 \\ 4x_1 + 23x_2 + 77x_3 &= 6.0 \end{aligned}$$

25. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5.6 \\ 8x_1 + 5x_2 + 13x_3 &= 20.9 \\ 6x_1 + 3x_2 + 12x_3 &= 11.4 \end{aligned}$$

26. $$\begin{aligned} 4x_2 - 3x_3 &= 11.8 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 &= 34.2 \\ 6x_1 - 7x_2 + 2x_3 &= -3.1 \end{aligned}$$

27. Resolver el problema 23 por el método de Doolittle.
28. Resolver el problema 25 por el método de Doolittle.
29. Resolver el problema 23 por el método de Cholesky.
30. Resolver el problema 24 por el método de Cholesky.

Calcular la inversa de las siguientes matrices.

31. $\begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & -0.1 & 0.1 \\ -0.1 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$ **32.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 1.5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **33.** $\begin{bmatrix} 1.4 & -0.4 & -0.6 \\ 2.6 & 0.4 & -1.4 \\ -1.6 & -0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$

Aplicar la iteración de Gauss-Seidel a los siguientes sistemas. Efectuar tres pasos empezando desde 1, 1, 1.

34. $\begin{aligned} 10x_1 - x_2 + 2x_3 &= 38 \\ -x_1 + 15x_2 + 3x_3 &= 26 \\ 2x_1 + 3x_2 + 12x_3 &= 14 \end{aligned}$

35. $\begin{aligned} x_1 + 15x_2 - x_3 &= 11 \\ 10x_1 + 3x_2 \quad &= -17 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 &= 5 \end{aligned}$

36. $\begin{aligned} 4x_1 - x_2 \quad &= 5.5 \\ 4x_2 - x_3 &= 0.4 \\ -x_1 \quad + 4x_3 &= 11.2 \end{aligned}$

Calcular las normas l_1, l_2 y l de los vectores

37. $[0 \quad 4 \quad -8 \quad 3]^T$ **38.** $[3 \quad 8 \quad 11]^T$ **39.** $[-4 \quad 1 \quad 0 \quad 2]^T$

40. $[0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T$ **41.** $[5 \quad -2 \quad 7 \quad 0 \quad -8]^T$ **42.** $[0.3 \quad 1.4 \quad 0.2 \quad -0.6]^T$

Calcular la norma matricial correspondiente a la norma vectorial l para la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones en el

43. problema 24. **44.** problema 25. **45.** problema 26.

Calcular el número de condición (correspondiente a la norma vectorial l_1) de la matriz en el

46. problema 32. **47.** problema 31. **48.** problema 33.

49. Ajustar una recta por mínimos cuadrados a los datos (-2, 0.1), (0, 1.9), (2, 3.8), (4, 6.1), (6, 7.8).

50. Ajustar una parábola cuadrática por mínimos cuadrados a los datos (1, 9), (2, 5), (3, 4), (4, 5), (5, 7).

Para cada una de las siguientes matrices, encontrar tres discos circulares que deben contener a todos los eigenvalores.

51. $\begin{bmatrix} 11.4 & 2.0 & 0.6 \\ 2.0 & 14.4 & 1.2 \\ 0.6 & 1.2 & 14.6 \end{bmatrix}$ **52.** $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ **53.** $\begin{bmatrix} 10 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 3 \end{bmatrix}$

54. Aplicar el método de deflación de Wielandt a la matriz del problema 51, usando el hecho de que 16.4 es un eigenvalor.

55. Aplicar 4 pasos del método de las potencias a la matriz del problema 52, empezando desde $[1 \quad 1 \quad 1]^T$ y calcular los cocientes de Rayleigh y las cotas para el error.

Resumen del capítulo 19

Métodos numéricos en álgebra lineal

En este capítulo se estudiaron tres grandes clases de problemas numéricos que se presentan en álgebra lineal, a saber, la solución numérica de sistemas lineales (secciones 19.1 a 19.4), el ajuste de rectas o parábolas que pasan por datos específicos (representados como puntos en el plano; sección 19.5), y la solución numérica de problemas de eigenvalores (secciones 19.6 a 19.10).

Por tanto, en las secciones 19.1 a 19.4 se resolvieron sistemas $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, en donde $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ es una matriz de $n \times n$, escritos como

$$(1) \qquad \begin{aligned} E_1: &\quad a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ E_2: &\quad a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E_n: &\quad a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{aligned}$$

Existen dos tipos de métodos numéricos para llevar a cabo esta tarea: los **métodos directos**, como la eliminación de Gauss, en donde la cantidad de cálculos necesarios para obtener una solución puede especificarse de antemano, y los métodos **indirectos** o **iterativos**, como el método de Gauss-Seidel, en donde se empieza a partir de una aproximación (quizá burda) que se mejora paso a paso al ejecutar de manera repetida al mismo ciclo de cálculos, con datos cambiantes (ver a continuación).

La **eliminación de Gauss** (sección 19.1) es un proceso de eliminación sistemático que reduce (1) paso a paso a forma triangular. En el paso 1 se elimina x_1 de las ecuaciones E_2 hasta E_n restando $(a_{21}/a_{11})E_1$ de E_2, luego $(a_{31}/a_{11})E_1$ de E_3, etc. La ecuación E_1 se denomina **ecuación pivotal** en este paso y a_{11} se denomina **pivote**. En el paso 2 se toma la nueva segunda ecuación como ecuación pivotal y se elimina x_2, etc. Si se llega a la forma triangular, entonces x_n se obtiene a partir de la última ecuación, luego x_{n-1} se obtiene a partir de la penúltima ecuación, etc. El **pivoteo parcial** (= intercambio de ecuaciones) es *necesario* si los pivotes son cero, y *recomendable* en caso de que sean pequeños.

En las variantes de la eliminación de Gauss (**métodos de Doolittle, de Crout y de Cholesky**, sección 19.29 se usa la idea de factorizar

$$(2) \qquad \mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

(**L** es triangular inferior, **U** es triangular superior), haciendo $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ y luego resolviendo $\mathbf{Ax} = \mathbf{LUx} = \mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ resolviendo primero el sistema triangular $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ para $\mathbf{y}$ y después el sistema triangular $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ para $\mathbf{x}$.

Los métodos iterativos se obtienen al escribir $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ como

$$\mathbf{x} = \mathbf{b} - (\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x} \tag{3}$$

y luego sustituyendo aproximaciones en el miembro derecho a fin de obtener nuevas aproximaciones en el miembro izquierdo. En particular, en el **método de Gauss-Seidel** primero se divide cada ecuación para hacer $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$, y luego se escribe $\mathbf{A} = \mathbf{I} + \mathbf{L} + \mathbf{U}$, de modo que (3) se vuelve

$$\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{Lx} - \mathbf{Ux}$$

y siempre se toma la aproximación más reciente x_j en la derecha. Así se obtiene la fórmula de iteración (sección 19.3)

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{b} - \mathbf{Lx}^{(m+1)} - \mathbf{Ux}^{(m)}. \tag{4}$$

Si $\|\mathbf{C}\| < 1$, en donde

$$\mathbf{C} = -(\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U},$$

entonces este proceso converge. Aquí, $\|\mathbf{C}\|$ denota cualquier norma matricial (sección 19.3).

Si el **número de condición**

$$\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{A}^{-1}\|$$

de $\mathbf{A}$ es grande, entonces el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ está **mal acondicionado** (sección 19.4) y un pequeño **residuo**

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}$$

no implica que $\hat{\mathbf{x}}$ está próximo a la solución exacta.

En la sección 19.5 se analizó el ajuste por el método de **mínimos cuadrados** de un polinomio $p(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ que pasa por los datos específicos (puntos en el plano xy) $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$.

Un **eigenvalor** de una matriz $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ de $n \times n$ es un número λ tal que

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}, \quad \text{por tanto,} \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{5}$$

tiene una solución $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, denominada **eigenvector** de $\mathbf{A}$ correspondiente a tal λ. En la sección 19.6 se enumeraron hechos fundamentales sobre el problema de eigenvalores, que son necesarios en los métodos numéricos.

En la sección 19.7 se analizaron teoremas con los que se obtienen **conjuntos de inclusión** (conjuntos en el plano complejo λ que contienen a uno o varios eigenvalores de $\mathbf{A}$), especialmente el famoso **teorema de Gerschgorin**, que establece que el **espectro** (= conjunto de todos los eigenvalores) de $\mathbf{A}$ está en los n discos

$$|a_{jj} - \lambda| \leqq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} |a_{jk}| \qquad (j = 1, \cdots, n) \tag{6}$$

cuyos centros son $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ y cuyos radios están definidos por las sumas de la derecha.

El **método de las potencias** (sección 19.8) proporciona aproximaciones

$$q = \frac{(\mathbf{Ax})^{\mathsf{T}}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}} \qquad (\textit{Cociente de Rayleigh}), \tag{7}$$

usualmente al eigenvalor que tiene mayor valor absoluto y, si $\mathbf{A}$ es simétrica, cotas para los errores

$$|\epsilon| \leqq \sqrt{\frac{(\mathbf{Ax})^{\mathsf{T}}\mathbf{Ax}}{\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}} - q^2}. \tag{8}$$

Prácticamente, se elige cualquier vector $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$, se calculan los vectores

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{Ax}_0, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{Ax}_1, \quad \cdots, \quad \mathbf{x}_s = \mathbf{Ax}_{s-1},$$

y se toman

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{s-1} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{Ax} = \mathbf{x}_s$$

en (7) y (8).

Si se conoce un eigenvalor λ_1 de $\mathbf{A}$, es posible **deflactar** a $\mathbf{A}$, es decir, calcular una matriz $\mathbf{A}_1$ con eigenvalores $0, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ (sección 19.9).

Si se desea conocer a todos los eigenvalores de una matriz simétrica, entonces mejor que efectuar deflaciones repetidas es aplicar el **método QR** precedido de la **tridiagonalización de Householder** (sección 19.10). El método QR se basa en una factorización $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, en donde $\mathbf{Q}$ es ortogonal y $\mathbf{R}$ es triangular superior, así como en transformaciones de semejanza.

Capítulo

20

Métodos numéricos para ecuaciones diferenciales

Los métodos numéricos para ecuaciones diferenciales tienen gran importancia para el ingeniero y el físico porque, a menudo, los problemas prácticos conducen a ecuaciones diferenciales que no pueden resolverse mediante ninguno de los métodos presentados en los capítulos del 1 al 6 u otros semejantes, o bien, a ecuaciones para las que las soluciones en términos de fórmulas son tan complicadas que, con frecuencia, es preferible calcular una tabla de valores aplicando un método numérico a tales ecuaciones.

En este capítulo se presentarán métodos básicos para encontrar la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias (secciones 20.1-20.3), y ecuaciones diferenciales parciales (Secciones 20.4-20.7).

Las secciones 20.1, 20.2 y 20.3 también pueden estudiarse inmediatamente después de los capítulos 1 y 2, respectivamente, ya que son independientes de los capítulos 18 y 19.

Las secciones 20.4-20.7 también pueden estudiarse inmediatamente después del capítulo 11, en el supuesto de que el lector conozca algo de sistemas lineales de ecuaciones algebraicas.

Prerrequisito para las secciones 20.1-20.3: Secciones 1.1-1.7, 2.1-2.3.

Prerrequisito para las secciones 20.4-20.7: Secciones 11.1-11.3, 11.5 y 11.11.

Bibliografía: Apéndice 1, parte E (ver también las partes A y C).

Respuestas a los problemas: Apéndice 2.

20.1 MÉTODOS PARA ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Por lo estudiado en el capítulo 1, se sabe que una *ecuación diferencial de primer orden* es de la forma $F(x, y, y') = 0$ y, a menudo, será posible escribirla en la *forma explícita* $y' = f(x, y)$. Un **problema con valor inicial** consta de una ecuación diferencial

y de una condición que debe satisfacer la solución (o varias condiciones, referentes al mismo valor de x, si la ecuación es de orden superior). En esta sección se considerarán problemas con valor inicial de la forma

$$\boxed{y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0}$$

suponiendo que f es tal que el problema tiene una solución única sobre algún intervalo que contenga a x_0.

Se analizarán métodos para calcular valores numéricos de las soluciones, que se requieren en caso de que no se disponga de una fórmula para encontrar la solución de una ecuación o, en caso de contar con tal fórmula, ésta sea demasiado complicada como para tener una aplicación práctica.

Estos métodos son **paso a paso**, es decir, se empieza con un $y_0 = y(x_0)$ dado y se procede paso a paso, calculando valores aproximados de la solución $y(x)$ en los "*puntos de la malla*"

$$x_1 = x_0 + h, \qquad x_2 = x_0 + 2h, \qquad x_3 = x_0 + 3h, \qquad \cdots,$$

en donde el **tamaño del paso** h es un número fijo, por ejemplo 0.2 o 0.1 o 0.01, cuya elección se analizará más tarde en esta sección.

El cálculo en cada paso se efectúa aplicando la misma fórmula. Tales fórmulas son sugeridas por la serie de Taylor

$$(2) \qquad y(x + h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + \cdots .$$

Así, para un valor pequeño de h, las potencias más altas $h^2, h^3, \cdots$ son muy pequeñas. Lo anterior sugiere la mala aproximación

$$y(x + h) \approx y(x) + hy'(x) = y(x) + hf(x, y)$$

(en donde el miembro derecho se obtiene a partir de la ecuación diferencial dada) y el siguiente proceso de iteración. En el primer paso se calcula

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

que se aproxima a $y(x_1) = y(x_0 + h)$. En el segundo paso se calcula

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

que se aproxima a $y(x_2) = y(x_0 + 2h)$, etc., y en general

$$(3) \qquad \boxed{y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)} \qquad (n = 0, 1, \cdots).$$

Esto se denomina **método de Euler** o **método de Euler-C**… Geométricamente es una aproximación de la curva de $y(x)$ mediante un pol… primer lado es tangente a la curva en x_0 (ver la figura 422).

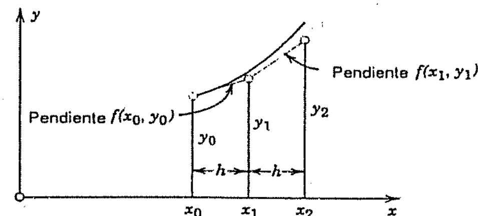


Figura 422. Método de Euler.

Este método rudimentario difícilmente se usa en la práctica, pero como es simple, funciona para explicar aceptablemente el principio de los métodos basados en la serie de Taylor.

El método de Euler es **de primer orden**, porque en (2) sólo se consideran los términos constantes y el término que contiene a la primera potencia de h. La omisión de los demás términos en (2) produce un error, denominado **error por truncamiento** del método. Para h pequeña, la tercera potencia y las potencias superiores de h son pequeñas en comparación con h^2 en el primer término despreciado en (2) y, en consecuencia, se dice que el **error por truncamiento por paso** (o el *error por truncamiento local*) es de **orden** h^2. Además, en este y en otros métodos existen **errores por redondeo** que pueden afectar la exactitud de los valores $y_1, y_2, \cdots$ más y más conforme n crece; en la siguiente sección se volverá a esta cuestión.

Tabla 20.1
Método de Euler aplicado a (4) en el ejemplo 1 y error

n	x_n	y_n	$0.2(x_n + y_n)$	Valores exactos	Error
0	0.0	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.2	0.000	0.040	0.021	0.021
2	0.4	0.040	0.088	0.092	0.052
3	0.6	0.128	0.146	0.222	0.094
4	0.8	0.274	0.215	0.426	0.152
5	1.0	0.489		0.718	0.229

Ejemplo 1. Método de Euler.

Aplicar el método de Euler al siguiente problema con valor inicial, eligiendo $h = 0.2$ y calculando $y_1, \cdots, y_5$:

$$(4) \qquad y' = x + y, \qquad y(0) = 0.$$

Solución. Aquí, $f(x, y) = x + y$, y se observa que (3) queda como

$$y_{n+1} = y_n + 0.2(x_n + y_n).$$

En la tabla 20-1 se muestran los cálculos, los valores de la solución exacta

$$y(x) = e^x - x - 1$$

obtenidos a partir de (4) en la sección 1.7, y el error. En la práctica se desconoce la solución exacta, pero puede obtenerse una indicación de la exactitud de los valores aplicando el método de Euler una vez más con paso $2h = 0.4$ y comparando las aproximaciones correspondientes. Este cálculo es:

x_n	y_n	$0.4(x_n + y_n)$	y_n en la tabla 20.1	Diferencia
0.0	0.000	0.000	0.000	0.000
0.4	0.000	0.160	0.040	0.040
0.8	0.160		0.274	0.114

Como el error es de orden h^2, en un cambio de h a $2h$ es multiplicado por $2^2 = 4$, pero como entonces se requiere sólo la mitad de pasos que antes, el error solamente se multiplica por $4/2 = 2$. Así, la diferencia $2\varepsilon_2 - \varepsilon_2 = 0.040$ indica el error $\dot{\mathrm{I}}_2$ de y_2 en la tabla 20.1 (que en realidad es 0.052), y 0.114 del error de y_4 (real: 0.152). ∎

Método de Euler mejorado (Método de Heun)

Si en (2) se toman en cuenta más términos, se obtienen métodos numéricos de mayor orden y precisión. Pero existe un problema práctico. Si se sustituye $y' = f(x, y(x))$ en (2), se obtiene

(2*) $$y(x + h) = y(x) + hf + \tfrac{1}{2}h^2 f' + \tfrac{1}{6}h^3 f'' + \cdots$$

en donde, como y en f depende de x,

$$f' = f_x + f_y y' = f_x + f_y f$$

y las demás derivadas f'', f''' se vuelven todavía mucho más engorrosas. Ahora la ***estrategia general*** es evitar el cálculo de tales derivadas y sustituirlas calculando f para uno o varios valores auxiliares de (x, y) elegidos idóneamente, en donde el término "idóneamente" significa que se eligen a fin de hacer lo más alto posible el orden del método (que tenga gran exactitud). A continuación se analizarán dos de tales métodos que revisten importancia práctica.

El primer método se denomina **método de Euler mejorado** o **método de Euler-Cauchy mejorado** (algunas veces también se denomina **método de Heun**). En cada paso de este método primero se calcula el valor auxiliar

(5a) $$\boxed{y^*_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)}$$

y luego se calcula el nuevo valor

(5b) $$\boxed{y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{2}h[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y^*_{n+1})].}$$

Este método tiene una interpretación geométrica sencilla. De hecho, es posible afirmar que en el intervalo de x_n a $x_n + 1/2h$ la solución y es aproximada por la recta que pasa por (x_n, y_n) con pendiente $f(x_n, y_n)$, y luego se continúa a lo largo de la recta con pendiente $f(x_{n+1}, y^*_{n+1})$ hasta que x llega a x_{n+1} (ver la figura 423, en donde $n = 0$).

El método de Euler-Cauchy mejorado es un **método predictor-corrector**, porque en cada paso primero se predice un valor mediante (5a) y luego se corrige mediante (5b).

En forma algorítmica, usando las notaciones $k_1 = hf(x_n, y_n)$ en (5a) y $k_2 = hf(x_{n+1}, y^*_{n+1})$ en (5b), este método puede escribirse como se muestra en la tabla 20.2.

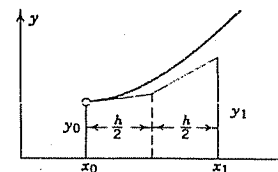


Figura 423. Método de Euler mejorado.

Tabla 20.2
Método de Euler mejorado (método de Heun)

ALGORITMO EULER (f, x_0, y_0, h, N)

Este algoritmo calcula la solución del problema con valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(y_0) = y_0$ en puntos equidistantes $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, $\cdots$, $x_N = x_0 + Nh$; aquí, f es tal que este problema tiene una solución única en el intervalo $[x_0, x_N]$ (ver la sección 1.11).

ENTRADA: Valores iniciales x_0, y_0, tamaño del paso h, número de pasos N

SALIDA: Aproximación y_{n+1} de la solución $y(x_{n+1})$ en $x_{n+1} = x_0 + (n + 1)h$, en donde $n = 0, \cdots, N - 1$

Para $n = 0, 1, \ldots, N - 1$, ejecutar:

$$x_{n+1} = x_n + h$$
$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$
$$k_2 = hf(x_{n+1}, y_n + k_1)$$
$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

SALIDA: x_{n+1}, y_{n+1}

Fin

Detener el proceso

Fin de EULER

Ejemplo 2. Método de Euler mejorado.

Aplicar el método de Euler mejorado al problema con valor inicial (4), eligiendo $h = 0.2$, como antes.

Solución. Para este problema,

$$k_1 = 0.2(x_n + y_n)$$
$$k_2 = 0.2(x_n + 0.2 + y_n + 0.2(x_n + y_n))$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{0.2}{2}(2.2x_n + 2.2y_n + 0.2)$$
$$= y_n + 0.22(x_n + y_n) + 0.02.$$

En la tabla 20.3 se observa que los resultados presentes son más exactos que los del ejemplo 1; ver también la tabla 20-6. ∎

Tabla 20.3
Método de Euler aplicado a (4) y error

n	x_n	y_n	$0.22(x_n + y_n) + 0.02$	Valores exactos	Error
0	0.0	0.0000	0.0200	0.0000	0.0000
1	0.2	0.0200	0.0684	0.0214	0.0014
2	0.4	0.0884	0.1274	0.0918	0.0034
3	0.6	0.2158	0.1995	0.2221	0.0063
4	0.8	0.4153	0.2874	0.4255	0.0102
5	1.0	0.7027		0.7183	0.0156

El método de Euler mejorado es un **método de segundo orden**, *porque el error por truncamiento por paso es de orden* h^3.

Demostración. Al hacer $\tilde{f}_n = f(x_n, y(x_n))$ y aplicar (2*) se obtiene

$$y(x_n + h) - y(x_n) = h\tilde{f}_n + \tfrac{1}{2}h^2\tilde{f}'_n + \tfrac{1}{6}h^3\tilde{f}''_n + \cdots. \tag{6a}$$

Al aproximar la expresión entre corchetes en (5b) por $\tilde{f}_n + \tilde{f}_{n+1}$ y usando de nuevo el desarrollo de Taylor, a partir de (5b) se obtiene

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &\approx \tfrac{1}{2}h[\tilde{f}_n + \tilde{f}_{n+1}] \\ &= \tfrac{1}{2}h[\tilde{f}_n + (\tilde{f}_n + h\tilde{f}'_n + \tfrac{1}{2}h^2\tilde{f}''_n + \cdots)]. \end{aligned} \tag{6b}$$

Al restar (6a) de (6b) se obtiene el error por truncamiento por paso

$$\frac{h^3}{4}\tilde{f}''_n - \frac{h^3}{6}\tilde{f}''_n + \cdots = \frac{h^3}{12}\tilde{f}''_n + \cdots.$$

Así se demuestra la afirmación. ∎

Elección del tamaño de paso. Ésta es una cuestión importante en cualquier método paso a paso. h no debe ser demasiado pequeño, a fin de evitar excesivamente muchos pasos y la correspondiente acumulación del error por redondeo. Pero h no debe ser tampoco demasiado grande, a fin de evitar un gran error por truncamiento por paso y un error adicional, denominado φ_n, provocado por la evaluación de f en (x_n, y_n) en vez de en $(x_n, y(x_n))$. Así, φ_n sería cero si f fuera independiente de y; por tanto, es importante que f varíe con y lo más rápido posible, es decir, que el valor absoluto de la derivada parcial $f_y = \partial f/\partial y$ sea lo más grande posible. Mas precisamente, por la definición de φ_n y por el teorema del valor medio se obtiene

$$\varphi_n = f(x_n, y(x_n)) - f(x_n, y_n) = f_y(x_n, \tilde{y})\eta_n$$

en donde $\eta_n = y(x_n) - y_n$ es el error de y_n y $\tilde{y}$ está entre $y(x_n)$ y y_n. Por tanto, la contribución de φ_n al error de y_{n+1} es aproximadamente $h\varphi_n = hf_y(x_n, \tilde{y})\eta_n$. Lo anterior

sugiere tomar una cota superior K de $|f_y|$ próxima en la región de interés, y elegir h de modo que

$$\kappa = hK$$

no sea demasiado grande. Se observa que si $|f_y|$ es grande (fuerte dependencia de f con respecto a y), entonces K es grande y h debe ser pequeño, lo cual es comprensible. (En los ejemplos 1 y 2, $f_y = 1$, $K = 1$, $hK = 0.2$.) Si f_y varía mucho, entonces es posible elegir una cota superior próxima K_n de $|f_y(x_n, \tilde{y})|$ y elegir dos o inclusive tres valores diferentes de h en regiones distintas, a fin de mantener

$$\kappa_n = hK_n$$

dentro de cierto intervalo (por ejemplo, $0.05 \leq \kappa_n \leq 0.1$), que depende de la exactitud deseada; por supuesto, debido al error por truncamiento por paso, no es posible dejar que h crezca más allá de un cierto valor.

Método de Runge-Kutta

Un método aún más exacto que reviste gran importancia práctica es el **método de Runge-Kutta**,[1] que se muestra en la tabla 20.4. Se observa que en cada paso primero se calculan cuatro cantidades auxiliares k_1, k_2, k_3, k_4 y luego se calcula el nuevo valor y_{n+1}. Estas fórmulas parecen complicadas a primera vista, aunque de hecho son muy fáciles de programar.

Puede demostrarse que el error por truncamiento por paso es de orden h^5 (consultar la obra citada como referencia [E2] en el apéndice 1) y el método es, en consecuencia, de cuarto orden.

Observe que si f depende sólo de x, entonces este método se reduce a la regla de integración de Simpson (sección 18.5).

En cálculos manuales, el cálculo frecuente de $f(x, y)$ es laborioso. En una computadora esto no importa mucho, y el método es bastante idóneo porque no requiere ningún procedimiento de inicio especial, demanda poco espacio para almacenamiento, no requiere estimación y utiliza repetidamente el mismo procedimiento de cálculo directo.

Ejemplo 3. Método de Runge-Kutta.

Aplicar el método de Runge-Kutta al problema con valor inicial (4) del ejemplo 1, eligiendo $h = 0.2$, como antes, y calcular cinco pasos.

[1] Denominado así en honor de los matemáticos alemanes CARL DAVID TOLMÉ RUNGE (1856-1927), profesor de matemáticas aplicadas en Gotinga, y WILHELM KUTTA (1867-1944).

Sin mucha justificación histórica, el método de Euler mejorado algunas veces se denomina **método de Runge-Kutta de segundo orden**. El método de Runge-Kutta analizado aquí suele denominarse **método de Runge-Kutta de cuarto orden** porque existen métodos de Runge-Kutta de grado aún más elevado basados en el mismo principio de sustituir el cálculo de las derivadas por el cálculo de valores auxiliares (valores de f en ciertos puntos). Para más detalles, consultar la obra citada en el apéndice 1 como referencia [E2].

Tabla 20.4
Método de Runge-Kutta (de cuarto orden)

ALGORITMO RUNGE-KUTTA (f, x_0, y_0, h, N).

Este algoritmo calcula la solución del problema con valor inicial $y' = f(x, y)$; $y(x_0) = y_0$ en puntos equidistantes

$$x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \cdots, x_N = x_0 + Nh;$$

aquí, f es tal que este problema tiene una solución única en el intervalo $[x_0, x_N]$ (ver la sección 1.11).

ENTRADA: Valores iniciales x_0, y_0, tamaño del paso h, número de pasos N

SALIDA: Aproximación y_{n+1} de la solución $y(x_{n+1})$ en $x_{n+1} = x_0 + (n+1)h$, en donde $n = 0, \cdots, N-1$

Para $n = 0, 1, \cdots, N-1$, ejecutar:

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$
$$k_2 = hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}k_1)$$
$$k_3 = hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}k_2)$$
$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$
$$x_{n+1} = x_n + h$$
$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

SALIDA: x_{n+1}, y_{n+1}

Fin

Detener el proceso

Fin de RUNGE-KUTTA

Solución. Para este problema se tiene $f(x, y) = x + y$. Por tanto,

$$k_1 = 0.2(x_n + y_n), \qquad k_2 = 0.2(x_n + 0.1 + y_n + 0.5k_1),$$
$$k_3 = 0.2(x_n + 0.1 + y_n + 0.5k_2), \qquad k_4 = 0.2(x_n + 0.2 + y_n + k_3).$$

Debido a que las expresiones anteriores son bastante simples, se encuentra conveniente insertar k_1 en k_2, con lo que se obtiene $k_2 = 0.22(x_n + y_n) + 0.02$, que se inserta en k_3, con lo que se encuentra $k_3 = 0.222(x_n + y_n) + 0.022$, y finalmente ésto se inserta en k_4, con lo que se encuentra $k_4 = 0.2444(x_n + y_n) + 0.0444$. Si se usan estas expresiones, la fórmula para y_{n+1} en la tabla 20.4 se vuelve

$$y_{n+1} = y_n + 0.2214(x_n + y_n) + 0.0214. \tag{7}$$

Por supuesto, este proceso de inserción ***no es típico*** del método de Runge-Kutta, por lo que en general no debe intentarse. En la tabla 20.5 se muestran los cálculos. Con base en la tabla 20.6 se observa que los valores son mucho más exactos que los de los ejemplos 1 y 2. ∎

Tabla 20.5
Método de Runge-Kutta aplicado a (4); cálculos mediante el uso de (7)

n	x_n	y_n	$0.2214(x_n + y_n) + 0.0214$	Valores exactos $y = e^x - x - 1$	$10^6 \times$ Error de y_n
0	0.0	0	0.021 400	0.000 000	0
1	0.2	0.021 400	0.070 418	0.021 403	3
2	0.4	0.091 818	0.130 289	0.091 825	7
3	0.6	0.222 107	0.203 414	0.222 119	11
4	0.8	0.425 521	0.292 730	0.425 541	20
5	1.0	0.718 251		0.718 282	31

Tabla 20.6
Comparación de la exactitud de los tres métodos que se están considerando en el caso del problema con valor inicial (4), con $h = 0.2$

x	$y = e^x - x - 1$	Error		
		Método de Euler (Tabla 20.1)	Euler mejorado (Tabla 20.3)	Runge–Kutta (Tabla 20.5)
0.2	0.021 403	0.021	0.0014	0.000 003
0.4	0.091 825	0.052	0.0034	0.000 007
0.6	0.222 119	0.094	0.0063	0.000 011
0.8	0.425 541	0.152	0.0102	0.000 020
1.0	0.718 282	0.229	0.0156	0.000 031

Tamaño de paso h. El tamaño de paso h no debe ser mayor que cierto valor H, que depende de la exactitud deseada, y que en todo caso debe ser tal que

$$\kappa = hK \qquad (K \text{ es una cota superior próxima de } |\partial f / \partial y|)$$

esté aproximadamente entre 0.01 y 0.05; esta situación es semejante al caso ya analizado del método de Euler mejorado.

Una de las ventajas del método de Runge-Kutta es que permite **controlar** h por medio de k_1, k_2, k_3, ya que a partir de la definición de f_y se tiene

$$\kappa = hK \approx h|f_y| \approx h\left|\frac{f(x, y^*) - f(x, y^{**})}{y^* - y^{**}}\right|,$$

y si en el numerador se elige

$$hf(x, y^*) = k_3 = hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}k_2), \text{ por tanto, } y^* = y_n + \tfrac{1}{2}k_2,$$
$$hf(x, y^{**}) = k_2 = hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}k_1), \text{ por tanto, } y^{**} = y_n + \tfrac{1}{2}k_1,$$

entonces en el denominador se tiene $y^* - y^{**} = 1/2(k_2 - k_1)$, con lo que se obtiene la fórmula deseada para κ en términos de las cantidades calculadas,

$$\kappa \approx 2 \left| \frac{k_3 - k_2}{k_2 - k_1} \right|. \tag{8}$$

Ahora ya es posible tomar precauciones para dejar sin cambio a h si, por ejemplo $0.01 \leqq \kappa_n \leqq 0.05$, disminuir h por 50% si $\kappa_n > 0.05$ y duplicar h si $\kappa_n < 0.01$ (en caso de que la duplicación sea posible sin incrementar h más allá de un número H, elegido de manera idónea, que depende de la exactitud deseada).

Otro control de h resulta al ejecutar el cálculo simultáneamente con el paso $2h$, lo cual corresponde a incrementar el error por truncamiento por paso por un factor $2^5 = 32$, pero como el número de paso disminuye, entonces el incremento real es por un factor de $2^5/2 = 16$. Así, el error ϵ de una aproximación $\tilde{y}$ obtenida con un paso h es aproximadamente igual a 1/15 multiplicado por la diferencia $\delta = \tilde{y} - \tilde{\tilde{y}}$ de las aproximaciones correspondientes obtenidas con los pasos h y $2h$, respectivamente.

$$\epsilon \approx \frac{1}{15}(\tilde{y} - \tilde{\tilde{y}}). \tag{9}$$

Ahora es posible elegir un número ϵ (por ejemplo, 1 unidad del último dígito que se supone significativo) y dejar sin cambio a h si $0.2\,\epsilon \leqq |\delta| \leqq 10\,\epsilon$, disminuir h por 50% si $|\delta| > 10\epsilon$ y duplicar h si $|\delta| < 0.2\,\epsilon$; por supuesto, al duplicar es necesario tener cuidado en que el paso no se vuelva más grande que un número idóneo H; esto es como antes.

A continuación se ilustrará la estimación del error (9) con un ejemplo sencillo.

Ejemplo 4. Método de Runge-Kutta (de cuarto orden), estimación del error.

Resolver el problema con valor inicial

$$y' = (y - x - 1)^2 + 2, \qquad y(0) = 1$$

aplicando el método de Runge-Kutta para $0 \leqq x \leqq 0.4$ con paso $h = 0.1$ y calcular el error usando (9).

Solución. En la tabla 20-7 se muestran los resultados numéricos. Ahí también se muestra cómo la exactitud aumenta con la disminución del paso (de $2h = 0.2$ a $h = 0.1$). Las estimaciones del error (9) están próximas al error verdadero. Aunque no siempre puede esperarse ésto, la fórmula (9) ciertamente proporciona información sobre el orden de magnitud del error. ∎

Tabla 20.7
Método de Runge-Kutta aplicado al problema con valor inicial del ejemplo 4 y estimación del error

x	$\tilde{y}$ (Paso h)	$\tilde{\tilde{y}}$ (Paso $2h$)	Estimación del error (9)	Error real	Solución exacta (9D)
0.0	1.000 000 000	1.000 000 000	0.000 000 000	0.000 000 000	1.000 000 000
0.1	1.200 334 589			0.000 000 083	1.200 334 672
0.2	1.402 709 878	1.402 707 341	0.000 000 181	0.000 000 157	1.402 710 036
0.3	1.609 336 039			0.000 000 210	1.609 336 250
0.4	1.822 792 993	1.822 788 917	0.000 000 291	0.000 000 226	1.822 793 219

Puede demostrarse que los métodos analizados en esta sección son *numéricamente estables* (definición en la sección 18.1). Se trata de **métodos de un paso** porque en cada paso se usan los datos de exactamente uno de los pasos precedentes, en contraste con los **métodos de pasos múltiples**, en los que en cada paso se usan los datos de varios pasos precedentes, como se verá en la siguiente sección.

Problemas de la sección 20.1

Aplicar el método de Euler a los siguientes problemas con valor inicial. Ejecutar 10 pasos. Resolver el problema exactamente. Calcular los errores.

1. $y' = y$, $y(0) = 1$, $h = 0.1$
2. $y' = y$, $y(0) = 1$, $h = 0.01$
3. $y' + 5x^4y^2 = 0$, $y(0) = 1$, $h = 0.1$
4. $y' = (y + x)^2$, $y(0) = 0$, $h = 0.1$

Aplicar el método de Euler mejorado a los siguientes problemas con valor inicial. Ejecutar 10 pasos con $h = 0.1$. Resolver el problema exactamente. Calcular los errores.

5. $y' = y$, $y(0) = 1$
6. $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$
7. $y' + y \tan x = \operatorname{sen} 2x$, $y(0) = 1$
8. $y' = y - y^2$, $y(0) = 0.5$

Aplicar el método de Runge-Kutta (de cuarto orden) a los siguientes problemas con valor inicial. Ejecutar 5 pasos con $h = 0.2$. Resolver el problema exactamente. Calcular los errores.

9. $y' = xy$, $y(0) = 1$
10. $y' = y - y^2$, $y(0) = 0.5$
11. $y' = (1 + x^{-1})y$, $y(1) = e$
12. $y' = \frac{1}{2}(y/x - x/y)$, $y(2) = 2$

13. Aplicar el método de Euler y el método de Euler mejorado con $h = 0.1$ y 10 pasos al problema con valor inicial $y' = 2 - 2y$, $y(0) = 0$ y determinar y comparar los errores.

14. Aplicar el método de Runge-Kutta con $h = 0.1$ y 10 pasos al problema 13 y determinar y comparar los errores con los del problema 13.

15. Resolver $y' = 2x^{-1}\sqrt{y - \ln x} + x^{-1}$, $y(1) = 0$ para $1 \leqq x \leqq 1.8$ aplicando el método de Euler con $h = 0.1$. Comprobar que la solución exacta es $y = (\ln x)^2 + \ln x$ y calcular el error.

16. Resolver el problema 15 aplicando el método de Euler mejorado con $h = 0.2$, determinar el error, compararlo con el problema 15 y hacer un comentario. Observar que es una comparación justa porque aquí se evaluó $f(x, y)$ ocho veces (4 pasos con 2 evaluaciones cada uno), como en el problema 15.

17. Resolver el problema 15 aplicando el método de Runge-Kutta con $h = 0.4$, determinar el error y compararlo con el problema 15. (Observar que estos 2 pasos de Runge-Kutta requieren 8 evaluaciones de $f(x, y)$, tantas como en el problema 15.)

18. Resolver el problema 15 aplicando el método de Runge-Kutta con $h = 0.1$ y comparar el error con el del problema 15.

19. Otro método del tipo de Euler-Cauchy está dado por

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \tfrac{1}{2}h,\ y^*_{n+1}),$$

en donde $y^*_{n+1} = y_n + 1/2hf(x_n, y_n)$. Proporcionar una motivación geométrica de este método. Aplicarlo a (4) con $h = 0.2$ y calcular 5 pasos.

20. El **método de Kutta de tercer orden** está definido por

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3^*)$$

en donde k_1 y k_2 son como en la tabla 20-4 y $k_3^* = hf(x_{n+1}, y_n - k_1 + 2k_2)$. Aplicar este método a (4) en el ejemplo 1. Elegir $h = 0.2$ y ejecutar 5 pasos. Comparar el resultado con la tabla 20-6.

20.2 MÉTODOS DE PASOS MÚLTIPLES

Un **método de un paso** es un método en el que en cada paso se usan exclusivamente los valores obtenidos en un solo paso, a saber, en el paso precedente. Ejemplos de este tipo de método son el de Runge-Kutta y todos los demás métodos presentados en la última sección. En contraste, un método en el que se usan valores de más de un paso precedente se denomina **método de pasos múltiples**. A continuación se explicará la idea de obtener tales métodos en términos de la obtención del **método de Adams-Moulton**, que reviste gran importancia práctica. El problema con valor inicial es como antes

$$(1) \qquad y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

en donde se supone que f es tal que el problema tiene una solución única en algún intervalo que contiene a x_0, así como a todos los valores x a los cuales se calcularán valores aproximados de la solución.

Método de Adams-Bashford

Al integrar la ecuación diferencial (1) desde x_n hasta $x_{n+1} = x_n + h$, se obtiene

$$(2) \qquad \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\, dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)\, dx = y(x_{n+1}) - y(x_n).$$

La notación es como antes; en particular, $x_n = x_0 + nh$ y y_n denota un valor aproximado de $y(x_n)$. En (2), f se sustituye por un polinomio de interpolación $p_3(x)$ de tercer grado, de modo que sea posible integrar después. Para $p_3(x)$ se toma el polinomio que en $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}$ asume los valores

$$(3) \qquad f_n = f(x_n, y_n), \quad f_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1}), \quad f_{n-2} = f(x_{n-2}, y_{n-2}), \quad f_{n-3} = f(x_{n-3}, y_{n-3}),$$

respectivamente. (En realidad, es posible tomar un polinomio de grado superior, aunque en la práctica suele usarse uno cúbico.) $p_3(x)$ puede obtenerse, por ejemplo, a partir de la fórmula con diferencias hacia atrás (18) de Newton, sección 18.3:

$$p_3(x) = f_n + r\nabla f_n + \tfrac{1}{2}r(r+1)\nabla^2 f_n + \tfrac{1}{6}r(r+1)(r+2)\nabla^3 f_n$$

en donde $r = (x - x_n)/h$. $p_3(x)$ se integra sobre x desde x_n hasta $x_{n+1} = x_n + h$, y por tanto sobre r desde 0 hasta 1. Como $x = x_n + hr$, se tiene $dx = h\, dr$. La integral de $1/2r(r+1)$ es 5/12, y la de $1/6r(r+1)(r+2)$ es 3/8. Por tanto, se obtiene

$$(4) \qquad \int_{x_n}^{x_{n+1}} p_3\, dx = h\int_0^1 p_3\, dr = h\left(f_n + \frac{1}{2}\nabla f_n + \frac{5}{12}\nabla^2 f_n + \frac{3}{8}\nabla^3 f_n\right).$$

Resulta práctico sustituir estas diferencias por sus expresiones en términos de f:

$$\nabla f_n = f_n - f_{n-1}$$
$$\nabla^2 f_n = f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}$$
$$\nabla^3 f_n = f_n - 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-3}.$$

Lo anterior se sustituye en (4) y se agrupan términos. Por (2), entonces se obtiene la fórmula de pasos múltiples del **método de Adams-Bashford,**

$$(5) \qquad y^*_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}).$$

Este método expresa el nuevo valor y^*_{n+1} [aproximación a la solución y de (1) en x_{n+1}] en términos de 4 valores de f calculados a partir de los valores y obtenidos en los 4 pasos precedentes. ¿Qué sucede con respecto al principio? Esperar y observar.

Método de Adams-Moulton

En (5) se escribió y^*_{n+1}, en vez de la y_{n+1} usual, porque se desea extender el método, usando (5) como un predictor y otra fórmula [(6), a continuación] como corrector. Un corrector se obtiene mediante la misma idea de integrar un polinomio cúbico hacia atrás de Newton $\tilde{p}_3(x)$, que en $x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, x_{n-2}$, es igual a $f_{n+1}, f_n, f_{n-1}, f_{n-2}$, respectivamente; aquí,

$$f_{n+1} = f(x_{n+1}, y^*_{n+1})$$

y las otras f son como en (3). La obtención es bastante semejante a la de (5). En efecto,

$$\tilde{p}_3(x) = f_{n+1} + r\nabla f_{n+1} + \tfrac{1}{2}r(r+1)\nabla^2 f_{n+1} + \tfrac{1}{6}r(r+1)(r+2)\nabla^3 f_{n+1}$$

en donde $r = (x - x_{n+1})/h$. Se integra sobre x desde x_n hasta x_{n+1} como antes. Esto corresponde ahora a integrar sobre r desde -1 hasta 0. Se obtiene

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \tilde{p}_3(x)\, dx = h\left(f_{n+1} - \frac{1}{2}\nabla f_{n+1} - \frac{1}{12}\nabla^2 f_{n+1} - \frac{1}{24}\nabla^3 f_{n+1}\right).$$

Al expresar las diferencias en términos de los valores de f como antes, finalmente se llega a la fórmula correctora

$$(6) \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f^*_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})$$

en donde $f^*_{n+1} = f(x_{n+1}, y^*_{n+1})$ y las otras f son como en (3). El método predictor-corrector (5), (6) se denomina **método de Adams-Moulton**. El programa puede suministrar la aplicación repetida del corrector para un valor fijo n, por ejemplo, hasta que la diferencia relativa de valores sucesivos (para el mismo n) se vuelva, en valor absoluto, menor que un número positivo preasignado pequeño.

Inicio del método. Mientras que los métodos de un paso son "*autoiniciables*" (no requieren de datos iniciales diferentes de la condición inicial dada), los métodos de pasos múltiples no lo son. Esta es una cuestión importante, ¡y una desventaja! En (5) se requieren f_0, f_1, f_2, f_3; así, por (3), primero es necesario calcular y_1, y_2, y_3 aplicando algún otro método, por ejemplo, el de Runge-Kutta (a fin de obtener gran exactitud). Pero la ventaja de (5), (6) es que es más rápido que el método de Runge-Kutta porque ahora sólo es necesario calcular dos nuevos valores de f por paso, en contraste con los cuatro valores que deben calcularse en cada paso del método de Runge-Kutta. Puede demostrarse que este método es de cuarto orden, como el método de Runge-Kutta, y que es **numéricamente estable**.

Además, los métodos correctores-predictores tienen la ventaja de que proporcionan una estimación del error. Específicamente, un $|y_n - y^*_n|$ elevado indica que el error de y_n es probablemente grande en valor absoluto y demanda una reducción de h. Por otra parte, si $|y_n - y^*_n|$ es muy pequeño, entonces es posible aumentar h, por ejemplo, duplicándolo. (Para más detalles, consultar la obra citada en el apéndice 1 como referencia [E13], págs. 388-393.)

Ejemplo 1. Método de Adams-Moulton.

Resolver el problema con valor inicial

$$(7) \qquad y' = x + y, \qquad y(0) = 0$$

aplicando el método de Adams-Moulton sobre el intervalo $0 \leq x \leq 2$, eligiendo $h = 0.2$.

Solución. El problema es el mismo que en los ejemplos 1 a 3 de la sección 20.1, de modo que pueden compararse los resultados. Se calculan los valores de partida y_1, y_2, y_3 aplicando el método de Runge-Kutta. Luego, en cada paso se predice con (5) y se hace una corrección usando (6) antes de ejecutar el paso siguiente. En la tabla 20-8 se muestran los resultados y se comparan con los valores exactos. Se observa que las correcciones mejoran considerablemente la exactitud. Este hecho es común. ∎

Aquí termina el análisis de los métodos para ecuaciones diferenciales de primer orden. En la siguiente sección se abordarán las ecuaciones diferenciales de **segundo orden**.

Problemas de la sección 20.2

Resolver los siguientes problemas con valor inicial aplicando el método de Adams-Moulton (10 pasos, 1 corrección por paso). Calcular los errores usando la solución exacta. (Los valores de partida iniciales deben ser de utilidad para dedicar todo el tiempo al nuevo método. Aplicar el método de Runge-Kutta en donde no se proporcionen tales valores.)

$$y' = x + y, \qquad y(0) = 0$$

Tabla 20.8
Método de Adams-Moulton aplicado al problema con valor inicial (7); valores predichos calculados con (5) y valores corregidos con (6)

n	x_n	y_n de inicio	y_n predicho	y_n corregido	Valores exactos	$10^6 \times$ Error de y_n
0	0.0	0.000 000			0.000 000	0
1	0.2	0.021 400			0.021 403	3
2	0.4	0.091 818			0.091 825	7
3	0.6	0.222 107			0.222 119	12
4	0.8		0.425 361	0.425 529	0.425 541	12
5	1.0		0.718 066	0.718 270	0.718 282	12
6	1.2		1.119 855	1.120 106	1.120 117	11
7	1.4		1.654 885	1.655 191	1.655 200	9
8	1.6		2.352 653	2.353 026	2.353 032	6
9	1.8		3.249 190	3.249 646	3.249 647	1
10	2.0		4.388 505	4.389 062	4.389 056	−6

6. Resolver la ecuación del problema 5 exactamente y determinar la razón de la restricción hasta 7 pasos.
7. Escribir los detalles de los cálculos con que se obtienen (5) y (6).
8. Para aplicar el método de Adams-Moulton es importante contar con valores de partida exactos. Ilustrar este hecho sustituyendo los valores de partida en el ejemplo 1 por los valores correspondientes que se obtienen al aplicar el método de Euler-Cauchy mejorado, calculando y para $x = 0.8$, 1.0 con 1 corrección por paso, y comparar los resultados con los de la tabla 20.8
9. Demostrar que al aplicar el método presentado en el texto a un polinomio de segundo grado se obtienen las fórmulas predictora-correctora

$$y^*_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}).$$

10. Aplicar el método del problema 9 con $h = 0.2$ al problema con valor inicial $y' = x + y$, $y(0) = 0$; ejecutar 5 pasos y comparar el resultado con los valores exactos.
11. Aplicar el método del problema 9 con $h = 0.1$, 10 pasos, al problema con valor inicial $y' = 2xy$, $y(0) = 1$, usando los valores de partida de Runge-Kutta. Comparar con la solución exacta.
12. Aplicar el método del problema 9 con $h = 0.2$, 5 pasos, al problema con valor inicial del problema 5. Comparar con la solución exacta.

20.3 MÉTODOS PARA ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

Esta sección también puede estudiarse inmediatamente después del capítulo 2, ya que es independiente de las secciones precedentes sobre métodos numéricos de los capítulos 18-20.

Un **problema con valor inicial** para una ecuación diferencial de segundo orden consta de tal ecuación y dos condiciones (*condiciones iniciales*) que se refieren al mismo punto. En esta sección se considerarán dos métodos numéricos para resolver problemas con valor inicial de la forma

$$y'' = f(x, y, y'). \qquad y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_0' \tag{1}$$

suponiendo que f es tal que el problema tiene una solución única en algún intervalo que contiene a x_0, así como a los valores x en los cuales se desea calcular valores aproximados de la solución. El primer método es sencillo (aunque inexacto) y sirve para ilustrar el principio, mientras que el segundo es de gran precisión e importancia práctica.

En ambos métodos se obtendrán valores aproximados de la solución $y(x)$ de (1) en puntos equidistantes $x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \cdots$; estos valores se denotarán por y_1, $y_2, \cdots$, respectivamente. De manera semejante, los valores aproximados de la derivada $y'(x)$ en estos puntos se denotarán por $y'_1, y'_2, \cdots$, respectivamente.

Los métodos de la sección 20.1 fueron sugeridos por el desarrollo de Taylor

$$y(x + h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + \frac{h^3}{3!} y'''(x) + \cdots \tag{2}$$

el cual ahora se utilizará con el mismo fin, junto con el desarrollo de la derivada

$$y'(x + h) = y'(x) + hy''(x) + \frac{h^2}{2} y'''(x) + \cdots . \tag{3}$$

Método con menor precisión para explicar el principio

El método numérico con menor precisión se obtiene al despreciar, en (2) y (3), los términos que contienen a y''' y los posteriores; lo anterior conduce a las aproximaciones para $y(x + h)$ y a la derivada $y'(x + h)$ definidas por las fórmulas

$$y(x + h) \approx y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x),$$

$$y'(x + h) \approx y'(x) + hy''(x).$$

En el primer paso del método se calcula

$$y_0'' = f(x_0, y_0, y_0')$$

a partir de (1), entonces

$$y_1 = y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2} y_0''$$

que es una aproximación de $y(x_1) = y(x_0 + h)$ y, además,

$$y_1' = y_0' + hy_0''$$

lo cual se necesitará en el paso siguiente. En el segundo paso se calcula

$$y_1'' = f(x_1, y_1, y_1')$$

a partir de (1), entonces

$$y_2 = y_1 + hy_1' + \frac{h^2}{2} y_1''$$

que es una aproximación de $y(x_2) = y(x_0 + 2h)$ y, además,

$$y_2' = y_1' + hy_1''.$$

En el $(n + 1)$-ésimo paso se calcula

$$y_n'' = f(x_n, y_n, y_n')$$

a partir de (1), entonces el nuevo valor

$$y_{n+1} = y_n + hy_n' + \frac{h^2}{2} y_n'' \tag{4a}$$

que es una aproximación de $y(x_{n+1})$ y, además,

$$y_{n+1}' = y_n' + hy_n'' \tag{4b}$$

que es una aproximación de $y'(x_{n+1})$ necesaria en el paso siguiente.

Observar que, en términos geométricos, este método es una aproximación de la curva de $y(x)$ por medio de porciones de parábolas.

Ejemplo 1. Una aplicación del método definido por (4).

Aplicar (4) al siguiente problema con valor inicial, eligiendo $h = 0.2$:

$$y'' = \frac{1}{2}(x + y + y' + 2), \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0. \tag{5}$$

Solución. Para este problema, las fórmulas (4) se vuelven

$$y_{n+1} = y_n + 0.2y'_n + 0.02y''_n$$

$$y'_{n+1} = y'_n + 0.2y''_n$$

en donde

$$y''_n = \frac{1}{2}(x_n + y_n + y'_n + 2).$$

En la tabla 20.9 se muestran los cálculos. El estudiante debe comprobar que la solución exacta es

$$y = e^x - x - 1.$$

Se observa que los errores de los valores aproximados son muy grandes. Esto es común, porque en la mayor parte de los casos prácticos este método es demasiado inexacto.

Tabla 20.9
Cálculos en el ejemplo 1

n	x_n	y_n	y'_n	y''_n	Exacto (4D)	Error
0	0.0	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000
1	0.2	0.0200	0.2000	1.2100	0.0214	0.0014
2	0.4	0.0842	0.4420	1.4631	0.0918	0.0076
3	0.6	0.2019	0.7346	1.7682	0.2221	0.0202
4	0.8	0.3842	1.0883	2.1362	0.4255	0.0413
5	1.0	0.6446			0.7183	0.0737

Método de Runge-Kutta-Nyström

Mucho más exacto que (4) es el **método de Runge-Kutta-Nyström**, que generaliza el método de Runge-Kutta de la sección 20.1. Se menciona sin demostración que se trata de un *método de cuarto orden*, lo cual significa que en las fórmulas de Taylor para y y y' se obtienen exactamente los primeros términos hasta el que contiene a h^4, inclusive.

Los cálculos en este método pueden hacerse como se muestra en la tabla 20.10. Se observa que en cada paso se calculan cuatro cantidades auxiliares k_1, k_2, k_3, k_4, y que luego a partir de éstas se calculan el nuevo valor aproximado y_{n+1} de la solución y, así como también una aproximación de la derivada y' necesaria en el paso siguiente.

h puede controlarse como se describió casi al final de la sección 20.1, en donde ahora como δ se toma al mayor de δ^* y δ^{**}; aquí δ^* es 1/15 multiplicado por la diferencia de los valores correspondientes de y, y δ^{**} es 1/15 multiplicado por la diferencia de los valores correspondientes de y'.

Tabla 20.10
Método de Runge-Kutta-Nyström

ALGORITMO R-K-N (f, x_0, y_0, y'_0, h, N).

Este algoritmo calcula la solución del problema con valor inicial $y'' = f(x, y, y')$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ en puntos equidistantes $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h, \cdots, x_N = x_0 + Nh$; aquí, f es tal que este problema tiene una solución única en el intervalo $[x_0, x_N]$.

ENTRADA: Valores iniciales x_0, y_0, y'_0, tamaño del paso h, número de pasos N

SALIDA: Aproximación y_{n+1} de la solución $y(x_{n+1})$ en $x_{n+1} = x_0 + (n+1)h$, en donde $n = 0, 1, \cdots, N-1$

Para $n = 0, 1, \cdots, N-1$, ejecutar:

$$k_1 = \tfrac{1}{2}hf(x_n, y_n, y'_n)$$

$$k_2 = \tfrac{1}{2}hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + K, y'_n + k_1)$$

en donde $K = \tfrac{1}{2}h(y'_n + \tfrac{1}{2}k_1)$

$$k_3 = \tfrac{1}{2}hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + K, y'_n + k_2)$$

$$k_4 = \tfrac{1}{2}hf(x_n + h, y_n + L, y'_n + 2k_3)$$

en donde $L = h(y'_n + k_3)$

$$x_{n+1} = x_n + h$$

$$y_{n+1} = y_n + h(y'_n + \tfrac{1}{3}(k_1 + k_2 + k_3))$$

SALIDA: x_{n+1}, y_{n+1}
[*Aproximación a la solución en* x_{n+1}]

$$y'_{n+1} = y'_n + \tfrac{1}{3}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

[*Valor auxiliar necesario en el paso siguiente*]

Fin

Detener el proceso

Fin de R-K-N

Ejemplo 2. Método de Runge-Kutta-Nyström

Aplicar el método de Runge-Kutta-Nyström al problema con valor inicial (5), eligiendo $h = 0.2$.

Solución. Aquí,

$$f = 0.5(x + y + y' + 2).$$

Por tanto,

$$k_1 = 0.05(x_n + y_n + y_n' + 2)$$

$$k_2 = 0.05(x_n + 0.1 + y_n + K + y_n' + k_1 + 2) \qquad K = 0.1(y_n' + \tfrac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = 0.05(x_n + 0.1 + y_n + K + y_n' + k_2 + 2)$$

$$k_4 = 0.05(x_n + 0.2 + y_n + L + y_n' + 2k_3 + 2) \qquad L = 0.2(y_n' + k_3).$$

En este caso la ecuación diferencial es sencilla, por lo que también lo son las expresiones para k_1, k_2, k_3, k[illegible] Así, es posible insertar k_1 en k_2, luego k_2 en k_3, y finalmente k_3 en k_4. El resultado de este cálculo simple es

$$k_2 = 0.05[1.0525(x_n + y_n) + 1.152\,5y_n' + 2.205]$$

$$k_3 = 0.05[1.055\,125(x_n + y_n) + 1.160\,125y_n' + 2.215\,25]$$

$$k_4 = 0.05[1.116\,063\,75(x_n + y_n) + 1.327\,613\,75y_n' + 2.443\,677\,5].$$

Con base en lo anterior se obtiene

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + a(x_n + y_n) + by_n' + c \\ y_{n+1}' &= y_n' + a^*(x_n + y_n) + b^*y_n' + c^* \end{aligned}$$

en donde

$$a = 0.010\,3588 \qquad b = 0.211\,0421 \qquad c = 0.021\,4008$$

$$a^* = 0.105\,5219 \qquad b^* = 0.115\,8811 \qquad c^* = 0.221\,4030.$$

En la tabla 20.11 (página siguiente) se muestran los cálculos correspondientes. Los errores de los valores aproximados para $y(x)$ son mucho menores que los del ejemplo 1 (ver la tabla 20.12). ∎

Ejemplo 3. Método de Runge-Kutta-Nyström. Ecuación de Airy. Función de Airy Ai(x).

Resolver el problema con valor inicial

$$y'' = xy, \quad y(0) = 3^{-2/3}/\Gamma(2/3) = 0.355\,028\,05, \quad y'(0) = -3^{-1/3}/\Gamma(1/3) = -0.258\,819\,40$$

aplicando el método de Runge-Kutta-Nyström con $h = 0.2$; ejecutar 5 pasos. Ésta es la **ecuación de Airy**,[2] que surgió en óptica (consultar la obra citada en el apéndice 1 como referencia [A9], pág. 188). Γ es la función gamma (ver el apéndice 3). Las condiciones iniciales son tales que se obtiene una solución estándar, la **función de Airy** Ai(x), que ya ha sido tabulada e investigada (consultar la referencia [1], págs. 446, 475).

Tabla 20.11
Método de Runge-Kutta-Nyström (con $h = 0.2$) aplicado al problema con valor inicial (5); cinco pasos calculados mediante el uso de (6)

n	x_n	y_n	y_n'	$a(x_n + y_n) + by_n' + c$	$a^*(x_n + y_n) + b^*y_n' + c^*$
0	0.0	0.000 0000	0.000 000[illegible]	0.021 4008	0.221 4030
1	0.2	0.021 4008	0.221 4030	0.070 4196	0.270 4220
2	0.4	0.091 8204	0.491 8250	.130 [illegible]	0.330 2940
3	0.6	0.222 1117	0.822 1190	0.[illegible]	0.403 4219
4	0.8	0.425 5303	1.225 5409	0.29[illegible]	[illegible].492 7403
5	1.0	0.718 2668	1.718 2812		

Tabla 20.12
Comparación de la exactitud de los dos métodos que están del problema con valor considerándose en el caso inicial (5), con $h = 0.2$

x	$y = e^x - x - 1$	Error: Ejemplo 1	Error: Tabla 20.11
0.2	0.021 4028	0.0014	0.000 0020
0.4	0.091 8247	0.0076	0.000 0043
0.6	0.222 1188	0.0202	0.000 0071
0.8	0.425 5409	0.0413	0.000 0106
1.0	0.718 2818	0.0737	0.000 0150

Solución. Para esta ecuación y $h = 0.2$, con base en las fórmulas generales del algoritmo se obtiene

$$k_1 = 0.1x_ny_n,$$

$$k_2 = k_3 = 0.1(x_n + 0.1)(y_n + 0.1y_n' + 0.05k_1),$$

$$k_4 = 0.1(x_n + 0.2)(y_n + 0.2y_n' + 0.2k_2).$$

En la tabla 20.13 se muestran los resultados. El error se determinó comparando con los valores en la obra citada en el apéndice 1 como referencia [1], pág. 475. ∎

Tabla 20.13
Método de Runge-Kutta-Nyström aplicado a la ecuación de Airy, cálculo de la función de Airy $y = \mathrm{Ai}(x)$

x_n	y_n	y_n'	$y(x)$ exacto (8D)	$10^8 \times$ Error de y_n
0.0	0.355 028 05	−0.258 819 40	0.355 028 05	0
0.2	0.303 703 04	−0.252 404 64	0.303 703 15	11
0.4	0.254 742 11	−0.235 830 70	0.254 742 35	24
0.6	0.209 799 74	−0.212 791 72	0.209 800 06	32
0.8	0.169 845 99	−0.186 411 34	0.169 846 32	33
1.0	0.135 292 18	−0.159 146 09	0.135 292 42	24

El trabajo del ejemplo 3 también ilustra que los métodos para ecuaciones diferenciales a menudo son de utilidad en la tabulación de **"funciones trascendentes superiores"**, definidas por fórmulas que son menos prácticas en el trabajo numérico [en el ejemplo mencionado: una serie de potencias o una representación por medio de integrales de Ai(x)].

Los métodos analizados en esta sección incluyen un error por truncamiento. Además de este error hay **errores por redondeo**, y se desea advertir al lector que estos últimos pueden afectar mucho a los resultados. Por ejemplo, la solución del problema $y'' = y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ es $y = e^{-x}$, pero el error por redondeo introduce un múltiplo pequeño de la solución no deseada e^x, lo cual puede, finalmente (después de un número suficiente de pasos), arruinar la solución requerida. Lo anterior se denomina **error de construcción**. En el sencillo ejemplo presentado se le puede evitar iniciando con valores conocidos de e^{-x} y su derivada para x grande, y calcular en la

[2] Así denominada en honor de Sir GEORGE BIDELL AIRY (1801-1892), matemático inglés, conocido por su obra sobre elasticidad y ecuaciones diferenciales parciales.

dirección inversa, pero en casos más complicados se requiere gran experiencia para evitar este fenómeno.

En las secciones restantes de este capítulo se considerarán métodos numéricos para resolver **ecuaciones diferenciales parciales**.

Problemas de la sección 20.3

1. Repetir los cálculos en el ejemplo 1, eligiendo $h = 0.1$, y comparar los errores de los valores así obtenidos con los del ejemplo 1.

2. Realizar la misma tarea que en el problema 1, eligiendo $h = 0.05$.

Aplicar (4) al siguiente problema con valor inicial (5 pasos).

3. $y'' = -y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad h = 0.1$

4. $y'' = -y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad h = 0.1$

5. $y'' = y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad h = 0.1$

6. $y'' = y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad h = 0.1$

7. Comprobar las fórmulas y los cálculos para la ecuación de Airy en el ejemplo 3.

8. Comprobar, hasta 3D de exactitud, los valores y_n y y_n en el ejemplo 3, usando (25) del apéndice A3.1 y la tabla A2 del apéndice 5.

Aplicar (4) a los siguientes problemas con valor inicial (h = 5 pasos). Comprobar la solución dada. Calcular el error de y_n

9. $y'' = xy' - 4y$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$. Solución exacta $y = x^4 - 6x^2 + 3$.

10. $y'' = xy' - 3y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$. Solución exacta $y = x^3 - 3x$.

11. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$, $y(0) = -\frac{1}{2}$, $y'(0) = 0$. Exacta: $y = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$.

Aplicar el método de Runge-Kutta-Nyström a los siguientes problemas con valor inicial (5 pasos). Calcular el error.

12. $xy'' + y' + xy = 0$, $y(1) = 0.765198$, $y'(1) = -0.440051$, $h = 0.5$. (Estas condiciones iniciales condujeron a la solución estándar $y = J_0(x)$, la función de Bessel de primer tipo de orden 0, cuyos valores hasta 6D en $x = 1, 1.5, \cdots$, son 0.765198, 0.511828, 0.223891, −0.048384, −0.260052, −0.380128.)

13. Problema 9, $h = 0.2$.

14. **(Problema con valores frontera)** No se considerarán métodos numéricos para problemas con valores frontera en generalidad alguna, aunque el lector puede demostrar lo que se afirma a continuación. Para resolver numéricamente

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x), \qquad y(0) = 0, \quad y(b) = k$$

Aplicar uno de los métodos previos a fin de obtener una solución $Y(x)$ de la ecuación que satisface las condiciones iniciales $Y(0) = 0$, $Y'(0) = 1$. Luego, con ese método determinar una solución $z(x)$ de la ecuación homogénea que satisface las condiciones iniciales $z(0)$, $z'(0) = 1$. Demostrar que

$$y(x) = Y(x) + cz(x)$$

con una c idónea satisface el problema dado. ¿Cuál es la condición para c?

15. Para resolver numéricamente el problema con valores frontera

$$y'' + f(x)\,y' + g(x)\,y = r(x), \qquad y(a) = k_1, \quad y(b) = k_2$$

demostrar que pueden determinarse una solución $y_1(x)$ que satisface $y_1(a) = k_1$, $y_1'(a) = c_1$ y una solución $y_2(x)$ que satisface $y_2(a) = k_1$, $y_2'(a) = c_2$ y tales que $y_1(b) \neq y_2(b)$, y luego obtener la solución del problema dado en la forma

$$y(x) = \frac{1}{y_1(b) - y_2(b)}\,[(k_2 - y_2(b))\,y_1(x) + (y_1(b) - k_2)\,y_2(x)].$$

20.4 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES ELÍPTICAS

Las secciones restantes de este capítulo están dedicadas a métodos numéricos para las ecuaciones diferenciales parciales, en particular, para las ecuaciones de Laplace, de Poisson, del calor y de onda que son fundamentales en aplicaciones y, al mismo tiempo, son casos modelo de las ecuaciones elípticas, parabólicas e hiperbólicas. Las definiciones son las siguientes.

Una ecuación diferencial parcial se denomina **cuasilineal** si es lineal en las derivadas de grado máximo. Por tanto, una ecuación cuasilineal de segundo orden en dos variables independientes x, y puede escribirse como

$$(1) \qquad a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y).$$

u es la función desconocida. Se dice que esta ecuación es del:

tipo elíptico si $ac - b^2 > 0$ (ejemplo: *ecuación de Laplace*)

tipo parabólico si $ac - b^2 = 0$ (ejemplo: *ecuación del calor*)

tipo hiperbólico si $ac - b^2 < 0$ (ejemplo: *ecuación de onda*)

(donde en las ecuaciones del calor y de onda y es el tiempo t). Aquí, los *coeficientes a, b, c* pueden ser funciones de x, y, de modo que el tipo de (1) puede ser diferente en regiones distintas del plano xy. Esta clasificación no es sólo una cuestión formal, sino que reviste una gran importancia práctica debido a que el comportamiento general de las soluciones difiere de un tipo a otro, así como las condiciones adicionales (condiciones en la frontera e iniciales) que es necesario tomar en cuenta.

Las aplicaciones en que intervienen ecuaciones *elípticas* suelen conducir a problemas con valores frontera en una región R, denominados *primer problema con valores frontera* o **problema de Dirichlet**, si u se prescribe sobre la curva frontera C de R, *segundo problema con valores frontera* o **problema de Neumann** si $u_n = \partial\mu/\partial n$ (derivada normal de u) se prescribe sobre C, y *tercer problema* o **problema mixto** si u se prescribe sobre una parte de C y u_n se prescribe sobre la parte restante. Por lo común, C es una curva cerrada (o, a veces, consta de dos o más de esas curvas).

Ecuaciones en diferencias para las ecuaciones de Laplace y de Poisson

En esta sección se considera la **ecuación de Laplace**

(2) $$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

y la **ecuación de Poisson**

(3) $$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$$

que son las ecuaciones elípticas más importantes en las aplicaciones. A fin de obtener métodos de resolución numérica, las derivadas parciales en una ecuación dada se sustituyen por los cocientes en diferencias correspondientes, como sigue. Por la fórmula de Taylor,

(4) $$\begin{aligned}&(a)\ u(x+h,y) = u(x,y) + hu_x(x,y) + \tfrac{1}{2}h^2u_{xx}(x,y) + \tfrac{1}{6}h^3u_{xxx}(x,y) + \cdots\\ &(b)\ u(x-h,y) = u(x,y) - hu_x(x,y) + \tfrac{1}{2}h^2u_{xx}(x,y) - \tfrac{1}{6}h^3u_{xxx}(x,y) + \cdots\end{aligned}$$

Al restar (4b) de (4a) y despreciar los términos en h^3, h^4, $\cdots$, se obtiene

(5a) $$u_x(x, y) \approx \frac{1}{2h}[u(x + h, y) - u(x - h, y)].$$

De manera semejante,

(5b) $$u_y(x, y) \approx \frac{1}{2k}[u(x, y + k) - u(x, y - k)].$$

Ahora, la atención se dirige a las segundas derivadas. Al sumar (4a) y (4b) y despreciar los términos en h^4, h^5, $\cdots$, se obtiene

$$u(x + h, y) + u(x - h, y) \approx 2u(x, y) + h^2u_{xx}(x, y).$$

Al despejar u_{xx}, se tiene

(6a) $$u_{xx}(x, y) \approx \frac{1}{h^2}[u(x + h, y) - 2u(x, y) + u(x - h, y)].$$

De manera semejante,

(6b) $$u_{yy}(x, y) \approx \frac{1}{k^2}[u(x, y + k) - 2u(x, y) + u(x, y - k)].$$

No se requiere (problema 3)

(6c) $$u_{xy}(x, y) \approx \frac{1}{4hk}[u(x + h, y + k) - u(x - h, y + k) - u(x + h, y - k) + u(x - h, y - k)].$$

En la figura 424 se muestran los puntos $(x + h, y)$, $(x - h, y)$, $\cdots$ en (5) y (6).

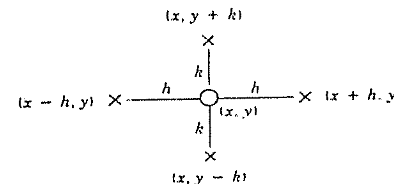


Figura 424. Puntos en (5) y (6).

Ahora se sustituyen (6a) y (6b) en la *ecuación de Poisson* (3), eligiendo $k = h$ a fin de obtener una fórmula sencilla:

(7) $$u(x + h, y) + u(x, y + h) + u(x - h, y) + u(x, y - h) - 4u(x, y) = h^2f(x, y).$$

Ésta es una **ecuación en diferencias** correspondiente a (3). Así, para la *ecuación de Laplace* (2) la ecuación en diferencias correspondiente es

(8) $$u(x + h, y) + u(x, y + h) + u(x - h, y) + u(x, y - h) - 4u(x, y) = 0.$$

h se denomina **tamaño de la malla**. La ecuación (8) relaciona u en (x, y) con u en los cuatro puntos vecinos que se observan en la figura 425. Por conveniencia, estos puntos vecinos a menudo se denominan E (este), N (norte), O (oeste) y S (sur). Así, la figura 425 asume la forma de la figura 426 y la expresión (7) se vuelve

(7*) $$u(E) + u(N) + u(W) + u(S) - 4u(x, y) = h^2f(x, y).$$

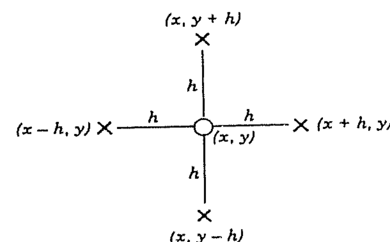


Figura 425. Puntos en (7) y (8).

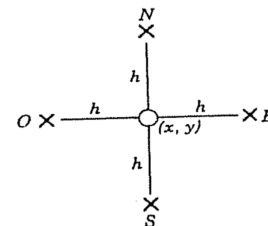


Figura 426. Notación en (7*).

La aproximación de $h^2 \nabla^2 u$ dada en (7) y en (8) es una de 5 puntos con el esquema o **patrón** de coeficientes

$$\text{(9)} \qquad \begin{Bmatrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{Bmatrix}$$

Observar que (8) posee una interpretación notable: u en (x, y) *es igual a la media de los valores de u en los cuatro puntos vecinos en la malla.*

Con el fin de captar (7) a primera vista, puede representarse de modo muy conveniente por medio de ese patrón:

$$\begin{Bmatrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{Bmatrix} u = h^2 f(x, y).$$

Problema de Dirichlet

En la resolución numérica del problema de Dirichlet (cuya definición ya se proporcionó) en una región R, primero se elige h y en R se introduce una rejilla que consta de rectas horizontales y verticales equidistantes a una distancia h. Sus intersecciones se denominan **puntos de la malla** (o *nodos* o *puntos de la red*). Ver la figura 427. Entonces se usa una ecuación en diferencias que sea una aproximación de la ecuación diferencial parcial dada —fórmula (8) en el caso de la ecuación de Laplace— a través de la cual los valores desconocidos de u en los puntos de la malla en R se relacionan entre sí y con los valores en la frontera dados, como se analizará a continuación. Lo anterior conduce a un sistema lineal de ecuaciones *algebraicas*. Al resolver tal sistema se obtienen aproximaciones a los valores desconocidos de u en los puntos de la malla en R. Se verá que el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas, es decir, el número de nodos en R. Como en cada uno de los puntos de la malla u sólo está relacionado con los valores en los puntos vecinos de la malla, entonces los coeficientes del sistema constituyen una **matriz rala**, es decir, un matriz con relativamente pocos elementos diferentes de cero. En la práctica esta matriz es grande, ya que para lograr una alta exactitud se requieren muchos puntos de la malla, y una matriz de 500 × 500 o más grande puede ocasionar un problema de almacenamiento.[3] Por tanto, es preferible un método indirecto (ver la sección 19.3) a uno directo. En particular, puede aplicarse el **método de Gauss-Seidel**, que en este contexto también se denomina **método de Liebmann**. El método completo se ilustrará mediante un ejemplo, en el que por razones de comodidad el número de ecuaciones se mantiene pequeño. Como ***notación conveniente para los puntos de la malla y los valores correspondientes de la solución*** (y de las soluciones aproximadas) se usará (ver la figura 427)

$$\text{(10)} \qquad P_{ij} = (ih, jh), \qquad u_{ij} = u(ih, jh).$$

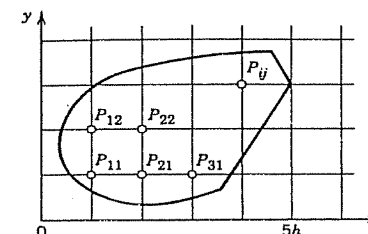


Figura 427. Región en el plano xy cubierta por una rejilla de malla h, en donde también se observan los puntos de la malla $P_{11} = (h, h), \cdots P_{ij}(ih, jh), \cdots$

Con esta notación puede escribirse (8), para cualquier punto P_{ij} en la malla, como

$$\text{(11)} \qquad \boxed{u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{ij} = 0.}$$

Ejemplo 1. Ecuación de Laplace. Método de Liebmann.

Los cuatro lados de una placa cuadrada que mide 12 cm por lado, hecha de material homogéneo, se mantienen a las temperaturas constantes 0°C y 100°C, como se muestra en la figura 428*a*. Utilizando una rejilla (muy amplia) de 4 cm de malla y aplicando el método de Liebmann (es decir, la iteración de Gauss-Seidel), encontrar la temperatura (de estado estacionario) en los puntos de la malla.

Solución. En el caso de independencia con respecto al tiempo, la ecuación del calor (ver la sección 9.8)

$$u_t = c^2(u_{xx} + u_{yy})$$

se reduce a la ecuación de Laplace. Por tanto, el problema es un problema de Dirichlet para esta ecuación.

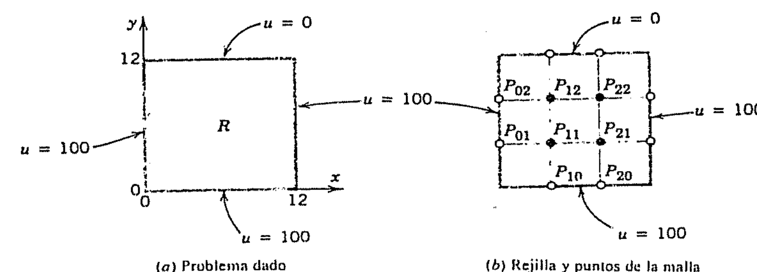


Figura 428. Ejemplo 1.

[3] Esta matriz ¡*no* es tridiagonal! (La definición se proporcionará un poco más adelante). Si lo fuera, podría aplicarse la eliminación de Gauss sin ocasionar el problema de almacenamiento.

Se elige la rejilla mostrada en la figura 428b y se consideran los puntos de la malla en el orden P_{11}, P_{21}, P_{12}, P_{22}. Se aplica (11) y, en cada ecuación, se pasan a la derecha todos los términos que se obtienen a partir de los valores en la frontera dados. Así, se obtiene el sistema

$$
(12)\qquad
\begin{aligned}
-4u_{11} + u_{21} + u_{12} \qquad\qquad &= -200\\
u_{11} - 4u_{21} \qquad + u_{22} &= -200\\
u_{11} \qquad - 4u_{12} + u_{22} &= -100\\
u_{21} + u_{12} - 4u_{22} &= -100
\end{aligned}
$$

En la práctica, un sistema de un tamaño tan pequeño se resolvería mediante la eliminación de Gauss, con lo que se encontraría

$$u_{11} = u_{21} = 87.5, \qquad u_{12} = u_{22} = 62.5.$$

Valores más exactos (exactos hasta 1D) de la solución del problema son 88.1 y 61.9, respectivamente. (Estos valores se obtuvieron usando la serie de Fourier). Así, el error es aproximadamente del 1%, por lo cual el resultado es sorprendentemente exacto para una rejilla con un tamaño h de malla tan grande. Si el sistema de ecuaciones es grande, puede resolverse por medio de un método indirecto, como el método de Liebmann. Para (12), esto sería como se indica a continuación. El sistema (12) se escribe en la forma

$$
\begin{aligned}
u_{11} &= \qquad\quad 0.25u_{21} + 0.25u_{12} \qquad\qquad + 50\\
u_{21} &= 0.25u_{11} \qquad\qquad\qquad + 0.25u_{22} + 50\\
u_{12} &= 0.25u_{11} \qquad\qquad\qquad + 0.25u_{22} + 25\\
u_{22} &= \qquad\quad 0.25u_{21} + 0.25u_{12} \qquad\qquad + 25
\end{aligned}
$$

Estas ecuaciones se usan ahora para aplicar la iteración de Gauss-Seidel. Son idénticas a las ecuaciones (2) de la sección 19.3, en donde $u_{11} = x_1$, $u_{21} = x_2$, $u_{12} = x_3$, $u_{22} = x_4$, y la iteración se explica allí, en donde como valores de partida se toman a 100, 100, 100, 100. Aplicando la intuición física acerca de cuáles podrían ser aproximadamente los valores en los puntos de la malla, es posible ahorrarse algo de trabajo al elegir mejores valores de partida. El lector puede comprobar que la solución exacta del sistema es $u_{11} = u_{21} = 87.5$, $u_{12} = u_{22} = 62.5$.

Para una idea adicional que conduce a una simplificación sustancial, ver el problema 6.

Observación. Es interesante hacer notar que si se toma una malla $h = L/n$ (L = lado de R) y se consideran $(n-1)^2$ puntos interiores de la misma (es decir, puntos de la malla que no estén sobre la frontera), renglón por renglón en el orden

$$P_{11}, P_{21}, \cdots, P_{n-1,1}, P_{12}, P_{22}, \cdots, P_{n-1,2}, \cdots,$$

entonces el sistema de ecuaciones tiene la matriz de coeficientes de $(n-1)^2 \times (n-1)^2$

$$
(13)\qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix}
\mathbf{B} & \mathbf{I} & & & \\
\mathbf{I} & \mathbf{B} & \mathbf{I} & & \\
 & \cdot & & & \\
 & & \cdot & & \\
 & & & \cdot & \\
 & & \mathbf{I} & \mathbf{B} & \mathbf{I}\\
 & & & \mathbf{I} & \mathbf{B}
\end{bmatrix}
\quad \text{en donde} \quad
\mathbf{B} = \begin{bmatrix}
-4 & 1 & & & \\
1 & -4 & 1 & & \\
 & \cdot & & & \\
 & & \cdot & & \\
 & & & \cdot & \\
 & & 1 & -4 & 1\\
 & & & 1 & -4
\end{bmatrix}
$$

es una matriz de $(n-1) \times (n-1)$, y puede demostrarse que A es no singular.

Se dice que una matriz es una **matriz banda** si tiene todos sus elementos diferentes de cero sobre la diagonal principal y sobre rectas paralelas a ésta (separadas por líneas paralelas de ceros o no). Por ejemplo, A en (13) es una matriz banda. Aun cuando la eliminación de Gauss no preserva los ceros entre las bandas, tampoco introduce elementos diferentes de cero fuera de los límites definidos por las bandas originales. Por consiguiente, una estructura de bandas tiene sus ventajas. En (13), tal estructura se logró ordenando con cuidado los puntos de la malla.

Método ADI

Se dice que una **matriz es tridiagonal** si tiene todos sus elementos diferentes de cero sobre la diagonal principal y en las posiciones inmediatamente adyacentes a la misma. En este caso es particularmente sencillo aplicar la eliminación de Gauss.

Lo anterior conduce a preguntarse si, en la resolución numérica del problema de Dirichlet para las ecuaciones de Laplace o de Poisson, podría obtenerse un sistema de ecuaciones cuya matriz de coeficientes sea tridiagonal. La respuesta es sí y un método común de esa clase, denominado **método ADI** (*alterning direction implicit method*, método implícito de la dirección alternante), fue desarrollado por Peaceman y Rachford. La idea es la siguiente: el patrón en (9) indica que puede obtenerse una matriz tridiagonal si se tuvieran sólo los tres puntos en un renglón (o sólo en una columna). Esto sugiere escribir (11) en la forma

$$(14a)\qquad u_{i-1,j} - 4u_{ij} + u_{i+1,j} = -u_{i,j-1} - u_{i,j+1}$$

de modo que el miembro izquierdo pertenezca al renglón j de y y el miembro derecho a la columna i de x. Por supuesto, (11) también puede escribirse en la forma

$$(14b)\qquad u_{i,j-1} - 4u_{ij} + u_{i,j+1} = -u_{i-1,j} - u_{i+1,j}$$

de modo que el miembro izquierdo pertenezca a la columna i y el miembro derecho al renglón j. En el método ADI se procede por iteración. En cada punto de la malla se elige un valor de partida arbitrario $u_{ij}^{(0)}$. En cada paso se calculan nuevos valores en todos los puntos de la malla. En uno de los pasos se utiliza una fórmula de iteración que resulte de (14a) y, en el paso siguiente, una que resulte de (14b), y así sucesivamente en orden alternante.

En forma detallada: suponer que ya se han calculado las aproximaciones $u_{ij}^{(m)}$. Luego, para obtener las siguientes aproximaciones $u_{ij}^{(m+1)}$, las $u_{ij}^{(m)}$ se sustituyen en el miembro derecho de (14a) y se resuelve para las $u_{ij}^{(m+1)}$ del miembro izquierdo; es decir, se utiliza

$$(15a)\qquad \boxed{u_{i-1,j}^{(m+1)} - 4u_{ij}^{(m+1)} + u_{i+1,j}^{(m+1)} = -u_{i,j-1}^{(m)} - u_{i,j+1}^{(m)}.}$$

La expresión anterior se usa para un j fijo, es decir, para un ***renglón fijo j***, y para todos los puntos de la malla internos en ese renglón. Lo anterior origina un sistema lineal de N ecuaciones algebraicas (N = número de puntos de la malla internos por

renglón) en N incógnitas, las nuevas aproximaciones de u en estos puntos de la malla. Observar que (15a) comprende no sólo aproximaciones calculadas en el paso previo sino también valores en la frontera dados. El sistema (15b) (¡j fijo!) se resuelve aplicando la eliminación de Gauss. Luego se pasa al renglón siguiente, se obtiene otro sistema de N ecuaciones y se resuelve por el método de Gauss, y así sucesivamente hasta que se terminan los renglones. En el paso siguiente se ***alterna la dirección***, es decir, se calculan las siguientes aproximaciones $u_{ij}^{(m+2)}$, columna por columna, a partir de las $u_{ij}^{(m+1)}$ y de los valores en la frontera dados, utilizando una fórmula obtenida de la (14b) al sustituir las $u_{ij}^{(m+1)}$ a la derecha:

$$\text{(15b)} \qquad u_{i,j-1}^{(m+2)} - 4u_{ij}^{(m+2)} + u_{i,j+1}^{(m+2)} = -u_{i-1,j}^{(m+1)} - u_{i+1,j}^{(m+1)}.$$

Para cada i fijo, es decir, ***para cada columna***, este es un sistema de M ecuaciones (M = número de puntos de la malla internos por columna) en M incógnitas, que se resuelve por eliminación de Gauss. Luego se pasa a la siguiente columna, y así sucesivamente hasta que se terminan las columnas.

A continuación se considerará un ejemplo que tan sólo sirve para explicar el método completo. (En la práctica, este problema se resolvería directamente con la eliminación de Gauss.)

Ejemplo 2. Problema de Dirichlet. Método ADI.

Explicar el procedimiento y las fórmulas del método ADI en términos del problema del ejemplo 1, usando la misma rejilla y los valores de partida 100, 100, 100, 100.

Solución. Mientras se efectúa el trabajo, consultar la figura 428*b*, en donde se muestran los valores en la frontera dados. Por (15a), con $m = 0$, se obtienen las primeras aproximaciones $u_{11}^{(1)}, u_{21}^{(1)}, u_{12}^{(1)}, u_{22}^{(1)}$. Los valores frontera contenidos en (15a) se escriben sin supraíndice, para identificarlos mejor y con el fin de indicar que estos valores dados permanecen iguales durante la iteración. A partir de (15a) con $m = 0$ se tiene, para $j = 1$ (primer renglón), el sistema

$$(i = 1) \qquad u_{01} - 4u_{11}^{(1)} + u_{21}^{(1)} = -u_{10} - u_{12}^{(0)}$$

$$(i = 2) \qquad u_{11}^{(1)} - 4u_{21}^{(1)} + u_{31} = -u_{20} - u_{22}^{(0)}.$$

La solución es $u_{11}^{(1)} = u_{21}^{(1)} = 100$. Para $j = 2$ (segundo renglón), a partir de (15a) se obtiene el sistema

$$(i = 1) \qquad u_{02} - 4u_{12}^{(1)} + u_{22}^{(1)} = -u_{11}^{(0)} - u_{13}$$

$$(i = 2) \qquad u_{12}^{(1)} - 4u_{22}^{(1)} + u_{32} = -u_{21}^{(0)} - u_{23}.$$

La solución es $u_{12}^{(1)} = u_{22}^{(1)} = 66.667$.

Segundas aproximaciones. $u_{11}^{(2)}, u_{21}^{(2)}, u_{12}^{(2)}, u_{22}^{(2)}$ se obtienen ahora a partir de (15b) con $m = 1$ al usar las primeras aproximaciones recientemente calculadas y los valores frontera. Para $i = 1$ (primera columna), a partir de (15b) se obtiene el sistema

$$(j = 1) \qquad u_{10} - 4u_{11}^{(2)} + u_{12}^{(2)} = -u_{01} - u_{21}^{(1)}$$

$$(j = 2) \qquad u_{11}^{(2)} - 4u_{12}^{(2)} + u_{13} = -u_{02} - u_{22}^{(1)}.$$

La solución es $u_{11}^{(2)} = 91.11$, $u_{12}^{(2)} = 64.44$. Para $i = 2$ (segunda columna), a partir de (15b) se obtiene el sistema

$$(j = 1) \qquad u_{20} - 4u_{21}^{(2)} + u_{22}^{(2)} = -u_{11}^{(1)} - u_{31}$$

$$(j = 2) \qquad u_{21}^{(2)} - 4u_{22}^{(2)} + u_{23} = -u_{12}^{(1)} - u_{32}.$$

La solución es $u_{21}^{(2)} = 91.11$, $u_{22}^{(2)} = 64.44$.

En este ejemplo, que simplemente sirve para explicar el procedimiento práctico en el método ADI, la exactitud de las segundas aproximaciones es casi la misma que la de los dos pasos de Gauss-Seidel en la sección 19.3 (en donde $u_{11} = x_1$, $u_{21} = x_2$, $u_{12} = x_3$, $u_{22} = x_4$), como se muestra en la siguiente tabla.

	u_{11}	u_{21}	u_{12}	u_{22}
ADI, segundas aproximaciones	91.11	91.11	64.44	64.44
Gauss-Seidel, segundas aproximaciones	93.75	90.62	65.62	64.06
Solución exacta de (12)	87.50	87.50	62.50	62.50

Mejoría de la convergencia. Una mejora adicional de la convergencia del método ADI se obtiene con base en la siguiente idea interesante. Al introducir el parámetro p, la expresión (11) también puede obtenerse en la forma

$$\text{(16a)} \qquad u_{i-1,j} - (2 + p)u_{ij} + u_{i+1,j} = -u_{i,j-1} + (2 - p)u_{ij} - u_{i,j+1}$$

y

$$\text{(16b)} \qquad u_{i,j-1} - (2 + p)u_{ij} + u_{i,j+1} = -u_{i-1,j} + (2 - p)u_{ij} - u_{i+1,j}.$$

Con lo anterior se obtienen las fórmulas de iteración ADI más generales

$$\text{(17a)} \qquad u_{i-1,j}^{(m+1)} - (2 + p)u_{ij}^{(m+1)} + u_{i+1,j}^{(m+1)} = -u_{i,j-1}^{(m)} + (2 - p)u_{ij}^{(m)} - u_{i,j+1}^{(m)}$$

y

$$\text{(17b)} \qquad u_{i,j-1}^{(m+2)} - (2 + p)u_{ij}^{(m+2)} + u_{i,j+1}^{(m+2)} = -u_{i-1,j}^{(m+1)} + (2 - p)u_{ij}^{(m+1)} - u_{i+1,j}^{(m+1)}.$$

Para $p = 2$, lo anterior es igual a (15). El parámetro p puede usarse para mejorar la convergencia. En efecto, puede demostrarse que el método ADI converge para p positivo, y que el valor óptimo para obtener la rapidez máxima de la convergencia es

$$\text{(18)} \qquad p_0 = 2 \text{ sen } \frac{\pi}{K}$$

en donde K es el mayor de $M + 1$ y $N + 1$ (ver arriba). Incluso es posible obtener mejores resultados al hacer que p varíe de un paso al otro. En la obra citada en el apéndice 1 como [E8] se analizan más detalles sobre el método ADI y sus variantes.

Problemas de la sección 20.4

1. Deducir (5b). 2. Deducir (6b). 3. Deducir (6c).
4. Resolver el ejemplo 1, eligiendo $h = 3$.
5. En el ejemplo 1, elegir $h = 6$, calcular u_{11} y comparar el resultado con el valor exacto 75.
6. **(Uso de la simetría)** Con base en los valores frontera del ejemplo 1, concluir que $u_{21} = u_{11}$ = y $u_{22} = u_{12}$. Demostrar que esto conduce a un sistema de dos ecuaciones y resolver tal sistema.

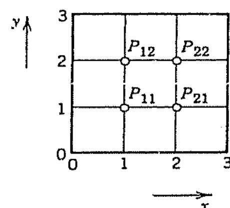


Figura 429. Problemas 7-13.

Usar la rejilla de la figura 429 para calcular el potencial en los cuatro puntos interiores para los siguientes valores en la frontera.

7. $u(1, 0) = 60$, $u(2, 0) = 300$, $u = 100$ sobre los tres otros bordes de la frontera.
8. $u = 220$ sobre los bordes superior e inferior, $u = 110$ sobre el borde izquierdo, $u = -10$ sobre el borde derecho.
9. $u = x^4$ sobre el borde inferior, $81 - 54y^2 + y^4$ sobre el borde derecho, $x^4 - 54x^2 + 81$ sobre el borde superior, y^4 sobre el borde izquierdo. (Comprobar que la solución exacta es $x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ y determinar el error.)
10. $u = 0$ sobre el borde izquierdo, x^3 sobre el borde inferior, $27 - 9y^2$ sobre el borde derecho, $x^3 - 27x$ sobre el borde superior.
11. $u = \text{sen } 1/3\pi\, x$ sobre el borde superior, 0 sobre los demás bordes.

12. Aplicar el método ADI (2 pasos) al problema de Dirichlet en el problema 11, usando la rejilla de la figura 429, como antes, y valores de partida cero.
13. ¿Qué p_0 en (18) es necesario elegir para el problema 12? Aplicar las fórmulas del método ADI (17) con $p_0 = 1.7$ al problema 12, ejecutando 1 paso. Ilustrar la convergencia mejorada haciendo una comparación con los valores correspondientes 0.077, 0.308 después del primer paso en el problema 12. (Usar valores de partida cero.)
14. Encontrar el potencial en la figura 430 usando (a) la rejilla basta, (b) la rejilla fina, y eliminación de Gauss. *Sugerencia*. En (b), usar simetría; tomar $u = 0$ como el valor frontera en los dos puntos en los que el potencial tiene un salto.
15. ¿Cuántos pasos de Gauss-Seidel son necesarios para obtener la respuesta del problema 14, rejilla basta, hasta 5S (5 cifras significativas) si se parte de 0, 0? En el caso de la rejilla fina del problema 14, el método de Gauss-Seidel converge con mayor lentitud. ¿Puede ver el lector la razón al examinar el sistema de ecuaciones?

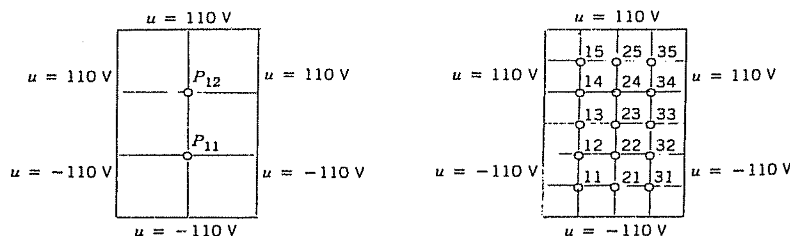


Figura 430. Región y rejillas en el problema 14.

20.5 PROBLEMAS DE NEUMANN Y MIXTO. FRONTERA IRREGULAR

Se continuará el análisis de la resolución numérica de problemas con valores frontera para las ecuaciones elípticas en una región R del plano xy. En la sección anterior se estudió el problema de Dirichlet. En los **problemas de Neumann y mixto** (definidos en la sección precedente) se confronta una situación nueva, porque hay puntos frontera en los que se da la **derivada normal** (externa) $u_n = \partial u/\partial n$ de la solución, pero se desconoce la propia u, ya que no se proporciona. Para manejar estos puntos se necesita una idea nueva. Esta idea es la misma para los problemas de Neumann y mixto. Por consiguiente, puede explicarse en relación con uno de estos dos tipos de problemas. Se hará así y se considerará un ejemplo típico como se indica a continuación.

Ejemplo 1. Problema mixto con valores en la frontera para una ecuación de Poisson.

Resolver el problema mixto con valores en la frontera para la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 12xy$$

que se muestra en la figura 431*a*.

Solución. Se utilizará la rejilla que se muestra en la figura 431*b*, donde $h = 0.5$. A partir de las fórmulas $u = 3y^3$ y $u_n = 6x$ dadas en la frontera se calculan los datos en la misma

$$(1) \qquad u_{31} = 0.375, \qquad u_{32} = 3, \qquad \frac{\partial u_{12}}{\partial n} = \frac{\partial u_{12}}{\partial y} = 3, \qquad \frac{\partial u_{22}}{\partial n} = \frac{\partial u_{22}}{\partial y} = 6.$$

P_{11} y P_{21} son puntos interiores en la malla, por lo que es posible manejarlos como se hizo en la sección previa. En efecto, a partir de (7), sección 20.4, con $h^2 = 0.25$ y $f(x, y) = 12xy$, y por los valores en la frontera dados, se obtienen dos ecuaciones correspondientes a P_{11} y P_{21}:

$$(2a) \qquad \begin{aligned} -4u_{11} + u_{21} + u_{12} \qquad &= 0.75 \\ u_{11} - 4u_{21} \qquad + u_{22} &= 1.5 - 0.375 = 1.125. \end{aligned}$$

Parece ser que la única dificultad con estas ecuaciones es que incluyen los valores desconocidos u_{12} y u_{22} de u en P_{11} y P_{21} sobre la frontera, donde se da la derivada normal $u_n = \partial u/\partial n = \partial u/\partial y$, en vez de u; pero esta dificultad puede vencerse conforme se avance.

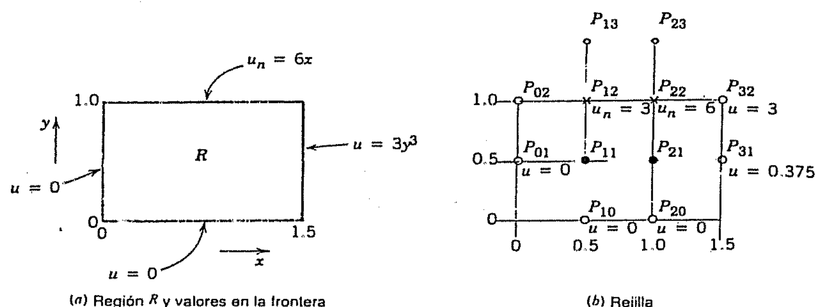
Se considerarán P_{12} y P_{22}. La idea que ayudará aquí es la siguiente: hay que imaginar que la región R se extiende por encima del primer renglón de los puntos externos de la malla (correspondientes a $y = 1.5$) y suponer que la ecuación diferencial se cumple también en la región extendida. Entonces se pueden escribir dos ecuaciones más, como antes (ver la figura 431*b*)

$$(2b) \qquad \begin{aligned} u_{11} \qquad - 4u_{12} + u_{22} + u_{13} \qquad &= 1.5 \\ u_{21} + u_{12} - 4u_{22} \qquad + u_{23} &= 3 - 3 = 0. \end{aligned}$$

Se recuerda que todavía no se ha utilizado la condición en la frontera sobre la parte superior de la frontera de R y también se observa que en (2b) se han introducido dos incógnitas más, u_{13} y u_{23}. Pero ahora puede usarse esa condición y deshacerse de u_{13}, u_{23} mediante la aplicación de la fórmula de diferencias centrales para u_y. Así, de (1) se obtiene (ver la figura 431*b*)

$$3 = \frac{\partial u_{12}}{\partial y} \approx \frac{u_{13} - u_{11}}{2h} = u_{13} - u_{11}, \qquad \text{por tanto,} \qquad u_{13} = u_{11} + 3$$

$$6 = \frac{\partial u_{22}}{\partial y} \approx \frac{u_{23} - u_{21}}{2h} = u_{23} - u_{21}, \qquad \text{por tanto,} \qquad u_{23} = u_{21} + 6.$$



(a) Región R y valores en la frontera (b) Rejilla

Figura 431. Problema mixto con valores en la frontera del ejemplo 1.

Al sustituir estos resultados en (2b) y simplificar, se tiene

$$\begin{aligned} 2u_{11} \qquad - 4u_{12} + u_{22} &= 1.5 - 3 = -1.5 \\ 2u_{21} + u_{12} - 4u_{22} &= 0 - 6 \;\; = -6. \end{aligned}$$

Junto con (2a) lo anterior conduce, escrito en forma matricial, a

$$(3) \qquad \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.750 \\ 1.125 \\ -1.500 \\ -6.000 \end{bmatrix}$$

La solución es como se indica enseguida; los valores exactos del problema se dan entre paréntesis.

$u_{12} = 0.866$ (exacta 1) $\qquad u_{22} = 1.812$ (exacta 2)

$u_{11} = 0.077$ (exacta 0.125) $\qquad u_{21} = 0.191$ (exacta 0.25) ■

Frontera irregular

Se continuará el estudio de la resolución numérica de problemas con valores frontera para ecuaciones elípticas en una región R del plano xy. Si R tiene una conformación geométrica sencilla, entonces por lo común puede disponerse que ciertos puntos de la malla queden sobre la frontera C de R y, entonces, pueden aproximarse las derivadas parciales como se explicó en la sección anterior. Sin embargo, si C interseca la rejilla

en puntos que no pertenecen a la malla, entonces en los puntos cercanos a la frontera debe procederse de manera diferente, como se indica a continuación.

El punto O de la malla en la figura 432 es de ese tipo. A partir del teorema de Taylor, para O y sus vecinos A y P se obtiene

$$(4) \qquad \begin{aligned} &\text{(a)} \qquad u_A = u_O + ah\frac{\partial u_O}{\partial x} + \frac{1}{2}(ah)^2\frac{\partial^2 u_O}{\partial x^2} + \cdots \\ &\text{(b)} \qquad u_P = u_O - h\frac{\partial u_O}{\partial x} + \frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 u_O}{\partial x^2} + \cdots. \end{aligned}$$

Se descartan los términos indicados por los puntos suspensivos y se elimina $\partial u0/\partial x$. Al multiplicar la ecuación (4b) por a y sumar al resultado la ecuación (4a) se obtiene

$$u_A + au_P \approx (1 + a)u_O + \frac{1}{2}a(a + 1)h^2\frac{\partial^2 u_O}{\partial x^2}.$$

De esta ecuación se despeja la derivada, con lo que se obtiene

$$\frac{\partial^2 u_O}{\partial x^2} \approx \frac{2}{h^2}\left[\frac{1}{a(1 + a)}u_A + \frac{1}{1 + a}u_P - \frac{1}{a}u_O\right].$$

De manera semejante, al considerar los puntos O, B y Q,

$$\frac{\partial^2 u_O}{\partial y^2} \approx \frac{2}{h^2}\left[\frac{1}{b(1 + b)}u_B + \frac{1}{1 + b}u_Q - \frac{1}{b}u_O\right].$$

Sumando,

$$(5) \qquad \nabla^2 u_O \approx \frac{2}{h^2}\left[\frac{u_A}{a(1 + a)} + \frac{u_B}{b(1 + b)} + \frac{u_P}{1 + a} + \frac{u_Q}{1 + b} - \frac{(a + b)u_O}{ab}\right].$$

Por ejemplo, si $a = 1/2$, $b = 1/2$, entonces en lugar del patrón (ver la sección 20.4)

$$\begin{Bmatrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{Bmatrix} \qquad \text{ahora se tiene} \qquad \begin{Bmatrix} & \frac{4}{3} & \\ \frac{2}{3} & -4 & \frac{4}{3} \\ & \frac{2}{3} & \end{Bmatrix},$$

en donde la suma de todos los cinco términos sigue siendo cero (hecho útil para efectos de comprobación).

Usando las mismas ideas, el estudiante puede demostrar que, en el caso de la figura 433, se obtiene

$$(6) \qquad \nabla^2 u_O \approx \frac{2}{h^2}\left[\frac{u_A}{a(a + p)} + \frac{u_B}{b(b + q)} + \frac{u_P}{p(p + a)} + \frac{u_Q}{q(q + b)} - \frac{ap + bq}{abpq}u_O\right],$$

fórmula que toma en cuenta todos los casos concebibles.

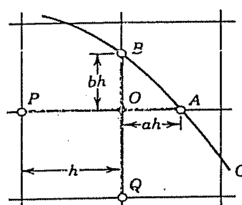


Figura 432. Frontera curva C de una región R, un punto O de la malla próxima a C, y vecinos A, B, P, Q.

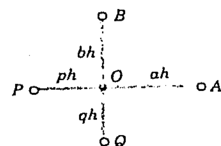


Figura 433. Puntos vecinos A, B, P, Q de un punto O de la malla y notaciones de la fórmula (6).

Ejemplo 2. Problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace. Frontera curva.

Encontrar el potencial u en la región de la figura 434 que tiene los valores frontera dados en la figura; aquí la porción curva de la frontera es un arco del círculo de radio 10 con centro en (0, 0). Usar la rejilla de la figura.

Solución. u es una solución de la ecuación de Laplace. Con base en las fórmulas dadas para los valores frontera $u = x^3$, $u = 512 - 24y^2$, $\cdots$ los valores se calculan en los puntos en que se necesitan; el resultado se muestra en la figura. Para P_{11} y P_{12} se tiene el patrón regular de costumbre, y para P_{21} y P_{22} se usa (6), con lo que se obtiene

$$(7)\quad P_{11}, P_{12}: \left\{\begin{matrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{matrix}\right\}, \quad P_{21}: \left\{\begin{matrix} & 0.5 & \\ 0.6 & -2.5 & 0.9 \\ & 0.5 & \end{matrix}\right\}, \quad P_{22}: \left\{\begin{matrix} & 0.9 & \\ 0.6 & -3 & 0.9 \\ & 0.6 & \end{matrix}\right\}.$$

Se utiliza esto y los valores frontera, y se toman los puntos de la malla en el orden P_{11}, P_{21}, P_{12}, P_{22}. Entonces se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} -4u_{11} + u_{21} + u_{12} \qquad\qquad &= 0 - 27 &&= -27 \\ 0.6u_{11} - 2.5u_{21} \qquad + 0.5u_{22} &= -0.9 \cdot 296 - 0.5 \cdot 216 &&= -374.4 \\ u_{11} \qquad - 4u_{12} + u_{22} &= 702 + 0 &&= 702 \\ 0.6u_{21} + 0.6u_{12} - 3u_{22} &= 0.9 \cdot 352 + 0.9 \cdot 936 &&= 1159.2. \end{aligned}$$

En forma matricial,

$$(8)\quad \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0.6 & -2.5 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0.6 & 0.6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -374.4 \\ 702 \\ 1159.2 \end{bmatrix}.$$

Al aplicar eliminación de Gauss se obtienen los valores (redondeados)

$$u_{11} = -55.6 \qquad u_{21} = 49.2, \qquad u_{12} = -298.5, \qquad u_{22} = -436.3.$$

Resulta evidente que a partir de una malla con tan pocos puntos no es posible esperar gran exactitud. Los valores exactos son

$$u_{11} = -54, \qquad u_{21} = 54, \qquad u_{12} = -297, \qquad u_{22} = -432.$$

En la práctica se utilizaría una rejilla mucho más fina y el sistema grande resultante se resolvería aplicando un método indirecto. ∎

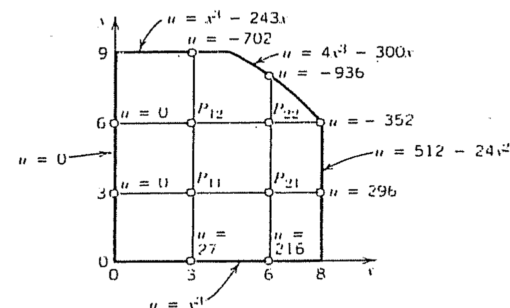


Figura 434. Región, valores frontera del potencial y rejilla del ejemplo 2.

Problemas de la sección 20.5

1. Comprobar los valores dados al final del ejemplo 1, resolviendo el sistema (3) por eliminación de Gauss.
2. Resolver el problema mixto con valores en la frontera para la ecuación de Laplace $\nabla^2 u = 0$ en el rectángulo de la figura 431 (usando la rejilla de la figura 431*b*) y las condiciones frontera $u_x = 0$ sobre el borde izquierdo, $u_x = 3$ sobre el borde derecho, $u_y = x^2$ sobre el borde inferior y $u_y = x^2 - 1$ sobre el borde superior.
3. Resolver el problema mixto con valores en la frontera para la ecuación de Poisson $\nabla^2 u = 2(x^2 + y^2)$ en la región y para la condiciones frontera mostradas en la figura 435, usando la rejilla indicada.

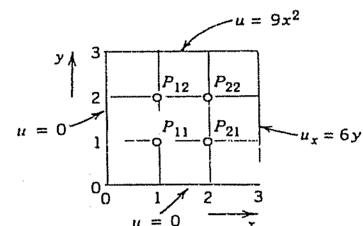


Figura 435. Problema 3.

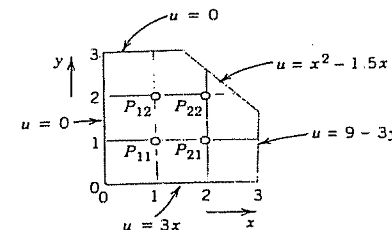


Figura 436. Problema 9.

4. Eliminar $\partial^2 u_O/\partial x^2$ de (4) para demostrar que

$$\frac{\partial u_O}{\partial x} \approx \frac{1}{h}\left[\frac{1}{a(1+a)}u_A - \frac{1-a}{a}u_O - \frac{a}{1+a}u_P\right].$$

5. Comprobar el cálculo muestra que está inmediatamente después de (5).
6. Proporcionar la obtención detallada de (6).
7. Comprobar (7).
8. Resolver (8) por eliminación de Gauss.
9. Resolver la ecuación de Laplace en la región y para los valores frontera mostrados en la figura 436, usando la rejilla indicada. (La porción inclinada de la frontera es $y = 4.5 - x$.)
10. Resolver la ecuación de Poisson $\nabla^2 u = 2$ en la región y para los valores frontera mostrados en la figura 437, usando la rejilla que también se muestra en la figura.

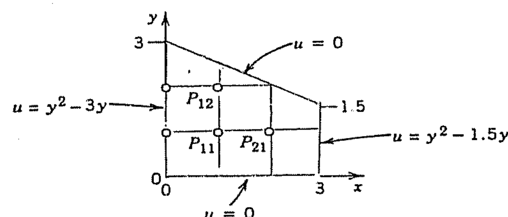


Figura 437. Problema 10.

20.6 MÉTODOS PARA ECUACIONES PARABÓLICAS

El tema de las dos últimas secciones lo constituyeron las ecuaciones elípticas, y ahora la atención se centrará en las ecuaciones parabólicas. Las definiciones de ecuaciones elípticas, parabólicas e hiperbólicas se proporcionaron en la sección 20.4. En esa sección también se mencionó que el comportamiento general de las soluciones difiere de un tipo de ecuación a otro, así como los problemas que revisten interés práctico. Esto se refleja en los métodos numéricos como se describe a continuación. Para los tres tipos de ecuaciones, la ecuación se sustituye por una ecuación en diferencias correspondiente, pero para las ecuaciones *parabólicas* e *hiperbólicas* este hecho no garantiza automáticamente la **convergencia** de la solución aproximada a la solución exacta cuando la malla $h \to 0$; de hecho, ni siquiera garantiza convergencia en absoluto. Para estos dos tipos de ecuaciones se requieren condiciones adicionales (desigualdades) a fin de asegurar la convergencia y la **estabilidad**, en donde esto último significa que perturbaciones pequeñas en los datos iniciales (o errores pequeños en cualquier instante) siguen siendo pequeñas en instantes posteriores.

En esta sección se explicará la resolución numérica del prototipo de las ecuaciones parabólicas, la ecuación del calor en una dimensión

$$u_t = c^2 u_{xx} \qquad (c \text{ constante}).$$

Esta ecuación suele considerarse para x en algún intervalo fijo, por ejemplo $0 \leqq x \leqq L$ y el tiempo $t \geqq 0$, y se prescriben la temperatura inicial $u(x, 0) = f(x)$ (f dada) y las condiciones en la frontera en $x = 0$ y $x = L$ para todo $t \geqq 0$, por ejemplo $u(0, t) = 0$, $u(L, t) = 0$. Puede suponerse que $c = 1$ y $L = 1$; lo anterior puede lograrse siempre mediante una transformación lineal de x y t (problema 11). Entonces la **ecuación del calor** y estas condiciones son

(1) $$u_t = u_{xx} \qquad 0 \leqq x \leqq 1,\ t \geqq 0$$

(2) $$u(x, 0) = f(x) \qquad \text{(condición inicial)}$$

(3) $$u(0, t) = u(1, t) = 0 \qquad \text{(condiciones en la frontera).}$$

Una aproximación sencilla en diferencias finitas de (1) es [ver (6a) en la sección 20.4]

(4) $$\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{ij}) = \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}).$$

En la figura 438 se muestran una rejilla y los puntos de la malla correspondientes. El tamaño de la malla es h en la dirección x y k en

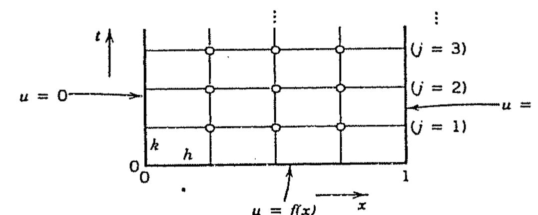


Figura 438. Rejilla y puntos de la malla correspondientes a (4), (5).

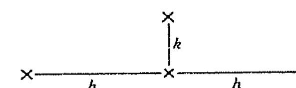


Figura 439. Los cuatro puntos en (4) y (5).

la dirección t. La fórmula (4) comprende los cuatro puntos que se muestran en la figura 439. En la izquierda se utilizó un cociente de diferencias *hacia adelante* porque en el inicio se carece de información para t negativo. Con base en (4) se calcula $u_{i,j+1}$, lo que corresponde al renglón $j + 1$ del tiempo, en términos de las otras tres u que corresponden al renglón j del tiempo; al resolver (4) para $u_{i,j+1}$ se tiene

(5) $$u_{i,j+1} = (1-2r)u_{ij} + r(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}), \qquad r = \frac{k}{h^2}.$$

Los cálculos por medio de esta fórmula son sencillos y directos. Sin embargo, puede demostrarse que para la convergencia de este método es crucial la condición

(6) $$r = \frac{k}{h^2} \leqq \frac{1}{2},$$

es decir, que u_{ij} tenga un coeficiente positivo en (5), o bien (para $r = 1/2$), que u_{ij} no aparezca en (5). Intuitivamente, (6) significa que no hay que moverse demasiado rápido en la dirección t. Enseguida se proporciona un ejemplo.

Método de Crank-Nicolson

La condición (6) es una desventaja en la práctica. En efecto, a fin de alcanzar una exactitud suficiente es necesario elegir h pequeño, lo cual hace que, por (6), k sea muy pequeño. Por ejemplo, si $h = 0.1$, entonces $k \leqq 0.005$. Y un cambio a $1/2h$ cuadruplica el número de pasos en el tiempo necesarios para alcanzar un cierto valor t. En consecuencia, debe buscarse un método que se base en una discretización más satisfactoria de la ecuación del calor.

Un método de este tipo que no impone restricción alguna sobre $r = k/h^2$ es el **método de Crank-Nicolson**, en el que se usan valores de u en los seis puntos de la figura 440. La idea del método es la sustitución del cociente de diferencias del miembro derecho de (4) por 1/2 veces la suma de dos de esos cocientes en diferencias en dos renglones del tiempo (ver la figura 440). Entonces en lugar de (4), se tiene

(7) $$\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{ij}) = \frac{1}{2h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) + \frac{1}{2h^2}(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}).$$

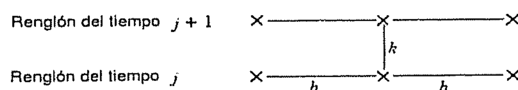


Figura 440. Los seis puntos en las fórmulas de Crank-Nicolson (7) y (8).

Al multiplicar por $2k$ y escribir $r = k/h^2$ como antes, los tres términos correspondientes al renglón $j + 1$ del tiempo pueden agruparse a la izquierda y los tres términos correspondientes al renglón j del tiempo pueden agruparse a la derecha; así se obtiene

(8) $$(2+2r)u_{i,j+1} - r(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}) = (2-2r)u_{ij} + r(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}).$$

¿Cómo usar (8)? En general, los tres valores a la izquierda son desconocidos, mientras que se conocen los tres de la derecha. Si el intervalo $0 \leqq x \leqq 1$ de las x, dado en (1), se divide en n intervalos iguales, se tienen $n - 1$ puntos internos de la malla por renglón del tiempo (ver la figura 438, en donde $n = 4$). Luego, para $j = 0$ e $i = 1, \cdots, n-1$, con la fórmula (8) se obtiene un sistema lineal de $n - 1$ ecuaciones para los $n - 1$ valores desconocidos $u_{11}, u_{21}, \cdots, u_{n-1,1}$ en el primer renglón del tiempo en términos de los valores iniciales $u_{00}, u_{10}, \ldots, u_{n0}$ y los valores frontera u_{01}, u_{n1} (= 0). De manera semejante para $j = 1, j = 2$, etc.; es decir, para cada renglón del tiempo se tiene que resolver tal sistema de $n - 1$ ecuaciones lineales que resulta de (8).

Aun cuando ya no se restringe $r = k/h^2$, con una r más pequeña se obtienen mejores resultados. En la práctica, se elige una k con la que pueda ahorrarse una cantidad considerable de trabajo, sin que r se haga demasiado grande. Por ejemplo, a menudo una buena elección es $r = 1$ (lo cual sería imposible con el método directo previo). Entonces, (8) queda simplemente como

(9) $$4u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j}.$$

Ejemplo 1. Temperatura en un varilla. Método de Crank-Nicolson, método directo.

Considerar una varilla metálica, aislada lateralmente, de longitud 1 y tal que $c^2 = 1$ en la ecuación del calor. Suponer que los extremos de la varilla se mantienen a la temperatura $u = 0$°C y que la temperatura de la misma en algún instante, por ejemplo $t = 0$, es $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$. Aplicar el método de Crank-Nicolson con $h = 0.2$ y $r = 1$ para encontrar la temperatura $u(x, t)$ en la varilla para $0 \leqq t \leqq 0.2$. Comparar el resultado con la solución exacta. Aplicar también (5) con una r que satisfaga (6), por ejemplo, $r = 0.25$, y con valores que no satisfagan (6), por ejemplo, $r = 1$ y $r = 2.5$.

Solución aplicando el método de Crank-Nicolson. Como $r = 1$, entonces la fórmula (8) asume la forma (9). Como $h = 0.2$ y $r = k/h^2 = 1$, se tiene $k = h^2 = 0.04$. Por tanto, es necesario ejecutar cinco pasos. En la figura 441 se muestra la rejilla. Se necesitarán los valores iniciales

$$u_{10} = \operatorname{sen} 0.2\pi = 0.587\ 785, \qquad u_{20} = \operatorname{sen} 0.4\pi = 0.951\ 057.$$

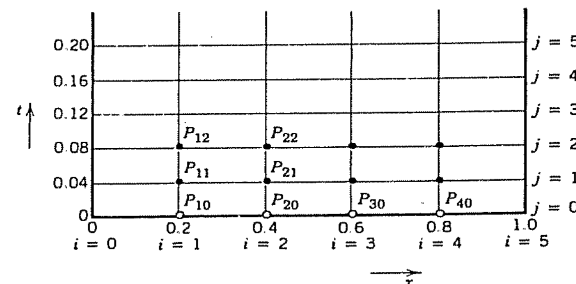


Figura 441. Rejilla en el ejemplo 1.

También, $u_{30} = u_{20}$ y $u_{40} = u_{10}$. (Recordar que u_{10} significa u en P_{10} de la figura 441, etc.) En cada renglón del tiempo de la figura 441 hay cuatro puntos internos de la malla. Así, en cada paso del tiempo sería necesario resolver 4 ecuaciones con 4 incógnitas. Pero como la distribución inicial de temperatura es

simétrica con respecto a $x = 0.5$ y $u = 0$ en ambos extremos para todo t, se tiene $u_{31} = u_{21}$, $u_{41} = u_{11}$ en el primer renglón del tiempo y de manera semejante para los demás renglones. Así, cada sistema se reduce a un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas. Por (9), ya que $u_{31} = u_{21}$, para $j = 0$ estas ecuaciones son

$$4u_{11} - u_{21} = u_{00} + u_{20} = 0.951\ 057$$

$$-u_{11} + 4u_{21} - u_{21} = u_{10} + u_{20} = 1.538\ 842.$$

La solución es $u_{11} = 0.399274$, $u_{21} = 0.646039$. De manera semejante, para $j = 1$ se tiene el sistema

$$4u_{12} - u_{22} = u_{01} + u_{21} = 0.646\ 039$$

$$-u_{12} + 3u_{22} = u_{11} + u_{21} = 1.045\ 313.$$

La solución es $u_{12} = 0.271221$, $u_{22} = 0.438845$, etc. Así se obtiene la distribución de temperatura (figura 442):

t	$x = 0$	$x = 0.2$	$x = 0.4$	$x = 0.6$	$x = 0.8$	$x = 1$
0.00	0	0.588	0.951	0.951	0.588	0
0.04	0	0.399	0.646	0.646	0.399	0
0.08	0	0.271	0.439	0.439	0.271	0
0.12	0	0.184	0.298	0.298	0.184	0
0.16	0	0.125	0.202	0.202	0.125	0
0.20	0	0.085	0.138	0.138	0.085	0

Comparación con la solución exacta. Este problema puede resolverse exactamente separando variables (ver la sección 11.); el resultado es

$$u(x, t) = \operatorname{sen} \pi x\, e^{-\pi^2 t}. \tag{10}$$

Solución aplicando el método directo (5) con r = 0.25. Para $h = 0.2$ y $r = k/h^2 = 0.25$ se tiene $k = rh^2 = 0.25 \cdot 0.04 = 0.01$. Por tanto, ¡es necesario ejecutar cuatro veces más pasos que con el método de Crank-Nicolson! La fórmula ((5) con $r = 0.25$ es

$$u_{i,j+1} = 0.25(u_{i-1,j} + 2u_{ij} + u_{i+1,j}). \tag{11}$$

Puede aplicarse la simetría. Para $j = 0$ se necesitan $u_{00} = 0$, $u_{10} = 0.587785$, $u_{20} = u_{30} = 0.951057$ y se calcula

$$u_{11} = 0.25(u_{00} + 2u_{10} + u_{20}) = 0.531\ 657$$

$$u_{21} = 0.25(u_{10} + 2u_{20} + u_{30}) = 0.25(u_{10} + 3u_{20}) = 0.860\ 239.$$

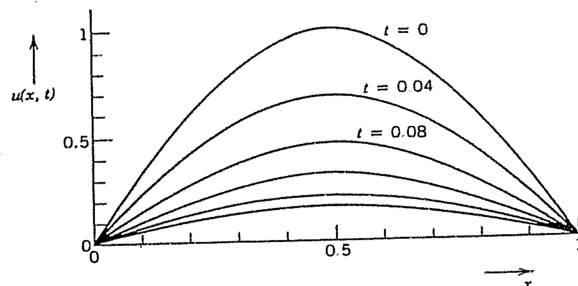


Figura 442. Distribución de la temperatura en la varilla del ejemplo 1.

Por supuesto, en las fórmulas pueden omitirse los términos frontera $u_{01} = 0$, $u_{02} = 0, \cdots$. Para $j = 1$ se calcula

$$u_{12} = 0.25(2u_{11} + u_{21}) = 0.480\ 888$$

$$u_{22} = 0.25(u_{11} + 3u_{21}) = 0.778\ 094$$

y así sucesivamente. Es necesario ejecutar 20 pasos, pero los valores numéricos muestran que la exactitud sólo es aproximadamente la misma que la de los valores CN obtenidos al aplicar el método de Crank-Nicolson (valores exactos dados hasta tres decimales):

t	$x = 0.2$			$x = 0.4$		
	CN	Por (11)	Exacto	CN	Por (11)	Exacto
0.04	0.399	0.393	0.396	0.646	0.637	0.641
0.08	0.271	0.263	0.267	0.439	0.426	0.432
0.12	0.184	0.176	0.180	0.298	0.285	0.291
0.16	0.125	0.118	0.121	0.202	0.191	0.196
0.20	0.085	0.079	0.082	0.138	0.128	0.132

Falla de (5) con r violando (6). La fórmula (5) con $h = 0.2$ y $r = 1$, lo cual viola (6), es

$$u_{i,j+1} = u_{i-1,j} - u_{ij} + u_{i+1,j}$$

y se obtienen valores muy deficientes; algunos de ellos son

t	$x = 0.2$	Exacta	$x = 0.4$	Exacta
0.04	0.363	0.396	0.588	0.641
0.12	0.139	0.180	0.225	0.291
0.20	0.053	0.082	0.086	0.132

La fórmula (5) con un r aun mayor, $r = 2.5$ (y $h = 0.2$, como antes), proporciona resultados completamente sin sentido; algunos de ellos son

t	$x = 0.2$	Exacta	$x = 0.4$	Exacta
0.1	0.0265	0.2191	0.0429	0.3545
0.3	0.0001	0.0304	0.0001	0.0492
0.5	0.0018	0.0042	−0.0011	0.0068

■

Problemas de la sección 20.6

1. Aplicando la fórmula de Crank-Nicolson (9) con $h = 0.2$ para $0 \leq t \leq 0.20$, resolver la ecuación del calor (1) para la condición inicial $f(x) = x$ si $0 \leq x \leq 1/2$, $f(x) = 1 - x$ si $1/2 < x \leq 1$, y la condición en la frontera (3).
2. Resolver el problema 1 por el método directo, con $h = 0.2$ y $r = 0.25$; ejecutar ocho pasos y comparar los últimos valores con los valores de Crank-Nicolson 0.107, 0.175 (3D) y con los valores 0.108, 0.175 (exactos hasta 3D).
3. Con base en la serie de la sección 11.5, ejemplo 3, calcular u en el problema 1 para $x = 0.2, 0.4$ y $t = 0.04, 0.08, \cdots, 0.20$.
4. La exactitud de los resultados obtenidos por el método directo depende de r ($\leq 1/2$). Ilustrar este hecho reconsiderando el problema 2, tomando $r = 1/2$ (y $h = 0.2$, como antes), ejecutando 4 pasos y comparando los valores para $t = 0.04$ y 0.08 con los del problema 2.

5. Aplicando el método directo definido por (5), con $h = 1$ y $k = 0.5$, determinar la temperatura en $t = 2$ en una varilla metálica, aislada lateralmente, de longitud 10 cuyos extremos en $x = 0$ y $x = 10$ se mantienen a temperatura cero y cuya temperatura inicial es $f(x) = 0.1x - 0.01x^2$.
6. Resolver el problema 5 tomando $k = 0.25$ (en lugar de 0.5) y dejando todo lo demás como antes. ¿Hasta cuántos dígitos coinciden las dos soluciones?
7. Extender los cálculos del problema 5 hasta $t = 4$. Luego encontrar la temperatura en $t = 4$ y $x = 2, 4, 6, 8$ aplicando la fórmula de Crank-Nicolson (9) con $h = 2$ (y así $k = 4$), y comparar los valores.
8. Encontrar la solución exacta del problema 5 aplicando el método de la sección 11.5. Observar que la serie así obtenida converge rápidamente, de modo que puede esperarse que la suma de los 2 primeros términos proporcione valores 3D de la solución para $t = 2$ y $t = 4$. Calcular $u(2, 2)$ y $u(4, 2)$ de esta manera y comparar con los valores del problema 5. Calcular $u(2, 4)$ y $u(4, 4)$ y comparar con los valores del problema 7.
9. Si se aisla el extremo izquierdo de una varilla aislada lateralmente que se extiende desde $x = 0$ hasta $x = 1$, entonces la condición en la frontera en $x = 0$ es $u_n(0, t) = u_r(0, t) = 0$. Demostrar que al aplicar el método directo definido por (5) es posible calcular $u_{0,j+1}$ por medio de la fórmula

$$u_{0,j+1} = (1 - 2r)u_{0j} + 2ru_{1j}.$$

10. Aplicando el método directo con $h = 0.2$ y $r = 0.25$, determinar la temperatura $u(x, t)$, $0 \leq t \leq 0.12$ en una varilla aislada lateralmente que se extiende desde $x = 0$ hasta $x = 1$ si $u(x, 0) = 0$, el extremo izquierdo está aislado y el extremo derecho se mantiene a la temperatura $g(t) = \text{sen } 50/3\pi t$. *Sugerencia.* Consultar el problema 9.
11. **(Forma adimensional)** Demostrar que la ecuación del calor $\tilde{u}_{\tilde{t}} = c2\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}$, $0 \leq \tilde{x} \leq L$, puede transformarse en la forma estándar "adimensional" $u_t = u_{xx}$, $0 \leq x \leq 1$, haciendo $x = \tilde{x}/L$, $t = c^2\tilde{t}/L^2$, $u = \tilde{u}/u_0$, en donde u_0 es cualquier temperatura constante.

20.7 MÉTODOS PARA ECUACIONES HIPERBÓLICAS

En esta sección se considerará la resolución numérica de problemas que comprenden ecuaciones hiperbólicas. Se explicará un método estándar en términos de un planteamiento típico para el prototipo de una ecuación hiperbólica, la **ecuación de onda**:

(1)	$u_{tt} = u_{xx}$	$0 \leqq x \leqq 1,\ t \geqq 0$
(2)	$u(x, 0) = f(x)$	(Desplazamiento inicial dado)
(3)	$u_t(x, 0) = g(x)$	(Velocidad inicial dada)
(4)	$u(0, t) = u(1, t) = 0$	(Condiciones en la frontera).

Observar que una ecuación $u_{tt} = c^2u_{xx}$ y otro intervalo x pueden reducirse a la forma (1) por medio de una transformación lineal de x y t. (Esto es semejante a lo considerado en la sección 20.6, problema 11.)

Por ejemplo, (1)-(4) es el modelo de una cuerda elástica vibrante con extremos fijos en $x = 0$ y $x = 1$ (ver la sección 11.2). Aunque en (7) de la sección 11.4 se proporciona una solución analítica del problema, éste se usará para explicar las ideas básicas del método numérico que también resulten pertinentes para ecuaciones hiperbólicas más complicadas.

Si, como antes, las derivadas se sustituyen por cocientes en diferencias, entonces por (1) [ver (6) en la sección 20.4 con $y = t$], se obtiene

$$(5) \qquad \frac{1}{k^2}(u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}) = \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j})$$

en donde h es el tamaño de malla en x y j es el tamaño de malla en t. Esta ecuación en diferencias relaciona cinco puntos, como se muestra en la figura 443*a*. Lo anterior sugiere una rejilla rectangular semejante a la utilizada para las ecuaciones parabólicas en la sección precedente. Se toma $r^* = k^2/h^2 = 1$. Entonces, se cancela u_{ij} y se tiene

$$(6) \qquad \boxed{u_{i,j+1} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - u_{i,j-1}} \qquad \text{(Fig. 443}b\text{).}$$

Puede demostrarse que para $0 < r^* \leqq 1$ este método es estable, de modo que por (6) pueden esperarse resultados razonables para datos iniciales sin discontinuidades. (Para una ecuación hiperbólica, estas últimas se propagarían hacia el dominio de la solución, fenómeno que sería difícil de tratar con la rejilla que se está usando; respecto a los detalles, consultar la obra citada en el apéndice 1 como referencia [E8].)

La ecuación (6) todavía implica tres pasos en el tiempo, $j - 1, j, j + 1$, mientras que las fórmulas en el caso parabólico sólo implicaron dos pasos en el tiempo. Además, ahora se tienen dos condiciones iniciales. Así, cabe preguntarse cómo se ha de arrancar y cómo puede emplearse la condición inicial (3). Esto puede hacerse como sigue: a partir de $u_t(x, 0) = g(x)$ se obtiene la fórmula en diferencias

$$(7) \qquad \frac{1}{2k}(u_{i1} - u_{i,-1}) = g_i, \qquad \text{por tanto} \qquad u_{i,-1} = u_{i1} - 2kg_i$$

en donde $g_i = g(ih)$. Para $t = 0$, es decir, $j = 0$, la ecuación (6) es

$$u_{i1} = u_{i-1,0} + u_{i+1,0} - u_{i,-1}.$$

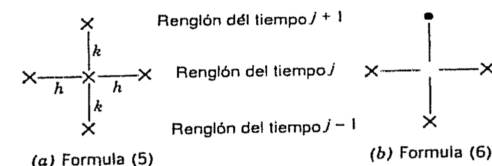


Figura 443. Puntos de la malla usados en (5) y (6).

En la expresión anterior se sustituye (7), a continuación se pasa $-u_{i1}$ de la derecha hacia la izquierda y se divide entre 2, con lo que se obtiene

$$(8) \qquad \boxed{u_{i1} = \tfrac{1}{2}(u_{i-1,0} + u_{i+1,0}) + kg_i}$$

que expresa u_{i1} en términos de los datos iniciales.

Ejemplo 1. Cuerda vibrante.

Aplicar el método presente de resolución numérica, con $h = k = 0.2$, al problema (1)–(4), en donde

$$f(x) = \text{sen}\ \pi x, \qquad g(x) = 0.$$

Solución. La rejilla es la misma que la de la figura 441, sección 20.6, excepto por los valores de t, que ahora son 0.2, 0.4, · · · (en lugar de 0.04, 0.08, · · ·). Los valores iniciales $u_{00}, u_{10}, \cdots$ son los mismos que en el ejemplo 1, sección 20.6. Con base en (8) y $g(x) = 0$ se tiene

$$u_{i1} = \tfrac{1}{2}(u_{i-1,0} + u_{i+1,0}).$$

A partir de lo anterior se calcula

$$u_{11} = \tfrac{1}{2}(u_{00} + u_{20}) = \tfrac{1}{2} \cdot 0.951\ 057 = 0.475\ 528$$

$$u_{21} = \tfrac{1}{2}(u_{10} + u_{30}) = \tfrac{1}{2} \cdot 1.538\ 842 = 0.769\ 421,$$

y $u_{31} = u_{21}$, $u_{41} = u_{11}$ por simetría, como en el ejemplo 1 de la sección 20.6. A partir de (6) con $j = 1$, usando $u_{01} = u_{02} = \cdots = 0$, ahora se calcula

$$u_{12} = u_{01} + u_{21} - u_{10} = 0.769\ 421 - 0.587\ 785 = 0.181\ 636$$

$$u_{22} = u_{11} + u_{31} - u_{20} = 0.475\ 528 + 0.769\ 421 - 0.951\ 057 = 0.293\ 892,$$

y $u_{32} = u_{22}$, $u_{42} = u_{12}$ por simetría, etc. Así se obtienen los siguientes valores del desplazamiento $u(x, t)$ de la cuerda sobre la primera mitad del ciclo:

t	$x = 0$	$x = 0.2$	$x = 0.4$	$x = 0.6$	$x = 0.8$	$x = 1$
0.0	0	0.588	0.951	0.951	0.588	0
0.2	0	0.476	0.769	0.769	0.476	0
0.4	0	0.182	0.294	0.294	0.182	0
0.6	0	−0.182	−0.294	−0.294	−0.182	0
0.8	0	−0.476	−0.769	−0.769	−0.476	0
1.0	0	−0.588	−0.951	−0.951	−0.588	0

Estos valores son exactos, en donde la solución exacta del problema es (ver la sección 11.3)

$$u(x, t) = \text{sen}\ \pi x \cos \pi t.$$

La razón de la exactitud se concluye a partir de la solución de d'Alembert (6), sección 11.4. (Ver el problema 4, un poco más adelante.) ∎

Aquí termina el capítulo 20 sobre métodos numéricos para ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. Se hizo hincapié en algunas ideas y métodos básicos en este campo, que está lleno de preguntas abiertas interesantes y se está desarrollando con bastante rapidez. Aquí también termina la parte E sobre métodos numéricos.

Problemas de la sección 20.7

1. Resolver el problema de la cuerda vibrante (1)-(4) por medio del presente método numérico con $h = k = 0.2$ sobre el intervalo t dado para la velocidad inicial 0 y una deflexión inicial dada $f(x)$.

1. $0 \leqq t \leqq 2,\ f(x) = 0.1x(1 - x)$
2. $0 \leqq t \leqq 1,\ f(x) = x^2(1 - x^2)$
3. $0 \leqq t \leqq 1,\ f(x) = x$ si $0 \leqq x \leqq 0.2$, $f(x) = 0.25(1 - x)$ si $0.2 < x \leqq 1$

4. Demostrar que con base en la solución de d'Alembert (14) en la sección 11.4, con $c = 1$ se concluye que con (6) en esta sección se obtiene el valor exacto $u_{i,j+1} = u(ih, (j + 1)h)$.

5. Si la cuerda cuyas vibraciones están regidas por (1) empieza a moverse a partir de su posición de equilibrio con velocidad inicial $g(x) = \text{sen}\ \pi x$, ¿cuál es su desplazamiento en el instante $t = 0.4$ y $x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$? (Aplicar el método presente con $h = 0.2$, $k = 0.2$. Comparar con los valores exactos obtenidos a partir de (13) en la sección 11.4.)

6. Calcular valores aproximados en el problema 5, usando una rejilla más fina ($h = 0.1$, $k = 0.1$), y observar el incremento en la exactitud.

7. Ilustrar el procedimiento de inicio para el método presente, en el caso en que tanto f como g no sean idénticamente cero, por ejemplo,

$$f(x) = 1 - \cos 2\pi x, \qquad g(x) = x - x^2;$$

elegir $h = k = 0.1$ y calcular dos pasos en el tiempo.

8. Demostrar que (13) en la sección 11.4 proporciona como otra fórmula de inicio

$$u_{i1} = \frac{1}{2}(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}) + \frac{1}{2}\int_{x_i-k}^{x_i+k} g(s)\, ds$$

(en donde, si es necesario, la integral puede evaluarse numéricamente). ¿En qué caso lo anterior es idéntico a (8)?

9. Calcular u en el problema 7 para $t = 0.1$ y $x = 0.1, 0.2, \cdots, 0.9$, aplicando la fórmula del problema 8, y comparar los valores obtenidos.

10. Resolver numéricamente (1), sujeto a las condiciones

$$u(x, 0) = x^2, \qquad u_t(x, 0) = 2x, \qquad u_x(0, t) = 2t, \qquad u(1, t) = (1 + t)^2,$$

eligiendo $h = k = 0.2$ (5 pasos en el tiempo).

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 20

1. Explicar el método de Euler y la idea a partir de la cual se obtuvo.

2. El método de Euler, ¿es útil desde un punto de vista práctico? ¿Cómo es posible mejorarlo?

3. En cada paso del método de Runge-Kutta se calcularon cantidades auxiliares: ¿por qué?
4. Explicar las semejanzas y las diferencias de los métodos de Runge-Kutta y de Runge-Kutta-Nyström.
5. Algunos de los métodos se obtuvieron a partir de la serie de Taylor. ¿Puede el lector recordar cómo?
6. ¿Qué se entiende por método de un paso y método de pasos múltiples?
7. ¿Cuáles son las ventajas y las desventajas de los métodos de pasos múltiples?
8. ¿Qué sabe el lector sobre la elección del tamaño del paso? ¿Y sobre las ventajas y las desventajas de un tamaño de paso muy pequeño?
9. ¿Puede recordar el lector la idea a partir de la cual se obtuvo el método de Adams-Bashford?
10. Explicar la diferencia entre el método de Adams-Bashford y el método de Adams-Moulton.
11. Explicar por qué y cómo se usaron las diferencias finitas en este capítulo.
12. En los métodos numéricos para la ecuación de Laplace $\nabla^2 u = 0$ en dos variables, ¿por medio de qué fórmula se relacionó u en un punto P con u en sus vecinos E, N, O, S?
13. Obtener de memoria la fórmula en el problema 12.
14. Si se toman una rejilla y una solución de la ecuación de Laplace, por ejemplo, $u = e^x \cos y$, ¿es posible esperar que la fórmula del problema 12 se cumpla exactamente?
15. ¿Cómo se manejaron los problemas con valores frontera sobre dominios de forma irregular? Escribir lo que recuerda el lector y después consultar más detalles en el libro.
16. ¿Cuál es la idea de usar datos específicos para la derivada normal sobre la frontera de una región?
17. ¿Qué se entiende por ecuación elíptica, parabólica e hiperbólica? Mencionar y escribir una ecuación de cada uno de estos tipos.
18. ¿Por qué se requieren diferentes métodos numéricos para resolver distintos tipos de ecuaciones diferenciales parciales?
19. ¿Cuántas condiciones iniciales se prescribieron para la ecuación de onda? ¿Y para la ecuación del calor?
20. ¿Es posible que alguno de los métodos diverja algunas veces? Explicar la respuesta.
21. Resolver $y' = 2xy$, $y(0) = 1$ aplicando el método de Euler (10 pasos, $h = 0.1$). Calcular los errores.
22. Resolver $y' = 2xy + 1$, $y(0) = 0$ aplicando el método de Euler (10 pasos, $h = 0.1$). Escribir la solución exacta como una integral.
23. Aplicar el método de Euler mejorado al problema con valor inicial $y' = 2x$, $y(0) = 0$, eligiendo $h = 0.1$. ¿Por qué los errores son cero?
24. Calcular $y = e^x$ para $x = 0, 0.1, 0.2, \cdots, 1.0$ aplicando el método de Runge-Kutta a $y' = y$, $y(0) = 1$, $(h = 0.1)$. Demostrar que los cinco primeros decimales del resultado son correctos.
25. Aplicar el método de Runge-Kutta al problema $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$. Elegir $h = 0.1$, calcular 2 pasos y comparar con los valores exactos hasta 8D 0.10033467 y 0.20271004. Resolver el problema analíticamente.
26. Resolver $y' = (x + y - 4)^2$, $y(0) = 4$, aplicando el método de Runge-Kutta con paso $h = 0.2$ para $x = 0, 0.2, \cdots, 1.4$.
27. Demostrar que al aplicar el método de la sección 20.2 a un polinomio de primer grado se obtienen las fórmulas predictora-correctora para pasos múltiples

$$y^*_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1}), \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n).$$

28. Aplicar el método de pasos múltiples en el problema 27 al problema con valor inicial $y' = x + y$, $y(0) = 0$, eligiendo $h = 0.2$ y ejecutando cinco pasos. Comparar con los valores exactos.
29. Resolver $y' = (y - x - 1)^2 + 2$, $y(0) = 1$ para $0 \leq x \leq 1$ aplicando el método de Adams-Moulton (sección 20.2) con $h = 0.1$ y los valores de inicio del ejemplo 4 en la sección 20.1.

Aplicar el método definido por (4) en la sección 20.3, con $h = 0.1$, a los problemas con valor inicial dados (5 pasos) y comparar con la solución exacta.

30. $y'' = y$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$
31. $y'' = y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
32. $y'' = xy' - 3y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -6$. Solución exacta $y = 2x^3 - 6x$
33. Aplicar el método de Runge-Kutta-Nyström al problema con valor inicial $y'' = -y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$; elegir $h = 0.2$ y ejecutar cinco pasos. Comparar con la solución exacta.

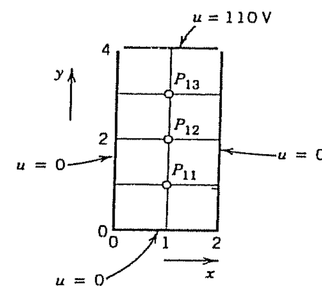


Figura 444. Problema 35.

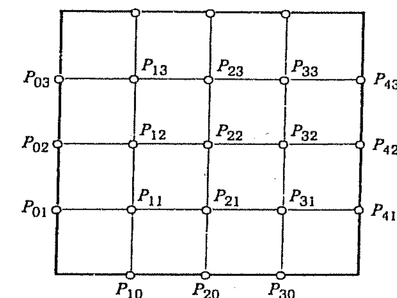


Figura 445. Problemas 36-38.

34. En el problema 33, sustituir $h = 0.2$ por $h = 0.1$, ejecutar 4 pasos y comparar los resultados con los del problema 33 y con los valores exactos hasta 9D 0.099833417, 0.198669331, 0.295520207, 0.389418342.
35. Encontrar valores aproximados bastos del potencial electrostático en P_{11}, P_{12}, P_{13} en la figura 444 que están en un campo entre placas conductoras (que en la figura 444 aparecen como los lados de un rectángulo) mantenidas a potenciales de 0 y 220 volts, como se muestra. (Usar la rejilla indicada.)

Encontrar el potencial en la figura 445 usando la rejilla dada y los siguientes valores frontera:

36. $u = 70$ sobre los lados superior e izquierdo, $u = 0$ sobre los lados inferior y derecho.
37. $u(P_{10}) = u(P_{30}) = 960$, $u(P_{20}) = -480$, $u = 0$ en otras partes de la frontera
38. $u(P_{01}) = u(P_{03}) = u(P_{41}) = u(P_{43}) = 200$, $u(P_{10}) = u(P_{30}) = -400$, $u(P_{20}) = 1600$, $u(P_{02}) = u(P_{42}) = u(P_{14}) = u(P_{24}) = u(P_{34}) = 0$
39. Comprobar (13) en la sección 20.4 para el sistema (12) y demostrar que A en (12) es no singular.
40. La fórmula (17) en la sección 20.4 con $p = 0$ no funcionaría. Demostrar ésto aplicando la fórmula al problema con valor inicial en el ejemplo 2 de la sección 20.4, con la rejilla y los valores de inicio como antes; ejecutar 2 pasos. ¿Qué sucede?

41. Resolver la ecuación del calor (1), sección 20.6, para la condición inicial $f(x) = x$ si $0 \leqq x \leqq 0.2$, $f(x) = 0.25(1 - x)$ si $0.2 < x \leqq 1$ y la condición en la frontera (3), sección 20.6, aplicando el método directo [fórmula (5) en la sección 20.6] con $h = 0.2$ y $k = 0.01$, de modo que como respuesta se obtengan valores de la temperatura en $t = 0.05$.

42. Una varilla homogénea aislada lateralmente con extremos en $x = 0$ y $x = 1$ está a temperatura inicial 0. El extremo izquierdo se mantiene a 0, mientras que la temperatura del extremo derecho varía senoidalmente según la ecuación

$$u(t, 1) = g(t) = \operatorname{sen} \tfrac{25}{3}\pi t.$$

Encontrar la temperatura $u(x, t)$ de la varilla solución de (1) en la sección 20.6 aplicando el método directo con $h = 0.2$ y $r = 0.5$ (un periodo, es decir, $0 \leqq t \leqq 0.24$).

43. Encontrar $u(x, 0.12)$ y $u(x, 0.24)$ en el problema 42 si el extremo izquierdo de la varilla se mantiene a $-g(t)$ (en lugar de a 0), y todos los demás datos permanecen iguales.

44. Encontrar cómo es posible aplicar los resultados del problema 42 para obtener los resultados del problema 43. Para comprobar la respuesta del problema 43, usar los valores 0.054, 0.172, 0.325, 0.406 ($t = 0.12$, $x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$) y -0.009, -0.086, -0.252, -0.353 ($t = 0.24$) de la respuesta del problema 42.

45. Obtener la aproximación en diferencias de la ecuación del calor.

Resumen del capítulo 20

Métodos numéricos para ecuaciones diferenciales

En este capítulo se analizaron métodos numéricos para ecuaciones diferenciales ordinarias (secciones 20.1-20.3) y ecuaciones diferenciales parciales (secciones 20.4-20.7). Para las ecuaciones de primer orden se consideraron problemas con valor inicial de la forma (sección 20.1)

$$(1) \qquad y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Pueden obtenerse métodos numéricos para resolver tal problema al truncar la serie de Taylor

$$y(x + h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + \cdots$$

donde, por (1), $y' = f$, $y'' = f' = \partial f/\partial x + (\partial f/\partial y)y'$, etc. Al truncar después del término hy' se obtiene el *método de Euler*, en donde se calcula paso a paso

$$(2) \qquad y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \qquad (n = 0, 1, \cdots).$$

Tomando en cuenta un término más se obtiene el *método de Euler mejorado* o *método de Heun*. Ambos métodos muestran la idea básica de manera sencilla, aunque son demasiado inexactos para casi todos los propósitos prácticos. Al truncar después del término en h^4 se obtiene el importante **método de Runge-Kutta** (o de cuarto orden). La idea fundamental en este método y en métodos

semejantes es la sustitución de la evaluación engorrosa de las derivadas por la evaluación de $f(x, y)$ en puntos idóneos (x, y); por tanto, en cada paso primero se calculan cuatro cantidades auxiliares (sección 20.1)

$$(3a) \qquad \begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}k_2) \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \end{aligned}$$

y luego a partir de éstas se calcula el nuevo valor

$$(3b) \qquad y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Éste es un **método de un paso**, ya que y_{n+1} se calcula a partir de los datos de un solo paso.

En un **método de pasos múltiples** se usan datos de varios pasos precedentes, con lo que se evitan cálculos como (3a). Al integrar polinomios de interpolación cúbicos se obtuvo como método de pasos múltiples el importante **método de Adams-Moulton**, en el que primero se calcula el **predictor** (sección 20.2)

$$(4a) \qquad y^*_{n+1} = y_n + \frac{1}{24} h(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

en donde $f_j = f(x_j, y_j)$, y a partir del predictor se calcula el **corrector** (el nuevo valor actual)

$$(4b) \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{24} h(9f^*_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})$$

en donde $f^*_{n+1} = f(x_{n+1}, y^*_{n+1})$. Aquí, para iniciar, y_1, y_2, y_3 deben calcularse aplicando el método de Runge-Kutta o algún otro método exacto.

El tema de la sección 20.3 lo constituyeron las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, en particular, el **método de Runge-Kutta-Nyström**, que es una extensión del método de Runge-Kutta a estas ecuaciones.

Los métodos numéricos para las **ecuaciones diferenciales parciales** se obtienen al sustituir las derivadas parciales por cocientes en diferencias. Lo anterior conduce a ecuaciones en diferencias de aproximación, para la **ecuación de Laplace** a (sección 20.4)

$$(5) \qquad u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{ij} = 0,$$

para la **ecuación del calor** a (sección 20.6)

$$(6)\qquad \frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{ij}) = \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j})$$

y para la **ecuación de onda** a (sección 20.7)

$$(7)\qquad \frac{1}{k^2}(u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}) = \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j});$$

aquí, h y k son los tamaños de la malla de una rejilla en las direcciones x y y, respectivamente, donde en (6) y (7) la variable y es el tiempo t.

Las ecuaciones anteriores son *elíptica*, *parabólica* e *hiperbólica*, respectivamente. Los métodos numéricos correspondientes difieren por lo siguiente. Para las ecuaciones elípticas se tienen problemas con valores frontera, y para éstos se analizaron el **método de Gauss-Seidel** o **de Liebmann** y el **método ADI** (secciones 20.4, 20.5). Para las ecuaciones parabólicas se cuenta con una condición inicial y condiciones en la frontera, y se analizaron un *método directo* y el **método de Crank-Nicolson** (sección 20.6). Para las ecuaciones hiperbólicas, los problemas son semejantes, aunque se tiene una segunda condición inicial; en la sección 20.7 se explicó cómo manejar numéricamente tales problemas.

Parte

F

OPTIMIZACIÓN, GRÁFICAS

Capítulo 21 Optimización no restringida, programación lineal

Capítulo 22 Gráficas y análisis combinatorio

Las ideas de optimización y la aplicación de gráficas y digráficas (gráficas dirigidas) desempeñan un papel creciente en ingeniería, computación, teoría de sistemas, economía y otras áreas. En esta parte se explicarán algunos conceptos, métodos y resultados básicos en optimización no restringida (sección 21.2), programación lineal (secciones 21.1-21.4), gráficas y digráficas y su aplicación en optimización combinatoria (capítulo 22). Los métodos combinatorios que implican gráficas y digráficas son relativamente nuevos y constituyen un área interesante de investigación aplicada y teórica que se está llevando a cabo.

Capítulo

21

Optimización no restringida, programación lineal

En este capítulo se proporciona una introducción a los conceptos, métodos y resultados más importantes de la optimización. Los principios de optimización son cada vez más importantes en el diseño moderno y en la operación de sistemas en varias áreas. El desarrollo reciente ha sido afectado por las modernas computadoras capaces de resolver problemas a gran escala, así como por la creación correspondiente de nuevas técnicas de optimización, de modo que todo el campo se encuentra en proceso de convertirse en una gran área por sí mismo.

Prerrequisito: Ligeros conocimientos sobre sistemas lineales de ecuaciones.
Bibliografía: Apéndice 1, parte F.
Respuestas a los problemas: Apéndice 2.

21.1 CONCEPTOS BÁSICOS. OPTIMIZACIÓN NO RESTRINGIDA

En un **problema de optimización**, el objetivo es *optimizar* (*maximizar* o *minimizar*) alguna función f. Esta función f se denomina **función objetivo**.

Por ejemplo, una función objetivo f que va a *maximizarse* puede ser la ganancia generada en la producción de televisores, el rendimiento por minuto en un proceso químico, el kilometraje por litro de cierto tipo de automóvil, el número de clientes por hora atendidos en una oficina, la dureza del acero o la resistencia a la tensión de una cuerda.

De manera semejante, se desearía *minimizar* f si f es el costo por unidad para producir ciertas cámaras fotográficas, el costo de operación de alguna planta de energía eléctrica, la pérdida diaria de calor en un sistema de calefacción, el tiempo de inactividad de algún torno, o el tiempo necesario para producir un guardafango de un automóvil.

En casi todos los problemas de optimización la función objetivo f depende de varias variables

$$x_1, \cdots, x_n.$$

Éstas se denominan **variables de control** porque es posible "controlarlas", es decir, escoger sus valores.

Por ejemplo, el rendimiento de un proceso químico puede depender de la presión x_1 y la temperatura x_2. La eficiencia de cierto sistema de acondicionamiento del aire puede depender de la temperatura x_1, la presión del aire x_2, el contenido de humedad x_3, el área de la sección transversal de salida x_4, y así sucesivamente.

La teoría de la optimización desarrolla métodos para efectuar elecciones óptimas de $x_1, \cdots, x_n$ que maximicen (minimicen) la función objetivo f, es decir, métodos para encontrar valores óptimos de $x_1, \cdots, x_n$.

En muchos problemas, la elección de los valores de $x_1, \cdots, x_n$ no es completamente libre, sino que está sujeta a algunas **restricciones**, es decir, condiciones adicionales que provienen de la naturaleza del problema y de las variables.

Por ejemplo, si x_1 es el costo de producción, entonces $x_1 \geqq 0$, y existen muchas otras variables (tiempo, peso, distancia recorrida por un vendedor, etc.) que no pueden asumir valores negativos. Las restricciones también pueden presentarse en forma de ecuaciones (en lugar de desigualdades).

Primero se considerará la **optimización no restringida** en el caso de una función $f(x_1, \cdots, x_n)$ con valores reales. Por conveniencia, se puede escribir también $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ y $f(\mathbf{x})$.

Por definición, f tiene un **mínimo** en un punto $\mathbf{x} = \mathbf{X}_0$ en una región R en donde f está definida, si $f(\mathbf{x}) \geqq f(\mathbf{X}_0)$ para toda $\mathbf{x}$ en R. De manera semejante, f tiene un **máximo** en $\mathbf{X}_0$ si $f(\mathbf{x}) \leqq f(\mathbf{X}_0)$ para toda $\mathbf{x}$ en R. Los máximos y los mínimos en conjunto se denominan **extremos**.

Además, se dice que f tiene un **mínimo local** en $\mathbf{X}_0$ si $f(\mathbf{x}) \geqq f(\mathbf{X}_0)$ para toda $\mathbf{x}$ en una vecindad de $\mathbf{X}_0$, por ejemplo, para todo $\mathbf{x}$ que satisfaga

$$|\mathbf{x} - \mathbf{X}_0| = [(x_1 - X_1)^2 + \cdots + (x_n - X_n)^2]^{1/2} < r,$$

en donde $\mathbf{X}_0 = (X_1, \cdots, X_n)$ y $r > 0$ es suficientemente pequeño. Un *máximo local* se define de modo semejante.

Si f es diferenciable y tiene un extremo en un punto $\mathbf{X}_0$ en el *interior* de R (es decir, no sobre la frontera), entonces las derivadas parciales $\partial f/\partial x_1, \cdots, \partial f/\partial x_n$ deben ser cero en $\mathbf{X}_0$. Éstas son las componentes de un vector denominado **gradiente** de f y que se denota por grad f o ∇f. (Para $n = 3$ lo anterior coincide con lo visto en la sección 8.9). Por tanto,

$$(1) \qquad \nabla f(\mathbf{X}_0) = \mathbf{0}.$$

Un punto $\mathbf{X}_0$ en que se cumple (1) se denomina **punto estacionario** de f.

La condición (1) es necesaria para que se tenga un extremo de f en $\mathbf{X}_0$, en el interior de R, pero no es suficiente. En efecto, si $n = 1$, entonces para $y = f(x)$ la condición (1) es $y' = f'(x) = 0$; y, por ejemplo, $y = x^3$ satisface $y' = 3x^2 = 0$ en $x = X_0 = 0$, en donde f no tiene un valor extremo, sino un punto de inflexión. De manera semejante, para $f(\mathbf{x}) = x_1x_2$ se tiene $\nabla f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, y f no tiene un extremo, sino un punto silla en $\mathbf{0}$. Por tanto, después de resolver (1), todavía debe averiguarse si se ha obtenido un extremo.

Para el caso en que $n = 1$, las condiciones $y'(X_0) = 0$, $y''(X_0) > 0$ garantizan un mínimo local en X_0, y las condiciones $y'(X_0) = 0$, $y''(X_0) < 0$ garantizan un máximo local en X_0, como se sabe por lo estudiado en cálculo. Para $n > 1$ existen criterios semejantes. Sin embargo, en la práctica hasta resolver (1) a menudo es difícil. Por esta razón, por lo general se prefiere la resolución por iteración, mediante procesos de búsqueda que parten en algún punto y se mueven paso a paso hacia puntos en los que f es menor (si se desea un mínimo en f) o mayor (en el caso de un máximo).

El **método del descenso más pronunciado** o **método del gradiente** de Cauchy es de este tipo. Fue introducido en 1847 y ha tenido gran aceptación desde entonces.[1] La idea es encontrar un mínimo de $f(\mathbf{x})$ calculando repetidamente mínimos de una función $g(t)$ de una sola variable t, como se indica en seguida. Suponer que f tiene un mínimo en $\mathbf{X}_0$ y que se parte de un punto $\mathbf{x}$. Entonces, se busca un mínimo de f lo más próximo a $\mathbf{x}$, a lo largo de la recta en dirección de

$$-\nabla f(\mathbf{x}),$$

la dirección del descenso más pronunciado (= dirección del decremento máximo) de f en $\mathbf{x}$; es decir, se determinan el valor de t y el punto correspondiente

$$(2) \qquad \mathbf{z}(t) = \mathbf{x} - t\nabla f(\mathbf{x})$$

en el que la función

$$(3) \qquad g(t) = f(\mathbf{z}(t))$$

tiene un mínimo. Se toma este $\mathbf{z}(t)$ como la siguiente aproximación a $\mathbf{X}_0$.

Ejemplo 1. Método del descenso más pronunciado.

Determinar el mínimo de

$$(4) \qquad f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 3x_2^2,$$

partiendo de $\mathbf{x}_0 = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y aplicando el método del descenso más pronunciado.

Solución. Por inspección, resulta evidente que $f(\mathbf{x})$ tiene un mínimo en $\mathbf{0}$. Conocer la solución proporciona una mejor sensación de la manera en que funciona el método.

Se obtiene $\nabla f(x) = 2x_1\mathbf{i} + 6x_2\mathbf{j}$ y, a partir de ésto,

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{x} - t\nabla f(\mathbf{x}) = (1 - 2t)x_1\mathbf{i} + (1 - 6t)x_2\mathbf{j}$$

$$g(t) = f(\mathbf{z}(t)) = (1 - 2t)^2 x_1^2 + 3(1 - 6t)^2 x_2^2.$$

Ahora se calcula

$$g'(t) = 2(1 - 2t)x_1^2(-2) + 6(1 - 6t)x_2^2(-6),$$

se hace $g'(t) = 0$ y se despeja t, con lo que se encuentra

[1] A veces la convergencia puede ser lenta. Respecto a métodos más refinados y avances recientes, consultar la obra citada en el apéndice 1 como referencia F7.

$$t = \frac{x_1^2 + 9x_2^2}{2x_1^2 + 54x_2^2}.$$

Partiendo de $\mathbf{x}_0 = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ se calculan los valores de la tabla 21.1, que se muestran en la figura 446. ∎

La figura 446 sugiere que, en el caso de elipses delgadas ("un largo y angosto valle"), la convergencia sería mala. El lector puede confirmar este hecho, reemplazando en (4) el coeficiente 3 por uno más grande. Para obtener información acerca de descensos más elaborados y otros métodos, algunos de ellos aplicables también a funciones vectoriales de variables vectoriales, consultar la bibliografía mencionada en la parte F del apéndice 1.

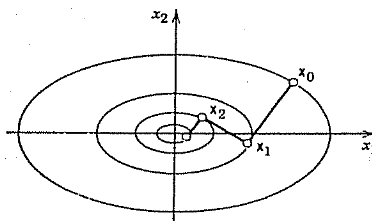


Figura 446. Método del descenso más pronunciado en el ejemplo 1.

Tabla 21.1
Método del descenso más pronunciado. Cálculos del ejemplo 1.

n	$\mathbf{x}$		t	$1-2t$	$1-6t$
0	6.000	3.000	0.210	0.581	−0.258
1	3.484	−0.774	0.310	0.381	−0.857
2	1.327	0.664	0.210	0.581	−0.258
3	0.771	−0.171	0.310	0.381	−0.857
4	0.294	0.147	0.210	0.581	−0.258
5	0.170	−0.038	0.310	0.381	−0.857
6	0.065	0.032			

Problemas de la sección 21.1

1. ¿Qué sucede si se aplica el método del descenso más pronunciado a $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$? (¡Explicar la respuesta!)
2. Aplicar el método del descenso más pronunciado a $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 1.1x_2^2$, partiendo de $\mathbf{x}_0 = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ (tres pasos). ¿Por qué es más rápida la convergencia que en el ejemplo 1?
3. En el problema 2, se parte de $\mathbf{x}_0 = 1.1\mathbf{i} + \mathbf{j}$. Demostrar que las aproximaciones siguientes son $\mathbf{x}_1 = k(1.1\mathbf{i} - \mathbf{j})$, $\mathbf{x}_2 = k^2\mathbf{x}_0$, etc., donde $k = 0.1/2.1$.
4. Comprobar que, en el ejemplo 1, los gradientes sucesivos son ortogonales (perpendiculares). ¿Sucede esto sólo por azar?
5. Aplicar el método del descenso más pronunciado a $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + cx_2^2$. Partiendo de $\mathbf{x}_0 = c\mathbf{i} + \mathbf{j}$, demostrar que las aproximaciones subsiguientes son $\mathbf{x}_m = a_m(c\mathbf{i} + (-1)^m\mathbf{j})$, donde $a_m = (c-1)^m/(c+1)^m$. Concluir que para c grande (elipses delgadas, $f(x) = constante$) la convergencia se vuelve deficiente.

6. Aplicar el método del descenso más pronunciado a $f(x) = x_1^4 + x_2^4 - 12$, partiendo de $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.
7. Trazar algunas curvas $f(x) = constante$ en el problema 6 para obtener una representación de calidad del comportamiento del método del descenso más pronunciado para diferentes elecciones del punto de inicio.
8. Aplicar el método del descenso más pronunciado a $f(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2$, que no tiene mínimo, y observe qué sucede. Empezar desde $\mathbf{x}_0 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$.
9. Aplicar el método del descenso más pronunciado a $f(\mathbf{x}) = x_1^4 - 16x_2^4$. Empezar desde $\mathbf{x}_0 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Ejecutar un paso.
10. ¿Qué sucede si se aplica al método del descenso más pronunciado a $f(\mathbf{x}) = ax_1 + bx_2$? Primero adivinar la respuesta, luego calcularla.

21.2 PROGRAMACIÓN LINEAL

La **programación lineal** (u **optimización lineal**) consiste en métodos para resolver problemas de optimización ***con restricciones*** en los que la función objetivo f es una función ***lineal*** en las variables de control $x_1, \cdots, x_n$, y el dominio de estas variables está restringido por un sistema de desigualdades lineales. Con frecuencia surgen problemas de este tipo, por ejemplo en producción, distribución de mercancías, economía y teoría de la aproximación. Esto se ilustrará con un ejemplo sencillo.

Ejemplo 1. Plan de producción.

Suponer que en la producción de dos tipos de recipientes, K y L, se utilizan dos máquinas, M_1 y M_2. Para producir un recipiente K, M_1 necesita dos minutos y M_2, cuatro minutos. De manera semejante, L ocupa ocho minutos a M_1 y cuatro minutos a M_2. La ganancia neta para un recipiente K es de \$29 y para uno L es de \$45. Determinar el plan de producción que maximice la ganancia neta.

Solución. Si se producen x_1 recipientes K y x_2 recipientes L por hora, la ganancia neta por hora es

$$f(x_1, x_2) = 29x_1 + 45x_2.$$

Las restricciones son

$$(1)\qquad \begin{aligned} 2x_1 + 8x_2 &\geqq 60 \quad \text{(resultante de la máquina } M_1) \\ 4x_1 + 4x_2 &\leqq 60 \quad \text{(resultante de la máquina } M_2) \\ x_1 &\geqq 0 \\ x_2 &\geqq 0. \end{aligned}$$

En la figura 447 se muestran estas restricciones. (x_1, x_2) debe encontrarse en el primer cuadrante y por debajo de la recta $2x_1 + 8x_2 = 60$, o sobre ella, así como por debajo de la recta $4x_1 + 4x_2 = 60$, o sobre ella. Por tanto, (x_1, x_2) queda restringido al cuadrilátero $OABC$. Tiene que hallarse (x_1, x_2) en $OABC$ tal que $f(x_1, x_2)$ sea máximo. Ahora bien, $f(x_1, x_2) = 0$ da $x_2 = -(29/45)x_1$ (ver la figura 447). Las rectas $f(x_1, x_2) = constante$ son paralelas a aquélla. Se observa que B, es decir, $x_1 = 10, x_2 = 5$, da el óptimo $f(10, 5) = 515$. Por tanto, la respuesta es que el plan óptimo de producción que maximiza la ganancia se logra al producir los recipientes K y L en la razón 2:1, en donde la ganancia máxima es de \$515 por hora. ∎

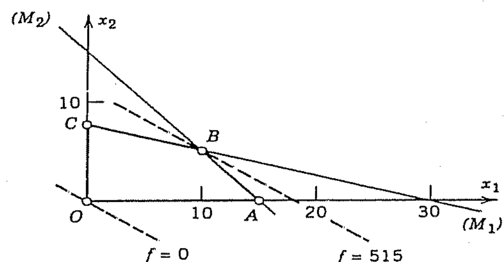


Figura 447. Programación lineal en el ejemplo 1.

Observar que el problema del ejemplo 1 o problemas de optimización semejantes *no pueden* resolverse al hacer ciertas derivadas parciales iguales a cero, porque en el problema es determinante la región en la que las variables de control pueden variar.

Además, el método "geométrico" o gráfico que se ilustró en el ejemplo 1 está confinado a dos variables, x_1, x_2. Sin embargo, la mayor parte de los problemas prácticos implican más variables, de modo que se requieren otros métodos de resolución.

Forma normal de un problema de programación lineal

Con el fin de prepararse para esos métodos, se demostrará que las restricciones pueden escribirse de manera más uniforme. La idea se explicará en términos de la primera desigualdad dada en (1),

$$2x_1 + 8x_2 \leqq 60.$$

Esta desigualdad implica que $60 - 2x_1 - 8x_2 \geqq 0$ (e inversamente), es decir, la cantidad

$$x_3 = 60 - 2x_1 - 8x_2$$

es no negativa. En consecuencia, la desigualdad original puede escribirse ahora como

$$2x_1 + 8x_2 + x_3 = 60,$$

$$x_3 \geqq 0.$$

x_3 es una variable auxiliar no negativa introducida con el propósito de convertir las desigualdades en ecuaciones. Una variable de este tipo se denomina **variable de holgura**.

Ejemplo 2. Conversión de desigualdades en ecuaciones utilizando variables de holgura.

Con ayuda de dos variables de holgura x_3 y x_4, el problema de programación lineal del ejemplo 1 puede escribirse en la forma siguiente. ***Maximizar***

$$f = 29x_1 + 45x_2$$

bajo las restricciones

$$\begin{aligned} 2x_1 + 8x_2 + x_3 \quad &= 60 \\ 4x_1 + 4x_2 \quad + x_4 &= 60 \\ x_i \geqq 0 \quad (i = 1, \cdots, 4). \end{aligned} \qquad (2)$$

Ahora se tienen $n = 4$ variables y $m = 2$ ecuaciones (linealmente independientes), de modo que dos de las cuatro variables, por ejemplo x_1, x_2, determinan a las otras. También observar que cada uno de los cuatro lados del cuadrilátero de la figura 447 ahora tiene una ecuación de la forma $x_i = 0$:

$$OA: x_2 = 0, \qquad AB: x_4 = 0, \qquad BC: x_3 = 0, \qquad CO: x_1 = 0.$$

Un vértice del cuadrilátero es la intersección de dos lados. Por tanto, en un vértice, $n - m = 4 - 2 = 2$ de las variables son cero y las otras son no negativas. Por tanto, en A se tiene $x_2 = 0, x_4 = 0$, y así sucesivamente. ∎

El ejemplo dado sugiere que un problema general de optimización lineal puede llevarse a la **forma normal** siguiente: *Maximizar*

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \qquad (3)$$

sujeta a las restricciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \\ x_i \geqq 0 \quad (i = 1, \cdots, n). \end{aligned} \qquad (4)$$

Aquí, $x_1, \cdots, x_n$ incluyen a las variables de holgura (para las cuales las c que aparecen en f son cero). Se supone que las ecuaciones en (4) son linealmente independientes. Entonces, si se eligen valores para $n - m$ de las variables, el sistema determina en forma única a las otras.

Recuerde que el problema propuesto incluye también la **minimización** de una función objetivo f, dado que ésto corresponde a maximizar $-f$ y, por tanto, no es necesario considerarla por separado.

Una n-ada $(x_1, \cdots, x_n)$ que satisface todas las restricciones en (4) se denomina *punto factible* o **solución factible**. Se dice que una solución factible es **óptima** si, para ella, la función objetivo f se convierte en un máximo, en comparación con los valores de f en todas las soluciones factibles.

Por último, por **solución factible básica** se quiere dar a entender que se trata de una solución factible para la que por lo menos $n - m$ de las variables $x_1, \cdots, x_n$ son

cero. Así, en el ejemplo 2 se tiene que $n = 4$, $m = 2$, y las soluciones factibles básicas son los cuatro vértices O, A, B, C de la figura 447. Aquí B es una solución óptima (la única en este ejemplo).

El siguiente teorema es fundamental.

Teorema 1 (solución óptima)

Alguna solución óptima de un problema de programación lineal (3), (4) *también es una solución factible básica de* (3), (4).

Respecto a la demostración, consultar la obra citada en el apéndice 1 como referencia [F10], capítulo 3. Un problema puede tener muchas soluciones óptimas, sin que por ello todas sean factibles *básicas*; pero el teorema garantiza que puede encontrarse una solución óptima buscando entre las soluciones factibles básicas. Esto constituye una gran simplificación, pero dado que existen $\binom{n}{n-m}$ maneras diferentes de igualar a cero $n - m$ de las n variables, considerar todas estas posibilidades, eliminar aquéllas que no sean factibles y buscar entre las restantes todavía implicaría mucho trabajo, incluso cuando n y m fuesen relativamente pequeños. Entonces, se necesita una búsqueda sistemática. En la sección que sigue se explicará un importante método de este tipo.

Problemas de la sección 21.2

En cada caso, describir y graficar la región en el primer cuadrante del plano x_1x_2 determinada por el conjunto de desigualdades lineales dado.

1. $x_1 + 2x_2 \leqq 8$, $x_1 - x_2 \leqq 0$, $x_2 \leqq 1.5$
2. $x_1 - 2x_2 \leqq -2$, $0.8x_1 + x_2 \leqq 6$
3. $-0.5x_1 + x_2 \leqq 2$, $x_1 + x_2 \geqq 2$, $-x_1 + 5x_2 \geqq 5$
4. $-x_1 + x_2 \geqq 0$, $x_1 + x_2 \leqq 4$, $-x_1 + x_2 \leqq 3.2$
5. $x_1 + 3x_2 \leqq 6$, $2x_1 + x_2 \geqq 14$
6. $x_1 + 2x_2 \leqq 4$, $2x_1 - 3x_2 \leqq 3$, $0.4x_1 - x_2 \geqq 2$
7. $3x_1 - 7x_2 \geqq -28$, $x_1 + x_2 \geqq 6$, $9x_1 - 2x_2 \leqq 36$, $5x_1 + 6x_2 \leqq 48$
8. $x_1 + x_2 \geqq 3$, $x_1 + x_2 \leqq 9$, $-x_1 + x_2 \geqq -3$, $-x_1 + x_2 \leqq 3$
9. $-2x_1 + 3x_2 \leqq 9$, $5x_1 + x_2 \leqq 25$, $2x_1 + 3x_2 \geqq 3$, $x_1 - 4x_2 \leqq 4$

Maximizar la función objetivo f dada sujeta a las restricciones que se indican.

10. $f = 2x_1 + 3x_2$, $4x_1 + 3x_2 \geqq 12$, $x_1 - x_2 \geqq -3$, $x_2 \leqq 6$, $2x_1 - 3x_2 \leqq 0$
11. $f = -10x_1 + 2x_2$, $x_1 \geqq 0$, $x_2 \geqq 0$, $-x_1 + x_2 \geqq -1$, $x_1 + x_2 \leqq 6$, $x_2 \leqq 5$
12. $f = 3x_1 - 6x_2$, $4x_1 + x_2 \geqq 4$, $-x_1 + 2x_2 \geqq 6$, $x_1 + 2x_2 \leqq 14$
13. Minimizar f en el problema 10.
14. Minimizar f en el problema 11.
15. Maximizar la ganancia diaria en la fabricación de dos aleaciones A_1, A_2 que son mezclas diferentes de dos metales M_1, M_2 como se muestra

Metal	Proporción de metal En la aleación A_1	Proporción de metal En la aleación A_2	Abastecimiento diario (toneladas)
M_1	0.5	0.25	10
M_2	0.5	0.75	15
Ganancia neta ($ por tonelada)	60	50	

16. Maximizar el rendimiento diario total $f = x_1 + x_2$ de una producción en la que es posible elegir entre dos procesos de producción sujetos a las restricciones

$$2x_1 + 4x_2 \leqq 200 \text{ (mano de obra)} \qquad 5x_1 + 2x_2 \leqq 150 \text{ (horas de máquina)}$$

17. Una compañía fabrica y vende dos modelos de lámparas, L_1, L_2, siendo la ganancia de $15 y $10, respectivamente. El proceso requiere de dos trabajadores W_1, W_2, quienes disponen de 100 horas y 80 horas por mes, respectivamente, para efectuar este tipo de trabajo. W_1 arma una L_1 en 20 minutos y una L_2 en 30 minutos. W_2 pinta una L_1 en 20 minutos y una L_2 en 10 minutos. Suponiendo que todas las lámparas que se fabrican pueden venderse sin dificultad, determinar los valores de producción que maximizan la ganancia.
18. ¿Cuál es el significado de las variables de holgura x_3, x_4 del ejemplo 2 en términos del problema en el ejemplo 1?
19. ¿Podría hallarse una ganancia $f(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2$ cuyo máximo esté en un punto interior del cuadrilátero de la figura 447? (Justificar la respuesta.)
20. En el ejemplo 1, la solución es única. ¿Puede esperarse siempre unicidad? (Justificar la respuesta.)

21.3 MÉTODO SIMPLEX

De lo visto en la sección anterior se recuerda lo siguiente: un problema de optimización lineal (problema de programación lineal) puede escribirse en forma normal, es decir, ***maximizar***

$$f = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \tag{1}$$

sujeta a las restricciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \\ x_i \geqq 0 \qquad (i = 1, \cdots, n). & \end{aligned} \tag{2}$$

Para hallar una solución óptima de este problema sólo se necesita considerar las **soluciones factibles básicas** (definidas en la sección 21.2), pero éstas todavía son tantas

que tiene que seguirse un procedimiento de búsqueda sistemático. En 1948, G. B. Dantzig publicó un método iterativo denominado **método simplex**, para ese fin. En este método se procede paso a paso a partir de una solución factible básica a otra, de modo que la función objetivo f siempre incremente su valor. El método principia con una *Operación* I_0 inicial en la que se encuentra una solución factible básica de la cual partir y, a continuación, cada paso consiste en tres operaciones,

Operación O_1: Prueba respecto a la optimalidad,

Operación O_2: Ubicación de una mejor solución factible básica,

Operación O_3: Transición a tal solución mejor.

Se describirán los detalles y, simultáneamente, se ilustrarán por medio de un ejemplo sencillo (el ejemplo de la sección 21.2, que puede resolverse aplicando un método elemental, como se ha visto).

Operación inicial I_0
Encontrar cualquier solución factible básica (necesaria para empezar la iteración). Es decir, dividir las variables $x_1, \cdots, x_n$ en dos clases seleccionando primero m variables, que se denominarán **variables básicas**; entonces las otras $n - m$ variables son aquéllas que deben ser cero en una solución factible básica; éstas se denominan **variables no básicas** o **de la derecha** porque se escribirán en el miembro derecho del sistema dado (2), el que se resolverá para las variables básicas. Como ilustración:

Maximizar

$$f = 29x_1 + 45x_2 \tag{3a}$$

sujeta a las restricciones

$$\begin{aligned} 2x_1 + 8x_2 + x_3 \quad &= 60 \\ 4x_1 + 4x_2 \quad + x_4 &= 60 \\ x_i \geqq 0 \qquad (i = 1, \cdots, 4). & \end{aligned} \tag{3b}$$

Por ejemplo, x_3, x_4 se toman como las variables básicas. En (3b) se despejan tales variables:

$$\begin{aligned} x_3 &= 60 - 2x_1 - 8x_2 \\ x_4 &= 60 - 4x_1 - 4x_2. \end{aligned} \tag{4}$$

En los casos favorables, como éste, se obtienen los valores de las variables de una solución factible básica al igualar a cero las variables de la derecha. En efecto, $x_3 = 60$, $x_4 = 60$, y la solución factible básica deseada es el punto O, el origen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ de la figura 447 en la sección previa.

Si con este método se obtiene un valor negativo para alguna de las variables básicas, entonces es necesario intentar otro conjunto de éstas.

Primer paso. Operación O_1: Prueba respecto a la optimalidad.
Determinar si todos los coeficientes de f, expresados como una función de las variables de la derecha presentes son negativos o cero.

Si se satisface el **criterio de optimalidad**, entonces la solución factible básica es óptima.

En efecto, entonces f no puede incrementarse si se asignan valores positivos (en lugar de cero) a las variables de la derecha; recordar que no se permiten valores negativos. Entonces esta condición es suficiente para asegurar optimalidad y puede demostrarse que también es necesaria.

En el ejemplo, ya que por la elección efectuada las variables de la derecha son x_1, x_2, entonces es necesario considerar a f *como una función de éstas*, es decir, $f = 29x_1 + 45x_2$. El criterio hace ver que $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ no es óptima, ya que 29 y 45 son positivos.

Primer paso. Operación O_2: Búsqueda de una mejor solución factible básica
Si la solución factible básica que acaba de probarse no es óptima, entonces es necesario pasar a una solución factible básica vecina para la que f sea mayor, como se indica enseguida.

Pasar a una solución factible básica vecina significa ir hacia un punto en el que otra x_j sea cero; es decir, tiene que hacerse un **intercambio**: la variable x_j, que ahora será cero, sale del conjunto de variables básicas y, en su lugar, otra variable se convierte en básica. Se explicará este **método de intercambio**.

Considerar una variable de la derecha x_R que tiene un coeficiente positivo en f. Las otras variables de la derecha se mantienen iguales a cero. Se determina el mayor incremento Δx_R de x_R tal que *todas* las variables básicas (antiguas) todavía sean no negativas; también se enumera el incremento correspondiente Δf de f.

En (4), para x_1 lo anterior queda como se indica enseguida

$$\begin{aligned} x_3 &= 60 - 2x_1 - 8x_2, \quad 0 = 60 - 2x_1, \quad \Delta x_1 = 30, \quad \Delta f = 29\Delta x_1 = 870. \\ x_4 &= 60 - \underline{4x_1} - 4x_2, \quad 0 = 60 - 4x_1, \quad \Delta x_1 = 15, \quad \Delta f = 29\Delta x_1 = 435. \end{aligned} \tag{5}$$

Se subraya $x_R = x_1$ en la ecuación que inhibió todo incremento adicional en x_R [como se muestra en (5)]. Lo anterior se efectúa para toda variable de la derecha x_R cuyo coeficiente en f, *expresado como una función de las variables de la derecha*, sea positivo.

Por tanto, también es necesario considerar $x_R = x_2$, en donde se subraya como antes:

$$\begin{aligned} x_3 &= 60 - 2x_1 - \underline{8x_2}, \quad 0 = 60 - 8x_2, \quad \Delta x_2 = 7.5, \quad \Delta f = 45\Delta x_2 = 337.5 \\ x_4 &= 60 - 4x_1 - 4x_2, \quad 0 = 60 - 4x_2, \quad \Delta x_2 = 15, \quad \Delta f = 45\Delta x_2 = 675. \end{aligned} \tag{6}$$

Primer paso. Operación O_3: Intercambio de variable.
Considerar las ecuaciones en que está subrayada una variable. Entonces, en (5), (6),

$$\begin{aligned} x_3 &= 60 - 2x_1 - \underline{8x_2}, \qquad \Delta f = 337.5 \\ x_4 &= 60 - \underline{4x_1} - 4x_2, \qquad \Delta f = 435. \end{aligned} \tag{7}$$

La variable de la derecha x_R que dio lugar al mayor Δf se intercambia con la variable básica en la ecuación en que está subrayada x_R. Por tanto, debido a (7), tienen que intercambiarse x_1 y x_4, de modo que x_1 se convierte ahora en básica y x_4 de la derecha. El sistema se resuelve para las nuevas variables básicas. Por consiguiente, al despejar x_1 en la segunda ecuación de (7) e insertar x_1 en la primera ecuación de (7) se obtiene

$$\text{(8)} \qquad \begin{aligned} x_1 &= 15 - x_2 - \tfrac{1}{4}x_4 \\ x_3 &= 30 - 6x_2 + \tfrac{1}{2}x_4. \end{aligned}$$

Segundo paso. Efectuar las operaciones O_1, O_2, O_3, aplicando (8). Así, en la operación O_1 ahora debe expresarse $f = 29x_1 + 45x_2$ en términos de las nuevas variables de la derecha x_2, x_4. Usando la primera ecuación en (8), se encuentra

$$\text{(9)} \qquad f = 435 + 16x_2 - 7.25x_4.$$

Por el criterio de optimalidad, la solución factible básica presente (punto A de la figura 447, sección 21.2) no es óptima porque x_2 tiene un coeficiente positivo en (9).

En la operación O_2 ahora se considera $x_R = x_2$. Por (8)

$$\text{(10)} \qquad \begin{aligned} x_1 &= 15 - x_2 - \tfrac{1}{4}x_4, \quad 0 = 15 - x_2, \quad \Delta x_2 = 15, \quad \Delta f = 16\Delta x_2 = 240 \\ x_3 &= 30 - \underline{6x_2} + \tfrac{1}{2}x_4, \quad 0 = 30 - 6x_2, \quad \Delta x_2 = 5, \quad \Delta f = 16\Delta x_2 = 80. \end{aligned}$$

No es necesario considerar x_4 porque su coeficiente en (9) es negativo.

En la operación O_3 se intercambian x_2 y x_3 y el sistema se resuelve para las nuevas variables básicas x_1, x_2, despejando x_2 en la segunda ecuación de (10) y luego insertando el resultado en la primera ecuación de (10), con lo que se obtiene

$$\text{(11)} \qquad \begin{aligned} x_1 &= 10 + \tfrac{1}{6}x_3 - \tfrac{1}{3}x_4 \\ x_2 &= 5 - \tfrac{1}{6}x_3 + \tfrac{1}{12}x_4. \end{aligned}$$

Tercer paso. Efectuar las operaciones O_1, O_2, O_3, aplicando (11). Así, en la operación O_1 es necesario expresar $f = 29x_1 + 45x_2$ en términos de x_3, x_4. Por (11),

$$\text{(12)} \qquad f = 515 - 2.667x_3 - 5.917x_4.$$

Con base en el criterio de optimalidad, esta solución factible básica es óptima porque las variables de la derecha x_3 y x_4 tienen coeficientes negativos. El valor $f_{\text{ópt}} = 515$ se obtiene a partir de (12) con $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. El punto (x_1, x_2) en que ocurre el óptimo se concluye por (11) con $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, a saber, $x_1 = 10$, $x_2 = 5$. Esto concuerda con el resultado obtenido en la sección 21.2.

En la tabla 21.2 se muestra un arreglo tabular de los cálculos. En cada paso, las variables de la derecha se enumeran en el renglón de arriba. Las flechas apuntan a las variables que entran o salen como variables básicas. *¡Precaución!* En las publicaciones sobre el tema algunas veces se enumeran los *negativos* de las variables de la derecha ($-x_1$, $-x_2$, etc.); este hecho introduce el factor -1 en todos los coeficientes. Como se trata, sin embargo, de un convencionalismo que nada agrega a la idea del método como tal ni ayuda a su mejor comprensión, no se adoptará en este libro.

Tabla 21.2
Método simplex, cálculos en forma tabular

	Variables básicas	Constantes	⬇ x_1	x_2
Primer paso	x_3	60	-2	-8
	⬅ x_4	60	$\underline{-4}$	-4
	f	0	29	45
	Variables básicas	**Constantes**	**⬇ x_2**	**x_4**
Segundo paso	x_1	15	-1	-0.25
	⬅ x_3	30	$\underline{-6}$	0.5
	f	435	16	-7.25
	Variables básicas	**Constantes**	**x_3**	**x_4**
Tercer paso	x_1	10	0.167	-0.333
	x_2	5	-0.167	0.083
	f	515	-2.667	-5.917

Problemas de la sección 21.3

1. En el ejemplo analizado en el texto, aplicar el método simplex partiendo de x_2, x_4 como variables básicas.
2. En el ejemplo del texto, sustituir f por $f = 15x_1 + 30x_2$ y aplicar el método simplex, partiendo de x_3, x_4 como variables básicas. En el paso 1 de la operación O_3, será necesario hacer una elección en el intercambio de variables. Explicar por qué.
3. Maximizar $f = 3x_1 + 2x_2$ sujeta a las restricciones $x_1 \geqq 0$, $x_2 \geqq 0$,
$$3x_1 + 4x_2 \leqq 60, \qquad 4x_1 + 3x_2 \leqq 60, \qquad 10x_1 + 2x_2 \leqq 120;$$
escribir el problema en forma normal y aplicar el método simplex, tomando las variables de holgura como las variables básicas iniciales.
4. Aplicar el método simplex para maximizar el rendimiento diario $f = x_1 + x_2$ en la producción de sillas con dos procesos diferentes, sujeta a las restricciones
$$3x_1 + 4x_2 \leqq 550 \text{ (horas de máquina)} \qquad 5x_1 + 4x_2 \leqq 650 \text{ (mano de obra)}$$
5. Aplicar el método simplex para maximizar la ganancia en la producción diaria de dos tipos de marcos metálicos F_1 (ganancia por marco de \$90) y F_2 (ganancia por marco de \$50) sujeta a las restricciones (x_1 y x_2 = cantidades de F_1, F_2 producidos por día).

$$x_1 + 3x_2 \leqq 18 \qquad \text{(material)}$$

$$x_1 + x_2 \leqq 10 \qquad \text{(horas de máquina).}$$

$$3x_1 + x_2 \leqq 24 \qquad \text{(horas de mano de obra).}$$

6. Maximizar $f = 2x_1 + 3x_2 + x_3$ sujeta a

$$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0,\ x_1 + x_2 + x_3 \leqq 4.8,\ 10x_1 + x_3 \leqq 9.9,\ x_2 - x_3 \leqq 0.2.$$

7. Maximizar $f = x_1 + 4x_2 - x_3$ sujeta a las mismas restricciones que en el problema 6.

8. Maximizar $f = 2x_1 + x_2 + 3x_3$ sujeta a

$$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0,\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leqq 12.$$

9. Una compañía produce baterías I, II eligiendo entre cuatro procesos de producción P_1, P_2 (para I) y P_3, P_4 (para II). La ganancia por batería es de \$10 para I y de \$20 para II. Maximizar la ganancia total $f = 10x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 20x_4$ sujeta a las restricciones

$$12x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 4x_4 \leqq 120 \qquad \text{(horas de máquina).}$$

$$3x_1 + 6x_2 + 12x_3 + 24x_4 \leqq 180 \qquad \text{(horas de mano de obra).}$$

10. Suponer que para ciertos fusibles la ganancia es de \$3 por caja y que puede elegirse entre seis procesos de producción $P_1, \cdots, P_6$. Maximizar la ganancia total sujeta a las restricciones (x_j = número de cajas de fusibles producidas por P_j)

$$10x_1 + 4x_2 + 16x_3 + 7.5x_4 + 5.6x_5 + 4.4x_6 \leqq 400 \qquad (\text{máquina } M_1)$$

$$2x_1 + 4x_2 + 1.6x_3 + 2.4x_4 + 2.8x_5 + 3.3x_6 \leqq 120 \qquad (\text{máquina } M_2)$$

21.4 MÉTODO SIMPLEX: DEGENERACIÓN, DIFICULTADES EN EL INICIO

De lo visto en la sección precedente, se recuerda que en el método simplex se procede de paso a paso a partir de una solución factible básica hacia otra, incrementando de este modo el valor de la función objetivo f hasta que se alcanza una solución óptima. Cada una de estas transiciones se realiza por medio de un intercambio en el que una de las variables de la derecha se convierte en una variable básica y viceversa.

Puede ocurrir, sin embargo, que una solución factible básica no sea óptima, y que tampoco sea posible incrementar f intercambiando una *sola* variable sin entrar en conflicto con las restricciones. Esta situación sólo puede presentarse para una solución factible básica en la que más de $n - m$ variables sean cero (con m y n como se definieron en la sección 21.3). Tal solución se denomina **solución factible degenerada**. En un caso así se intercambia una variable de la derecha por una variable básica que sea cero para esa solución y luego se procede como ya se estableció. En casos más complicados es posible que tengan que llevarse a cabo varios de estos intercambios adicionales.

Teóricamente, cuando hay degeneraciones existe la posibilidad de que el algoritmo simplex quede atrapado en una trayectoria cerrada infinita, es decir, que no termine. En la práctica, la ocurrencia de una trayectoria así ha sido extremadamente rara, de modo que basta con mencionar que en las obras citadas en el apéndice 1 como referencias [F6] y [F10] se describen con mayor amplitud técnicas para manejar las degeneraciones.

Ejemplo 1. Método simplex, solución factible degenerada.

Una fundición produce dos clases de hierro, I_1, I_2, usando tres clases de materia prima R_1, R_2, R_3 (chatarra y dos tipos de mena) como se muestra. Maximizar la ganancia neta diaria.

Materia prima	Materia prima necesaria por tonelada		Materia prima disponible por día (toneladas)
	Hierro I_1	4. Hierro I_2	
R_1	2	1	16
R_2	1	1	8
R_3	0	1	3.5
Ganancia neta por tonelada	\$150	\$300	

Solución. Sean x_1, x_2 las cantidades (en toneladas) de hierro I_1 e I_2, respectivamente, producidas por día; entonces, el problema es como sigue: Maximizar

$$(1) \qquad f = 150x_1 + 300x_2$$

sujeta a las restricciones $x_1 \geqq 0$, $x_2 \geqq 0$ y

$$2x_1 + x_2 \leqq 16$$

$$x_1 + x_2 \leqq 8$$

$$x_2 \leqq 3.5.$$

Al introducir las variables de holgura x_3, x_4, x_5, se obtiene la forma normal

$$(2) \qquad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 16 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 8 \\ x_2 + x_5 &= 3.5 \\ x_i \geqq 0 \quad (i = 1, \cdots, 5). \end{aligned}$$

Operación inicial. Para empezar, se toman x_3, x_4, x_5 como variables básicas y se despejan en las ecuaciones (2):

$$(3) \qquad \begin{aligned} x_3 &= 16 - 2x_1 - x_2 \\ x_4 &= 8 - x_1 - x_2 \\ x_5 &= 3.5 - x_2. \end{aligned}$$

Haciendo $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ se obtienen los valores positivos $x_3 = 16$, $x_4 = 8$, $x_5 = 3.5$, de modo que se

satisfacen todas las restricciones, es decir, se tiene una solución factible básica (punto O de la figura 448) y puede iniciarse el proceso iterativo.

Primer paso. Se realiza la prueba de optimalidad. En (3), las variables de la derecha son x_1, x_2. En términos de éstas, f queda definida por (1). El criterio de optimalidad (sección 21.3) muestra que f no es óptima.

Se prepara el intercambio de una variable. Es necesario considerar tanto x_1 como x_2, ya que las dos tienen coeficientes positivos en f; ver (1). Se considerará x_1. A partir de (3) y (1) se obtiene

$$\begin{aligned} x_3 &= 16 - \underline{2x_1} - x_2, &\quad \Delta x_1 &= 8, &\quad \Delta f &= 150\Delta x_1 = 1200 \\ x_4 &= 8 - \underline{x_1} - x_2, & \Delta x_1 &= 8, & \Delta f &= 150\Delta x_1 = 1200 \\ x_5 &= 3.5 \qquad - x_2, \end{aligned}$$

De manera semejante, para x_2 a partir de (3) y (1) se obtiene

$$\begin{aligned} x_3 &= 16 - 2x_1 - x_2, &\quad \Delta x_2 &= 16 \\ x_4 &= 8 - x_1 - x_2, & \Delta x_2 &= 8 \\ x_5 &= 3.5 \qquad \underline{- x_2}, & \Delta x_2 &= 3.5, &\quad \Delta f &= 300\Delta x_2 = 1050. \end{aligned}$$

Se observa que debe intercambiarse x_1, ya que entonces se obtiene el incremento máximo posible, Δf = 1200. Por lo subrayado se observa que es posible intercambiar x_1 y x_3, o bien, x_1 y x_4. Se intercambiarán x_1 y x_3. Despejando las nuevas variables básicas x_1, x_4 y x_5, se obtiene

$$\begin{aligned} x_1 &= 8 \quad - 0.5x_2 - 0.5x_3 \\ x_4 &= \qquad - 0.5x_2 + 0.5x_3 \qquad (4) \\ x_5 &= 3.5 - \qquad x_2. \end{aligned}$$

Por tanto, la solución factible básica presente es

$$x_1 = 8, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = 0, \qquad x_5 = 3.5$$

(punto A de la figura 448), y se observa que es ***degenerada***, ya que tiene más de $n - m = 5 - 3 = 2$ ceros, a saber, tiene 3 ceros.

Segundo paso. Se realiza la prueba de optimalidad. Para ello es necesario expresar f en términos de las nuevas variables de la derecha x_2, x_3. De (1) y la primera ecuación en (4) se obtiene

$$f = 1200 + 225x_2 - 75x_3. \qquad (5)$$

El criterio de optimalidad muestra que la presente solución factible básica no es óptima.

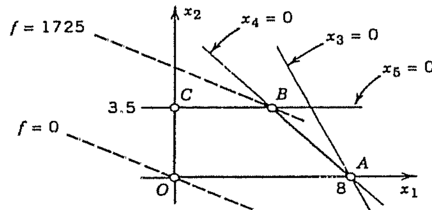


Figura 448. Ejemplo 1, en donde A es una solución degenerada.

Se considerará x_2 para un intercambio. No se considerará x_3 dado que su coeficiente en (5) es negativo, por las razones explicadas en la sección 21.3. Por (4) se tiene

$$\begin{aligned} x_1 &= 8 \quad - 0.5x_2 - 0.5x_3, &\quad \Delta x_2 &= 16, \\ x_4 &= \qquad - \underline{0.5x_2} + 0.5x_3, & \Delta x_2 &= 0, &\quad \Delta f &= 0, \\ x_5 &= 3.5 - \qquad x_2, & \Delta x_2 &= 3.5. \end{aligned}$$

Debido a la presencia de degeneración, se intercambiarán x_2 y x_4 (siendo las dos cero en A), sin incrementar f y sin dejar A. Se despejan las nuevas variables básicas x_1, x_2, x_5:

$$\begin{aligned} x_1 &= 8 \quad - x_3 + x_4 \\ x_2 &= \qquad x_3 - 2x_4 \qquad (6) \\ x_5 &= 3.5 - x_3 + 2x_4. \end{aligned}$$

Tercer paso. Con base en (1) y (6) se obtiene f en términos de las nuevas variables de la derecha x_3, x_4:

$$f = 1200 + 150x_3 - 450x_4. \qquad (7)$$

Por el criterio de optimalidad, f no es óptima en A. Con el fin de preparar un intercambio se considerará x_3. No se considerará x_4 porque su coeficiente es negativo. Por (6) y (7), se tiene

$$\begin{aligned} x_1 &= 8 \quad - x_3 + x_4, &\quad \Delta x_3 &= 8 \\ x_2 &= \qquad x_3 - 2x_4 \\ x_5 &= 3.5 - \underline{x_3} + 2x_4, & \Delta x_3 &= 3.5, &\quad \Delta f &= 150\,\Delta x_3 = 525. \end{aligned}$$

Se intercambian x_3 y x_5 y se despejan las nuevas variables básicas x_1, x_2, x_3:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4.5 - \quad x_4 + x_5 \\ x_2 &= 3.5 \qquad\quad - x_5 \qquad (8) \\ x_3 &= 3.5 + 2x_4 - x_5. \end{aligned}$$

Cuarto paso. De (1) y (8) se obtiene f en términos de las nuevas variables de la derecha x_4, x_5:

$$f = 1725 - 150x_4 - 150x_5. \qquad (9)$$

El criterio de optimalidad muestra que la solución factible básica presente es óptima. Por (8) se ve que esta solución es

$$x_1 = 4.5, \qquad x_2 = 3.5, \qquad x_3 = 3.5, \qquad x_4 = 0, \qquad x_5 = 0$$

(punto B en la figura 448), y a partir de (9) se tiene que $f_{\text{ópt}} = 1725$.

Respuesta. La ganancia neta se maximiza si se producen $x_1 = 4.5$ toneladas de hierro I_1 y $x_2 = 3.5$ toneladas de hierro I_2 por día. Esta cantidad máxima es \$1725. También, en este plan, se dejan sin usar $x_3 = 3.5$ toneladas de materia prima R_1. ∎

Dificultades en el inicio

Algunas veces puede ser difícil encontrar una solución factible básica de la cual partir. En tal caso, ayuda la idea de una *variable artificial* (o varias de estas variables). Este método se explicará mediante un ejemplo típico.

Ejemplo 2. Método simplex: inicio difícil, variable artificial.

Maximizar

$$f = 2x_1 + x_2 \tag{10}$$

sujeta a las restricciones $x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0$ y

$$x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 \geqq 1$$

$$x_1 - x_2 \leqq 2$$

$$x_1 + x_2 \leqq 4.$$

Solución. Por medio de las variables de holgura se logra la forma normal

$$\begin{aligned} -x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + x_3 \quad\quad &= -1 \\ x_1 - x_2 \quad + x_4 \quad &= 2 \\ x_1 + x_2 \quad\quad + x_5 &= 4 \end{aligned} \tag{11}$$

$$x_i \geqq 0 \quad (i = 1, \cdots, 5).$$

Se desea utilizar x_3, x_4, x_5 como variables básicas y, en consecuencia, empezar resolviendo:

$$\begin{aligned} x_3 &= -1 + x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 \\ x_4 &= 2 - x_1 + x_2 \\ x_5 &= 4 - x_1 - x_2. \end{aligned} \tag{12}$$

Pero, para $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ se tiene el valor negativo $x_3 = -1$, de modo que no es posible proceder de inmediato. Ahora bien, en lugar de buscar otras variables básicas, puede hacerse lo siguiente: se introduce una nueva variable x_6, denominada **variable artificial** y definida por

$$x_3 = -1 + x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + x_6 \tag{13}$$

con la restricción $x_6 \geqq 0$, y se toman x_4, x_5, x_6 como variables básicas:

$$\begin{aligned} x_4 &= 2 - x_1 + x_2 \\ x_5 &= 4 - x_1 - x_2 \\ x_6 &= 1 - x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + x_3. \end{aligned} \tag{14}$$

Estas son positivas cuando las nuevas variables de la derecha x_1, x_2, x_3 son cero. Por tanto, se ha encontrado una solución factible básica $x_1 = x_2 = x_3 = 0, x_4 = 2, x_5 = 4, x_6 = 1$ para un **problema ampliado** que implica seis variables y tres ecuaciones. En este nuevo problema, con el fin de llegar a una solución del problema dado debe tenerse cuidado de que, al final, desaparezca x_6. Esto se lleva a cabo con la idea de modificar la función objetivo sumando un término $-Mx_6$, en donde M es muy grande; es decir, f en (10) se reemplaza por [ver (10) y (14)]

$$\hat{f} = f - Mx_6 = 2x_1 + x_2 - Mx_6 = (M + 2)x_1 - (\tfrac{1}{2}M - 1)x_2 - Mx_3 - M. \tag{15}$$

Entonces, una x_6 positiva hará a $\hat{f}$ muy pequeña, de modo que, al final, $x_6 = 0$.

Primer paso. $\hat{f}$ no es máxima en la presente solución factible básica. Para M grande, el único coeficiente positivo en (15) es el de x_1; por tanto, con base en (14) y (15), la preparación para el intercambio es

$$\begin{aligned} x_4 &= 2 - x_1 + x_2, & \Delta x_1 &= 2, \\ x_5 &= 4 - x_1 - x_2, & \Delta x_1 &= 4, \\ x_6 &= 1 - \underline{x_1} + \tfrac{1}{2}x_2 + x_3, & \Delta x_1 &= 1, & \Delta\hat{f} &= M + 2. \end{aligned}$$

Se intercambian x_1 y x_6 y, en consecuencia, se resuelven (14) y (15)

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + \tfrac{1}{2}x_2 + x_3 - x_6 \\ x_4 &= 1 + \tfrac{1}{2}x_2 - x_3 + x_6 \\ x_5 &= 3 - \tfrac{3}{2}x_2 - x_3 + x_6 \end{aligned} \tag{16}$$

y

$$\hat{f} = 2 + 2x_2 + 2x_3 - (M + 2)x_6.$$

Se observa que la variable artificial x_6 se ha convertido en una variable de la derecha. Ahora puede hacerse $x_6 = 0$, ya que entonces con (16) se obtiene $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 3$ como una solución factible básica del problema *original*.

Los pasos posteriores siguen el patrón de costumbre (ver la sección 21.3) y pueden dejarse al estudiante.

Problemas de la sección 21.4

1. Maximizar $f = 300x_1 + 500x_2$ sujeta a $x_i \geq 0$ $(i = 1, \cdots, 5)$,

$$2x_1 + 8x_2 + x_3 = 60, \quad 4x_1 + 4x_2 + x_4 = 60, \quad 2x_1 + x_2 + x_5 = 30,$$

tomando a x_3, x_4, x_5 como variables básicas e intercambiando x_1 y x_5 en el primer paso.

2. Maximizar el rendimiento diario $f = x_1 + x_2$ en la producción de x_1 platos de vidrio por medio de un proceso P_1, y x_2 platos de vidrio por medio de un proceso P_2, sujeto a las restricciones

$$2x_1 + 3x_2 \leqq 130 \quad \text{(horas de mano de obra)},$$

$$3x_1 + 8x_2 \leqq 300 \quad \text{(horas de máquina)},$$

$$4x_1 + 2x_2 \leqq 140 \quad \text{(abastecimiento de materia prima)}$$

3. Maximizar $f = 6x_1 + 6x_2 + 9x_3$ sujeta a $x_j \geq 0$ $(j = 1, \cdots, 5)$ y

$$x_1 + x_3 + x_4 = 1, \quad x_2 + x_3 + x_5 = 1.$$

4. Maximizar el rendimiento total $f = x_1 + x_2 + x_3$ (valores de la producción al aplicar tres procesos diferentes) sujeto a las restricciones de entrada (limitación del tiempo de máquina)

$$4x_1 + 5x_2 + 8x_3 \leqq 12, \quad 8x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leqq 12.$$

5. Continuar y terminar el proceso de resolución en el ejemplo 2.
6. Maximizar $f = 4x_1 + x_2 + 2x_3$ sujeta a

$$x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, x_3 \geqq 0, x_1 + x_2 + x_3 \leqq 1, x_1 + x_2 - x_3 \leqq 0.$$

7. Maximizar la ganancia total diaria f que se obtiene al producir x_1, x_2, x_3 lámparas de los tipos I, II y III, respectivamente, si las ganancias por lámpara son de \$10, \$8 y \$5, respectivamente, y las restricciones son (abastecimiento diario de metal, abastecimiento de plástico y papel, abastecimiento de vidrio)

$$3x_1 + x_2 \leqq 450, \quad 2x_2 + 3x_3 \leqq 900, \quad 2x_1 + x_2 \leqq 350.$$

8. Usar una variable artificial para maximizar $f = 2x_1 + x_2$ sujeta a

$$x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0, \quad x_1 + 2x_2 \geqq 4, \quad x_1 + x_2 \leqq 3.$$

9. Usar una variable artificial para minimizar $f = 2x_1 - x_2$ sujeta a

$$x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0, \quad x_1 + x_2 \geqq 5, \quad -x_1 + x_2 \leqq 1, \quad 5x_1 + 4x_2 \leqq 40.$$

10. Si se aplica el método de las variables artificiales a un problema sin solución, esta inexistencia se sabrá por el hecho de que no es posible deshacerse de la variable artificial. Ilustrar este hecho tratando de maximizar $f = 2x_1 + x_2$ sujeta a $x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0$ y

$$2x_1 + x_2 \leqq 2, \quad x_1 + 2x_2 \geqq 6, \quad x_1 + x_2 \leqq 4.$$

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 21

1. ¿Cuál es la diferencia entre optimización restringida y optimización no restringida?
2. Explicar la idea del método del descenso más pronunciado. ¿De qué depende la rapidez de convergencia?
3. ¿Por qué el valor de la función disminuye en cada paso del método del descenso más pronunciado (a menos de que se llegue a un punto en que el gradiente sea el vector cero)?
4. ¿Qué condición de diferenciabilidad debe hacerse en el método del descenso más pronunciado?
5. Escribir un algoritmo para el método del descenso más pronunciado.
6. ¿Qué hipótesis sobre la función objetivo se establecen en la programación lineal?
7. ¿Por qué no es posible usar métodos de cálculo para determinar máximos o mínimos en un problema de programación lineal?
8. Explicar la idea básica de la búsqueda sistemática de un máximo o un mínimo en un problema de programación lineal.
9. ¿Qué son las variables de holgura? ¿Y las variables artificiales? ¿Por qué se usaron?
10. ¿Qué sabe el lector sobre las dificultades que pueden presentarse en un problema de programación lineal? Analizar maneras de vencer tales dificultades.
11. Aplicar el método del descenso más pronunciado a $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 1.5x_2^2$, partiendo de $\mathbf{x}_0 = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ (tres pasos). ¿Por qué la convergencia es más rápida que en el ejemplo 1 de la sección 21.1?
12. En el problema 11 partir de $\mathbf{x}_0 = 1.5\mathbf{i} + \mathbf{j}$. Demostrar que las siguientes aproximaciones son $\mathbf{x}_1 = k(1.5\mathbf{i} + \mathbf{j})$, $\mathbf{x}_2 = k^2\mathbf{x}_0$, etc., en donde $k = 0.2$.
13. Comprobar que en el problema 12 los gradientes sucesivos son ortogonales. ¿Por qué?
14. ¿Qué resultado se obtiene con el método del descenso más pronunciado cuando se aplica a $f(\mathbf{x}) = x_1x_2 + 1$, partiendo de (a) $4\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, (b) $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ (1 paso)? Comparar los resultados y explicar.
15. ¿Cuál es el efecto del método del descenso más pronunciado en el caso de una sola variable?
16. Diseñar un "método del ascenso más pronunciado" para determinar máximos.

Describir y graficar la región en el primer cuadrante del plano x_1x_2 definida por las siguientes desigualdades lineales.

17. $x_1 - 2x_2 \geqq -4$, $2x_1 + x_2 \leqq 12$, $x_1 + x_2 \leqq 8$

18. $x_1 + x_2 \leqq 5$, $x_2 \leqq 3$, $-x_1 + x_2 \leqq 2$

19. $x_1 + x_2 \geqq 2$, $2x_1 - 3x_2 \geqq -12$, $x_1 \leqq 15$

20. $x_1 + 2x_2 \geqq 2$, $x_1 \leqq 6$, $x_1 - 2x_2 \geqq 0$, $x_1 + 2x_2 \leqq 6$

21. $3x_1 - 5x_2 \leqq 0$, $4x_1 + 3x_2 \leqq 28$, $5x_1 - 6x_2 \geqq -12$, $4x_1 + x_2 \geqq 4$

22. $x_1 - 3x_2 \geqq -3$, $x_1 + x_2 \leqq 9$, $2x_1 + 7x_2 \leqq 14$, $3x_1 - x_2 \geqq 24$

Minimizar la función dada f sujeta a $x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0$ y las restricciones adicionales

23. $f = 3x_1 + 2x_2, \quad x_1 + x_2 \geqq 2, \quad x_1 - x_2 \geqq -1, \quad 5x_1 + 3x_2 \leqq 15$
24. $f = 2x_1 + 8x_2, \quad 2x_1 + 4x_2 \geqq 8, \quad 2x_1 - 5x_2 \leqq 0, \quad -x_1 + 5x_2 \leqq 5$
25. $f = -2x_1 + 10x_2, \quad 4 \leqq x_1 + x_2 \leqq 10, \quad -6 \leqq x_1 - x_2 \leqq 0$
26. Maximizar $f = x_1 + x_2$ sujeta a $x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0$, y

$$x_1 + 2x_2 \leqq 10, \quad 2x_1 + x_2 \leqq 10, \quad x_2 \leqq 4.$$

27. Una empresa produce tres tipos de empaques, G_1, G_2, G_3, con ganancias netas de \$4, \$6 y \$8, respectivamente. Maximizar la ganancia total diaria sujeta a las restricciones (x_j = número de empaques G_j producidos por día)

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leqq 100 \quad \text{(maquina hora)}, \qquad 2x_1 + x_2 \leqq 40 \quad \text{(labor)}.$$

28. Graficar la región de las soluciones factibles del problema 27 e indicar la solución óptima.
29. Maximizar $f = 12x_1 + 6x_2 + 4x_3$ sujeta a las restricciones $x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, x_3 \geqq 0$.

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 \leqq 60, \quad 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leqq 50, \quad x_1 + 3x_2 + x_3 \leqq 45.$$

30. ¿Es única la solución de un problema de maximización? Explicar la respuesta.

Resumen del capítulo 21
Optimización no restringida, programación lineal

En optimización se maximiza o minimiza una **función objetivo** f dependiendo de las variables de control x_j cuyo dominio no está restringido ("optimización **no restringida**", sección 21.1) o sí lo está mediante restricciones en la forma de desigualdades, de ecuaciones o ambas cosas ("**optimización restringida**", sección 21.2).

Si la función objetivo es *lineal* y las restricciones son *desigualdades lineales* en las variables de control $x_1, \cdots, x_m$, entonces al introducir **variables de**

holgura $x_{m+1}, \cdots, x_n$ es posible escribir el problema de optimización en **forma normal** con la función objetivo definida por

(1) $$f_1 = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

(en donde $c_{m+1} = \cdots = c_n = 0$) y las restricciones definidas por

(2) $$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \\ x_1 \geqq 0, \cdots, x_n \geqq 0. & \end{aligned}$$

En este caso puede aplicarse entonces el ampliamente usado **método simplex** (sección 21.3), una búsqueda sistemática paso a paso a través de un subconjunto muy reducido de todas las soluciones factibles. En la sección 21.4 se mostró cómo superar dificultades que pueden presentarse en relación con este método.

Capítulo

22

Gráficas y análisis combinatorio

Las **gráficas** y las **digráficas** (*directed graphs*; gráficas dirigidas) están convirtiéndose en herramientas cada vez más poderosas de la ingeniería eléctrica y civil, redes de computación, administración industrial, investigación de operaciones, computación, mercadeo, economía, sociología, etc. Un factor que contribuye a acelerar este crecimiento es el impacto de las grandes computadoras rápidas y su empleo en problemas de optimización a gran escala que pueden modelarse en términos de gráficas y resolverse mediante algoritmos suministrados por la teoría de gráficas. Este método produce modelos de aplicabilidad e importancia económica generales. Se encuentra en el centro de la **"optimización combinatoria"**, expresión introducida recientemente que denota los problema de optimización que poseen estructuras discretas o combinatorias pronunciadas.

En este capítulo se proporciona una introducción a esta nueva área amplia, que está llena de nuevas ideas y de problemas sin resolver, en relación, por ejemplo, con algoritmos de cómputo eficientes e ideas sobre complejidad computacional. Las clases de problemas que serán considerados a menudo constituyen el núcleo de problemas prácticos más grandes y complejos.

Prerrequisitos: Ninguno.
Bibliografía: Apéndice 1, parte F.
Respuestas a los problemas: Apéndice 2.

22.1 GRÁFICAS Y GRÁFICAS DIRIGIDAS (DIGRÁFICAS)

En términos generales, una *gráfica* consta de puntos, denominados *vértices*, y rectas que unen los vértices. denominadas *bordes*. Por ejemplo, los vértices pueden ser cuatro ciudades y los bordes, cinco autopistas que unen las ciudades entre sí, como se muestra en la figura 449. O bien, los puntos pueden representar algunas personas, y por medio de un borde pueden conectarse aquellas que hacen negocios entre sí. O

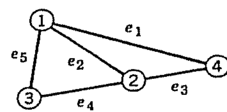


Figura 449. Gráfica que consta de 4 vértices y 5 bordes.

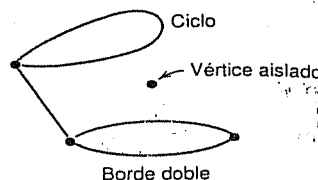


Figura 450. Vértice aislado, lazo, doble borde. (Excluido por definición.)

bien, los vértices pueden representar computadoras y los bordes conexiones entre éstas. A continuación se proporcionará una definición formal.

Definición de gráfica
Una **gráfica** G consta de dos conjuntos finitos (que tienen un número finito de elementos), un conjunto V de puntos, denominados **vértices**, y un conjunto E de rectas de conexión, denominadas **bordes**, tales que cada borde conecta dos vértices, denominados *puntos extremos* del borde. Se escribe

$$G = (V, E).$$

Por comodidad, se excluyen[1] los vértices aislados (vértices que no son puntos extremos de ningún borde), los *lazos* (vértices cuyos puntos extremos coinciden) y los *bordes múltiples* (bordes que tienen ambos puntos extremos en común). Ver la figura 450. Las precisiones anteriores son prácticas para el objetivo de este libro. ∎

Los vértices se denotarán por letras $u, v, \cdots$, o bien, por $v_1, v_2, \cdots$ o simplemente por números $1, 2, \cdots$ (como en la figura 449). Los bordes se denotarán por $e_1, e_2, \cdots$, o por sus dos puntos extremos; por ejemplo, en la figura 449 se tiene que $e_1 = (1, 4)$, $e_2 = (1, 2)$.

Se dice que un vértice v_i es **incidente** con un borde (v_i, v_j); de manera semejante para v_j. El número de bordes incidentes con un vértice se denomina **grado** de v. Dos vértices se denominan **adyacentes** en G si están conectados por un borde en G (es decir, si son los dos puntos extremos de algún borde en G).

Las gráficas se encuentran en diferentes campos bajo denominaciones distintas: como "redes" en ingeniería eléctrica, "estructuras" en ingeniería civil, "estructuras moleculares" en química, "estructuras organizacionales" en economía, "sociogramas", "mapas de carreteras", "redes de telecomunicaciones", etc.

Las redes de calles de un solo sentido, las redes de ductos, las sucesiones de tareas en trabajos de construcción, los flujos de cálculos en una computadora, las relaciones productor-consumidor y muchas otras aplicaciones, sugieren la idea de

[1] Como lo hacen muchos autores, aunque no hay uniformidad al respecto, por lo que es necesario tener cuidado. Algunos autores permiten bordes múltiples y a las gráficas sin ellos las denominan "**gráficas simples**". Otros permiten ciclos o vértices aislados, dependiendo del propósito.

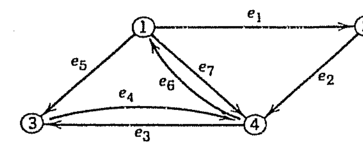


Figura 451. Digráfica.

una "digráfica" (gráfica dirigida) en donde cada borde tiene una dirección (indicada por una flecha, como en la figura 451). ∎

Definición de digráfica (gráfica dirigida)
Una **digráfica** $G = (V, E)$ es una gráfica en la que cada borde $e = (i, j)$ tiene una dirección desde su "*punto inicial*" i hasta su "*punto terminal*" j.

Ahora son permitidos dos bordes que conectan los dos mismos puntos i, j, en el supuesto de que tengan direcciones opuestas, es decir, que sean (i, j) y (j, i). *Ejemplo.* $(1, 4)$ y $(4, 1)$ en la figura 451.

Una **subgráfica** o subdigráfica de una gráfica o digráfica dada $G = (V, E)$, respectivamente, es una gráfica o digráfica que se obtiene al eliminar algunos de los bordes y vértices de G, reteniendo los otros bordes de G (junto con sus pares de puntos extremos). Por ejemplo, e_1, e_3 (junto con los vértices 1, 2, 4) constituye una subgráfica en la figura 449, y e_3, e_4, e_5 (junto con los vértices 1, 3, 4) constituye una subdigráfica en la figura 451.

Representación por computadora de gráficas y digráficas

Los dibujos de gráficas son de utilidad para explicar o ilustrar situaciones específicas. Aquí debe tomarse en cuenta que una gráfica puede trazarse de varias maneras (ver la figura 452). A fin de manejar gráficas y digráficas en computadora, se usan matrices o listas como sigue.

La matriz de adyacencia $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ de una gráfica G

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } G \text{ tiene un borde } (i, j), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

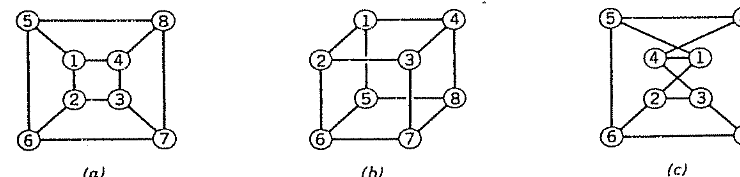
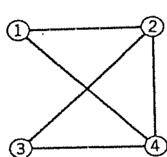


Figura 452. Diferentes representaciones de la misma gráfica.

Aquí, por definición, se considera que ningún vértice es adyacente a sí mismo. A es simétrica, $a_{ij} = a_{ji}$. (¿Por qué?)

La matriz de adyacencia de una gráfica suele ser mucho más pequeña que la *matriz de incidencia* (ver los problemas 21-24) y es preferida sobre ésta en caso de que se decida almacenar una gráfica en forma matricial en una computadora.

Ejemplo 1. Matriz de adyacencia de una gráfica.



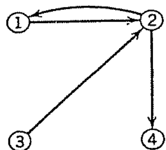
	Vértice 1	2	3	4
Vertex 1	0	1	0	1
2	1	0	1	1
3	0	1	0	1
4	1	1	1	0

La **matriz de adyacencia** $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ de una digráfica G

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } G \text{ tiene un borde } (i, j), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Esta matriz $\mathbf{A}$ no es simétrica. (¿Por qué?)

Ejemplo 2. Matriz de adyacencia de una digráfica.

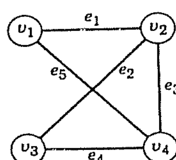


	Al vértice 1	2	3	4
Del vértice 1	0	1	0	0
2	1	0	0	1
3	0	1	0	0
4	0	0	0	0

Listas. La **lista de incidencia de vértices** de una gráfica muestra para cada vértice los bordes incidentes. La **lista de incidencia de bordes** muestra para cada borde sus dos puntos extremos. De manera semejante para una *digráfica*; en la lista de vértices, los bordes de salida tienen entonces un signo negativo, y en la lista de bordes se tienen ahora pares *ordenados* de vértices.

Ejemplo 3. Lista de incidencia de vértices y lista de incidencia de bordes de una gráfica.

Esta gráfica es la misma que en el ejemplo 1, excepto por la notación.



Vértice	Bordes incidentes
v_1	e_1, e_5
v_2	e_1, e_2, e_3
v_3	e_2, e_4
v_4	e_3, e_4, e_5

Borde	Puntos extremos
e_1	v_1, v_2
e_2	v_2, v_3
e_3	v_2, v_4
e_4	v_3, v_4
e_5	v_1, v_4

Las "**gráficas ralas**" son gráficas con pocos bordes (mucho menos que el máximo número posible $n(n-1)/2$, en donde n es el número de vértices). Para estas gráficas, las matrices no son eficientes. Entonces, las *listas* poseen la ventaja de requerir mucho menos espacio de almacenamiento y ser más fáciles de manejar; pueden ordenarse, clasificarse o manipularse de varias otras maneras directamente dentro de la computadora. Por ejemplo, al trazar un "recorrido" (una sucesión conexa de bordes con puntos extremos comunes por pares), es fácil ir y volver entre las dos listas recientemente analizadas, en vez de buscar un solo 1 en una gran columna de una matriz.

La computación ha desarrollado listas más refinadas que, además del contenido real, contienen "indicadores" que señalan el dato precedente o subsecuente a ser buscado, o ambos datos (en el caso de un "recorrido", el borde precedente o el borde subsecuente). Respecto a los detalles, consultar la obra citada en el apéndice 1 como referencia [F12].

Esta sección se dedicó a presentar los conceptos y las notaciones fundamentales que serán necesarios a lo largo de este capítulo, en el que se analizarán algunas de las clases más importantes de problemas de optimización combinatoria. Al mismo tiempo, lo anterior será de utilidad para familiarizarse más y más con las gráficas y con las digráficas.

Problemas de la sección 22.1

1. Trazar la gráfica que consta de los vértices y bordes de un tetraedro.
2. El obrero W_1 puede realizar los trabajos J_1 y J_3, el obrero W_2 puede realizar el trabajo J_4, y el obrero W_3 puede realizar los trabajos J_2 y J_3. Representar lo anterior por medio de una gráfica.
3. Explicar cómo lo siguiente puede considerarse como gráficas o como digráficas: las conexiones aéreas entre ciudades dadas: la pertenencia de algunas personas a ciertos comités; las relaciones entre los capítulos de un libro; un torneo de tenis; los países de un mapa.
4. ¿Cómo representaría el lector por medio de una digráfica una red que consta de las calles de un solo sentido y las calles de doble sentido?
5. Proporcionar más ejemplos que puedan representarse mediante una gráfica o de una digráfica.
6. Encontrar la matriz de adyacencia de la gráfica de la figura 449.

En cada caso, encontrar la matriz de adyacencia de la gráfica o de la digráfica que se muestra.

7. 8. 9. 10. 11. 12.

13. Demostrar que la matriz de adyacencia de una gráfica es simétrica.

Trazar la gráfica cuya matriz de adyacencia es

14. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **16.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Trazar la digráfica cuya matriz de adyacencia es:

17. La matriz del problema 14.
18. La matriz del problema 16.
19. **(Gráfica completa)** Demostrar que un gráfica G con n vértices puede tener cuando mucho $n(n-1)/2$ bordes, y que G tiene exactamente $n(n-1)/2$ bordes si G es *completa*, es decir, si todo par de vértices de G está unido por un borde. (Recordar que se excluyen los lazos y los bordes múltiples.)
20. ¿En qué caso todos los elementos fuera de la diagonal en la matriz de adyacencia de una gráfica G son iguales a 1?

La matriz de incidencia B de una gráfica. La definición de B es $[b_{jk}]$, donde

$$b_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si el vértice } j \text{ es un punto extremo del borde } e_k, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Encontrar la matriz de incidencia de
21. La gráfica del problema 11.
22. La gráfica del problema 10.

Trazar la gráfica cuya matriz de incidencia es

23. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **24.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

La matriz de incidencia $\widetilde{\mathbf{B}}$ de una digráfica. La definición de $\widetilde{\mathrm{B}}$ es $(\widetilde{b}_{jk})$, en donde

EN]
$$\widetilde{b}_{jk} = \begin{cases} -1 & \text{si el borde } e_k \text{ sale del vértice } j, \\ 1 & \text{si el borde } e_k \text{ entra del vértice } j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Encontrar la matriz de incidencia de la

25. Digráfica en el problema 7.
26. Digráfica en el problema 9.

Trazar la digráfica cuya matriz de incidencia es

27. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ **28.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

29. Escribir la lista de incidencia de vértices de la digráfica del problema 7.
30. Escribir la lista de incidencia de bordes de la digráfica de la figura 451.

22.2 PROBLEMAS DE LA TRAYECTORIA MÁS CORTA. COMPLEJIDAD

Empezando en esta sección, se analizarán algunas de las clases más importantes de problemas de optimización relacionados con gráficas y digráficas tal como se presentan en aplicaciones. Las ideas y los algoritmos básicos se ilustrarán y explicarán por medio de pequeñas gráficas, pero debe tenerse en cuenta que los problemas de la vida real a menudo pueden implicar muchos miles e inclusive millones de vértices y bordes (piense el lector en las redes telefónicas, en un viaje aéreo alrededor del mundo, en las compañías que poseen oficinas y almacenes en todas las grandes ciudades), por lo que entonces son absolutamente necesarios métodos sistemáticos confiables y eficientes: las soluciones por inspección o al tanteo dejan de funcionar, inclusive si fuesen aceptables soluciones "casi óptimas".

Se empezará con **problemas de la trayectoria más corta**, tal como se presentan, por ejemplo, en el diseño de las rutas más cortas (o menos costosas, o más rápidas) para un agente viajero, para un buque de carga, etc. Primero se explicará qué se entiende por trayectoria.

En una gráfica $G = (V, E)$, es posible pasar de un vértice v_1 a lo largo de algunos otros vértices hacia otro vértice v_k. Aquí es posible

(A) no imponer ninguna restricción, o bien,

(B) requerir que cada *borde* de G sea visitado cuando mucho una vez, o bien,

(C) requerir que cada *vértice* de G sea visitado cuando mucho una vez.

En el caso (A), el desplazamiento se denomina **recorrido**. Así, un recorrido de v_1 a v_k es de la forma

$$(1) \qquad (v_1, v_2), (v_2, v_3), \cdots, (v_{k-1}, v_k),$$

en donde algunos de estos bordes o vértices pueden ser los mismos. En el caso (B), en donde cada *borde* puede ocurrir cuando mucho una vez, el recorrido se denomina **camino**. Por ultimo, en el caso (C), en donde cada *vértice* puede ocurrir cuando mucho una vez (y por tanto cada borde ocurre automáticamente cuando mucho una vez), el camino se denomina **trayectoria**.

Se admite que un recorrido, un camino o una trayectoria puede terminar en el vértice en que empezó, en cuyo caso se dice que es **cerrado**, así, en (1) se tiene que $v_k = v_1$.

Una trayectoria cerrada se denomina **ciclo**. Un *ciclo tiene por lo menos tres bordes* (debido a que no se tienen bordes dobles; ver la sección 22.1). En la figura 453 se ilustran todos los conceptos anteriores.

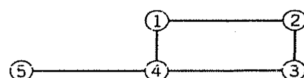


Figura 453. Recorrido, camino, trayectoria, ciclo.

1-2-3-2 es un recorrido (no un camino).
4-1-2-3-4-5 es un camino (no una trayectoria).
1-2-3-4-5 es una trayectoria (no un ciclo).
1-2-3-4-1 es un ciclo.

Trayectoria más corta. Una vez que se ha dicho qué es una trayectoria, a continuación se dirá qué se entiende por trayectoria más corta en una gráfica $G = (V, E)$. Para lo anterior, cada borde (v_i, v_j) en G debe tener una "longitud" dada $l_{ij} > 0$. Entonces, una **trayectoria más corta** $v_1 \to v_k$ (con v_1 y v_k fijos) es una trayectoria (1) tal que la suma de las longitudes de sus bordes

$$l_{12} + l_{23} + l_{34} + \cdots + l_{k-1,k}$$

es mínima (la más pequeña posible entre todas las trayectorias de v_1 a v_k). De manera semejante, una **trayectoria más larga** $v_1 \to v_k$ es una para la que esa suma es máxima.

Los problemas de la trayectoria más corta y de la trayectoria más larga figuran entre los problemas de optimización más importantes. Aquí, la «longitud» l_{ij} (a menudo denominada "costo" o "peso") puede ser una longitud real medida en kilómetros o en tiempo de viaje o en gastos de gasolina, aunque también puede ser algo completamente diferente.

Por ejemplo, el "*problema del agente viajero*" requiere la determinación del **ciclo hamiltoniano**[2] más corto en una gráfica dada, es decir, un ciclo que contiene a todos los vértices de la gráfica.

Como otro ejemplo, al elegir la "ruta más rentable" $v_1 \to v_k$, un agente viajero desea maximizar $\sum l_{ij}$, en donde l_{ij} es su comisión esperada menos sus gastos de viaje para ir del pueblo i al pueblo j.

En un problema de inversión, i puede ser el día en que se realiza una inversión, j el día de vencimiento y l_{ij} la ganancia resultante, y se obtiene una gráfica al considerar las varias posibilidades de invertir y reinvertir durante un periodo de tiempo dado.

Trayectoria más corta si todos los bordes son de longitud uno

Resulta evidente que si todos los bordes son de longitud uno, entonces la trayectoria más corta $v_1 \to v_k$ es aquella que tiene el menor número de bordes de todas las trayectorias $v_1 \to v_k$ en una gráfica G dada. Para este problema se analizará un algoritmo de PBA (**primera búsqueda de amplitud**). Lo anterior significa que en cada paso el algoritmo visita *todos los vértices vecinos* (todos adyacentes) de un vértice alcanzado, en oposición a un algoritmo de PBP (**primera búsqueda de profundidad**), que realiza un gran camino (como en un laberinto). Este algoritmo ampliamente usado se muestra en la tabla 22.1.

[2] WILLIAM ROWAN HAMILTON (1805-1865), matemático irlandés, conocido por su obra en dinámica

Tabla 22.1
Algoritmo PBA de Moore para la trayectoria más corta (todas las longitudes miden uno)[3]

ALGORITMO MOORE $[G = (V, E), s, t]$
Este algoritmo determina una trayectoria más corta en una gráfica conexa $G = (V, E)$ de un vértice s a un vértice t.

ENTRADA: Gráfica conexa $G = (V, E)$, en donde un vértice se denota por s y otro por t, y cada borde (i, j) es de longitud $l_{ij} = 1$. Inicialmente todos los vértices están sin etiquetar.

SALIDA: Una trayectoria más corta $s \to t$ en $G = (V, E)$

1. Identificar s con 0.
2. Hacer $i = 0$.
3. Encontrar todos los vértices *sin etiquetar* adyacentes a un vértice etiquetado con i.
4. Etiquetar con $i + 1$ a los vértices recientemente encontrados.
5. Si el vértice t está etiquetado, entonces el "seguimiento hacia atrás" proporciona la trayectoria más corta

$$k\ (= \text{etiqueta de } t),\ k-1\ \ k-2, \cdots, 0$$

SALIDA $k, k-1\ \ k-2, \cdots, 0$. Detener el proceso

O bien, incrementar i por 1. Proceder al paso 3.

Fin de MOORE

Se desea encontrar la trayectoria más corta en G de un vértice s (***inicial***) a un vértice t (***terminal***). A fin de garantizar que existe una trayectoria de s a t, es necesario asegurarse de que G no consta de porciones separadas. Por tanto, se supone que G es **conexo**, es decir, que para dos vértices v y w cualesquiera existe una trayectoria $v \to w$ en G. (Recordar que un vértice v se denomina **adyacente** a un vértice u si existe un borde (u, v) en G.)

Ejemplo 1. Aplicación del algoritmo PBA de Moore.

Encontrar la trayectoria más corta $s \to t$ en la gráfica G que se muestra en la figura 454

Solución. En la figura 454 se indican las etiquetas. Los bordes con trazo grueso constituyen una trayectoria más corta (longitud 4). Existe otra trayectoria más corta $s \to t$. (¿Puede encontrarla el lector?) Por

[3] *Proceedings of the International Symposium for Switching Theory*, parte II, págs. 285-292. Cambridge: Harvard University Press, 1959.

tanto, en el programa es necesario introducir una regla que haga única la búsqueda, ya que en caso contrario la computadora no sabrá qué hacer a continuación si en algún paso es necesario efectuar una decisión (por ejemplo, en la figura 454 cuando el algoritmo va de regreso al vértice identificado por 2). La siguiente regla parece ser natural.

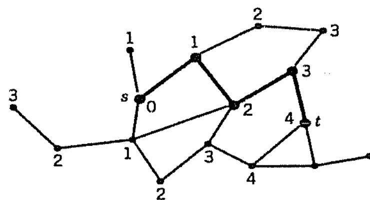


Figura 454. Ejemplo 1, gráfica dada y resultado del etiquetado.

Regla de búsqueda. Usando la numeración de los vértices de 1 a n (¡no las etiquetas!), en cada paso, si se llega a un vértice etiquetado con i, entonces como siguiente vértice tomar el que tiene el menor número (¡no la etiqueta más pequeña!) de entre todos los vértices etiquetados con $i - 1$. ∎

Complejidad de un algoritmo

Complejidad *del algoritmo de Moore*. Para encontrar los vértices que habrán de ser etiquetados con 1, es necesario explorar todos los bordes incidentes con s. Luego, cuando $i = 1$, es necesario explorar todos los bordes incidentes con los vértices etiquetados con 1, y así sucesivamente. Por tanto, cada borde es explorado dos veces. Se realizan $2m$ operaciones (m = número de bordes de G). Ésta es una función $c(m)$. El hecho de que sea $2m$ o $5m + 3$ o $12m$ no es tan importante; *lo* esencial es que $c(m)$ sea proporcional a m (no a m^2, por ejemplo): es del "orden" m. Para cualquier función $am + b$ simplemente se escribe $O(m)$, para cualquier función $am^2 + bm + d$ simplemente se escribe $O(m^2)$, etc. Aquí, O sugiere "orden". La idea subyacente y el aspecto práctico son como sigue.

Al juzgar un algoritmo, el interés primordial lo constituye su comportamiento para problemas muy grandes (m grande en este caso), ya que éstos van a determinar los límites de la aplicabilidad del algoritmo. Por tanto, la cuestión importante aquí es el término que crece más rápido (am^2 en $am^2 + bm + d$, etc.), ya que éste superará a los demás cuando m sea suficientemente grande. También, un factor constante en este término no es muy importante; por ejemplo, la diferencia entre dos algoritmos de órdenes, por ejemplo, $5m^2$ y $8m^2$ suele no ser muy importante y puede hacerse irrelevante por medio de un modesto incremento en la rapidez de las computadoras. Sin embargo, sí hay una gran diferencia práctica en que un algoritmo sea de orden m o m^2, e inclusive de una potencia superior m^p. Y la diferencia más grande ocurre entre estos "órdenes polinómicos" y "órdenes exponenciales", como 2^m.

Por ejemplo, en una computadora que realiza 10^9 operaciones por segundo, un problema de tamaño $m = 50$ se hará en 0.3 segundos con un algoritmo que requiere m^5 operaciones, pero se hará en 13 días con un algoritmo que requiere 2^m operaciones. Sin embargo, esta no es la única razón para considerar los órdenes polinómicos tan buenos y los órdenes exponenciales tan malos. Otra razón es la ganancia al usar una computadora más rápida. Por ejemplo, ya que $1000 = 31.6^2 = 2^{9.97}$, un incremento en la rapidez por un factor de 1000 permitirá ejecutar por hora problemas 1000 y 31.6 veces tan grandes si los algoritmos son $O(m)$ y $O(m^2)$, respectivamente, pero cuando un algoritmo es $O(2^m)$, entonces todo lo que se gana es un incremento relativamente modesto de 10 en el tamaño del problema, ya que $2^{9.97} \cdot 2^m = 2^{m+9.97}$.

El **símbolo O** es bastante práctico y de uso común siempre que el orden de crecimiento es esencial, pero no así la forma específica de una función. Por tanto, si una función $g(m)$ es de la forma

$$g(m) = kh(m) + \text{términos que crecen más rápido} \quad (k \text{ constante}),$$

entonces se dice que $g(m)$ es de *orden* $h(m)$ y se escribe

$$g(m) = O(h(m)).$$

Por ejemplo,

$$am + b = O(m), \quad am^2 + bm + d = O(m^2), \quad 5 \cdot 2^m + 3m^2 = O(2^m),$$

y así sucesivamente.

Se desea que un algoritmo $\mathscr{A}$ sea "eficiente", es decir, "bueno" con respecto al

(i) *tiempo* (número $c_{\mathscr{A}}(m)$ de operaciones de la computadora)

o bien, con respecto al

(ii) *espacio* (almacenamiento necesario en la memoria interna)

o con respecto a ambas cosas. Aquí, $c_{\mathscr{A}}$ sugiere "**complejidad**" de $\mathscr{A}$. Dos opciones populares de $c_{\mathscr{A}}$ son

(*El peor de los casos*) $c_{\mathscr{A}}(m)$ = tiempo más largo que $\mathscr{A}$ requiere para un problema de tamaño m,

(*Caso promedio*) $c_{\mathscr{A}}(m)$ = tiempo promedio que $\mathscr{A}$ requiere para un problema de tamaño m.

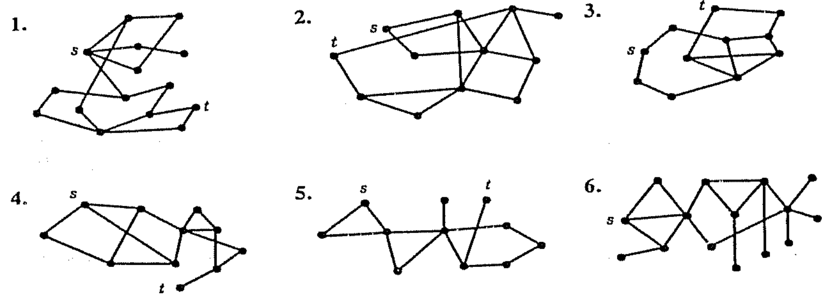
En problemas sobre gráficas, el "tamaño" a menudo es m (número de bordes) o n (número de vértices). Para el sencillo algoritmo en cuestión, $c_{\mathscr{A}}(m) = 2m$ en ambos casos.

Para un "buen" algoritmo $\mathscr{A}$, se desea que $c_A(m)$ no crezca demasiado rápido. En consecuencia, $\mathscr{A}$ se denomina **eficiente** si $c_{\mathscr{A}}(m) = O(m^k)$ para algún entero $k \geq 0$; es decir, $c_{\mathscr{A}}$ puede contener sólo potencias de m (o funciones que crecen incluso más lentamente, como $\ln m$), pero no funciones exponenciales. Además, se dice que $\mathscr{A}$ está **polinómicamente acotado** si $\mathscr{A}$ es eficiente cuando se elige el "peor de los casos" $c_{\mathscr{A}}(m)$. Estos conceptos convencionales tienen una fundamentación intuitiva, como se muestra en el análisis.

La complejidad debe investigarse para todo algoritmo, de modo que también puedan compararse diferentes algoritmos para la misma tarea. Lo anterior a menudo puede exceder el nivel de este capítulo; por consiguiente, el campo de estudio aquí se limitará a unos cuantos comentarios ocasionales en este sentido.

Problemas de la sección 22.2

En cada gráfica encontrar una trayectoria más corta $P: s \to t$ y su longitud aplicando el algoritmo PBA de Moore; trazar la gráfica con las etiquetas e indicar P con un trazo más grueso (como en la figura 454).



7. Una trayectoria más corta $s \to t$ para s y t dados no necesariamente es única. Ilustrar ésto encontrando otra trayectoria más corta $s \to t$ en el ejemplo 1.
8. ¿Cuántos bordes puede tener cuando mucho una trayectoria más corta entre dos vértices cualesquiera en una gráfica con n vértices? Justificar la respuesta. ¿Y en una gráfica completa con todos los bordes de longitud 1?
9. **(Algoritmo de Moore)** Demostrar que si un vértice v tiene etiqueta $\lambda(v)$, entonces existe una trayectoria $s \to v$ de longitud k.
10. **(Algoritmo de Moore)** Denominar en forma abreviada *distancia* de v a s a la longitud de una trayectoria más corta $s \to v$. Demostrar que si la distancia de v es l, entonces su etiqueta es $\lambda(v) = l$.
11. **(Ciclo hamiltoniano)** Encontrar y trazar un ciclo hamiltoniano en la gráfica del problema 3.
12. ¿La gráfica del problema 2 tiene un ciclo hamiltoniano? (Justificar la respuesta.)
13. Encontrar y trazar un ciclo hamiltoniano en la figura 452, sección 22-1.
14. Encontrar y trazar un ciclo hamiltoniano en la gráfica de un dodecaedro, que tiene 12 caras pentagonales y 20 vértices (figura 455). Este es un problema considerado por Hamilton.

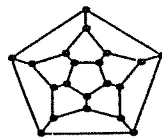


Figura 455. Problema 14.

15. Dividir un cuadrado en 5×5 cuadrados congruentes y determinar en la gráfica resultante un ciclo hamiltoniano con 36 vértices.
16. **(Gráfica de Euler)** Una *gráfica de Euler G* es una gráfica que tiene un camino cerrado de Euler. Un **camino de Euler** es un camino que contiene a cada borde de G exactamente una vez. ¿Cuál subgráfica con 4 bordes de la gráfica en el ejemplo 1, sección 22.1, es una gráfica de Euler?

17. ¿La gráfica de la figura 456 es una gráfica de Euler? (Justificar la respuesta.)
18. Encontrar cuatro caminos cerrados de Euler diferentes en la figura 457.
19. **(Problema del cartero)** El *problema del cartero* (o *problema del cartero chino*[4]) es el problema que consiste en encontrar un recorrido cerrado $W: s \to s$ (s es la oficina de correos) en una gráfica G con bordes (i, j) de longitudes $l_{ij} > 0$ tales que todo borde de G sea recorrido por lo menos una vez y la longitud de W sea mínima. Explicar algunas otras aplicaciones en las que este problema es esencial.
20. Encontrar por inspección una solución del problema del cartero en la figura 456.

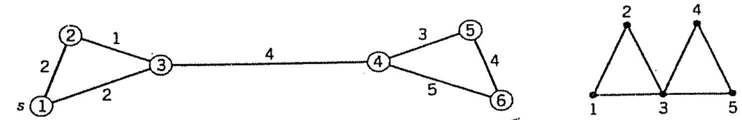


Figura 456. Problemas 17 y 20.

Figura 457. Problema 18.

21. ¿Cuál es la diferencia entre el problema del cartero y el problema del agente de ventas mencionado en el texto?
22. Demostrar que la longitud de un camino más corto del cartero es la misma para cualquier vértice de inicio.
23. **(Orden)** Demostrar que $O(m^3) + O(m^3) = O(m^3)$ y que $kO(m^p) = O(m^p)$.
24. Demostrar que $\sqrt{1+m^2} = O(m)$, $0.02e^m + 100m^2 = O(e^m)$.
25. Si se cambia de una computadora a otra que es 100 veces más rápida, ¿cuál es la ganancia en tamaño del problema por hora en el uso de una algoritmo que es $O(m)$, $O(m^2)$, $O(m^5)$, $O(e^m)$?

22.3 PRINCIPIO DE OPTIMALIDAD DE BELLMAN. ALGORITMO DE DIJKSTRA

Se continuará el análisis del problema de la trayectoria más corta en una gráfica G. En la última sección se abordó el caso especial en que todos los bordes son de longitud 1. Sin embargo, en casi todas las aplicaciones los bordes (i, j) tienen longitudes cualesquiera $l_{ij} > 0$, por lo que ahora se estudiará el caso general, que reviste mayor importancia práctica. Se escribirá $l_{ij} = \infty$ para cualquier borde (i, j) que no exista en G (haciendo $\infty + a = \infty$ para cualquier número a, como de costumbre).

Se considerará el problema de encontrar trayectorias más cortas desde un vértice dado, denotado por 1 y denominado **origen**, hacia *todos* los otros vértices 2, 3, $\cdots$, n de G. L_j denotará la longitud de una trayectoria más corta $1 \to j$ en G.

Principio de minimalidad (o de optimalidad) de Bellman

Si $P: 1 \to j$ es una trayectoria más corta desde 1 hasta j en G y el último borde de P es (i, j) (figura 458), entonces $P_i: 1 \to i$ [que se obtiene eliminando (i, j) de P] es una trayectoria más corta $1 \to i$.

[4] Debido a que primero fue considerado en la revista *Chinese Mathematics* **1** (1962), 273-77.

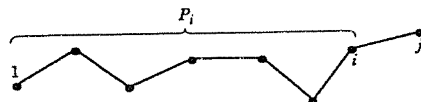


Figura 458. Trayectorias P y P_i en el principio de optimalidad de Bellman.

Demostración. Suponer que la conclusión es falsa. Entonces existe una trayectoria $P_i^*: 1 \to i$ que es más corta que P_i. Por tanto, si ahora se agrega (i,j) a P_i^* se obtiene una trayectoria $1 \to j$ que es más corta que P. Esto contradice la hipótesis de que P es la más corta. ∎

Con base en el principio de Bellman es posible obtener ecuaciones básicas como sigue. Para j fijo es posible obtener varias trayectorias $1 \to j$ al considerar las trayectorias más cortas P_i para varios i para las cuales en G exista un borde (i,j), y agregar (i,j) a la P_i correspondiente. Resulta evidente que estas trayectorias tienen longitudes $L_i + l_{ij}$ (L_i = longitud de P_i). Ahora es posible considerar el mínimo sobre i, es decir, elegir una i para la que $L_i + l_{ij}$ sea mínima. Por el principio de Bellman, con lo anterior se obtiene una trayectoria más corta $1 \to j$ cuya longitud es

$$\boxed{\begin{aligned} L_1 &= 0 \\ L_j &= \min_{i \neq j} (L_i + l_{ij}), \end{aligned}} \qquad j = 2, \cdots, n.$$

Éstas son las **ecuaciones de Bellman**. Como por definición se tiene que $l_{ii} = 0$, entonces en lugar de $\min_{i \neq j}$ puede escribirse simplemente $\min_i$. Estas ecuaciones sugieren la idea de uno de los mejores algoritmos conocidos para el problema de la trayectoria más corta, como sigue.

El **algoritmo de Dijkstra** se muestra en la tabla 22-2. Se trata de un procedimiento de etiquetado. En cada etapa de los cálculos, cada vértice v recibe una etiqueta, ya sea

(EP) una *etiqueta permanente* = longitud L_v de una trayectoria más corta $1 \to v$

o bien,

(ET), una *etiqueta temporal* = cota superior $\tilde{L}_v$ para la longitud de una trayectoria más corta $1 \to v$.

Los conjuntos de vértices con una etiqueta permanente y con una etiqueta temporal se denotan por *EP* y *ET*, respectivamente. El algoritmo tiene un paso inicial en el que el vértice 1 obtiene la etiqueta permanente $L_1 = 0$ y los otros vértices obtienen etiquetas temporales, y luego el algoritmo alterna entre los pasos 2 y 3. En el paso 2, la idea es elegir k "mínimamente". En el paso 3, la idea es que las cotas superiores en general mejorarán (disminuirán), por lo que es necesario actualizarlas en consecuencia.

Algoritmo de Dijkstra para trayectorias más cortas

Tabla 22.2
Algoritmo de Dijkstra para la trayectoria más corta[5]

ALGORITMO DIJKSTRA [$G = (V, E)$, $V = \{1, \cdots, n\}$, l_{ij} para todo (i,j) en E]

Dada una gráfica conexa $G = (V, E)$ con vértices $1, \cdots, n$ y bordes (i,j) de longitudes $l_{ij} > 0$, este algoritmo determina las longitudes de las trayectorias más cortas del vértice 1 a los vértices $2, \cdots, n$.

ENTRADA: Número de vértices n, bordes (i,j), y longitudes l_{ij}
SALIDA: Longitudes L_j de las trayectorias más cortas $1 \to j$, $j = 2, \cdots, n$

1. *Paso inicial*
   El vértice 1 obtiene EP: $L_1 = 0$.
   El vértice j $(= 2, \cdots, n)$ obtiene ET: $\tilde{L}_j = l_{1j}$ (∞ si no hay borde $(1,j)$ en G).
   Hacer EP = {1}, ET = $2, 3, \cdots n$.
2. *Fijado de una etiqueta permanente*
   Encontrar un k en ET para el que $\tilde{L}_k$ sea mínimo, hacer $L_k = \tilde{L}_k$. Tomar el k más pequeño en caso de haber varios. Eliminar k de ET e incluirlo en EP.
   Si ET = ∅ (es decir, que ET es vacío) entonces

   SALIDA: $L_2, \cdots, L_n$. Detener el proceso

   En caso contrario, continuar (es decir, proceder al paso 3).
3. *Actualización de etiquetas tentativas*

   Para todo j en ET, hacer[6] $\tilde{L}_j = \min_k \{\tilde{L}_j, L_k + l_{kj}\}$.

   Proceder al paso 2.

Fin de DIJKSTRA

Ejemplo 1. Aplicación del algoritmo de Dijkstra.

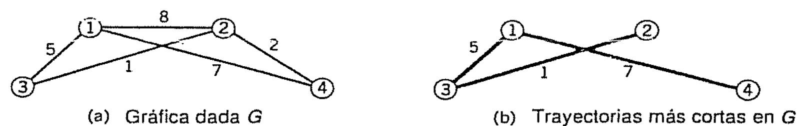
Aplicar el algoritmo de Dijkstra a la gráfica de la figura 459 y encontrar las trayectorias más cortas del vértice 1 a los vértices 2, 3, 4.

Solución. Se enumerarán los pasos y los cálculos.

1. $L_1 = 0$, $\tilde{L}_2 = 8$, $\tilde{L}_3 = 5$, $\tilde{L}_4 = 7$,	$\mathcal{PL} = \{1\}$,	$\mathcal{TL} = \{2, 3, 4\}$
2. $L_3 = \min\{\tilde{L}_2, \tilde{L}_3, \tilde{L}_4\} = 5$, $k = 3$,	$\mathcal{PL} = \{1, 3\}$,	$\mathcal{TL} = \{2, 4\}$
3. $\tilde{L}_2 = \min\{8, L_3 + l_{32}\} = \min\{8, 5 + 1\} = 6$		
$\tilde{L}_4 = \min\{7, L_3 + l_{34}\} = \min\{7, \infty\} = 7$		
2. $L_2 = \min\{\tilde{L}_2, \tilde{L}_4\} = 6$, $k = 2$,	$\mathcal{PL} = \{1, 2, 3\}$,	$\mathcal{TL} = \{4\}$
3. $\tilde{L}_4 = \min\{7, L_2 + l_{24}\} = \min\{7, 6 + 2\} = 7$		
2. $L_4 = 7$, $k = 4$	$\mathcal{PL} = \{1, 2, 3, 4\}$,	$\mathcal{TL} = \varnothing$.

[5] *Numerische Mathematik* 1 (1959), 269-271.
[6] Es decir, como la nueva $\tilde{L}_j$ se toma el número $\min_k \{L_j, L_k + l_{kj}\}$.

En la figura 459b se muestran las trayectorias más cortas resultantes, de longitudes $L_2 = 6$, $L_3 = 5$, $L_4 = 7$.



(a) Gráfica dada G (b) Trayectorias más cortas en G

Figura 459. Ejemplo 1.

Complejidad. *El algoritmo de Dijkstra es $O(n^2)$.*

Demostración. El paso 2 requiere la comparación de elementos, primero $n - 2$, luego $n - 3$, etc., un total de $(n - 2)(n - 1)/2$. El paso 3 requiere el mismo número de comparaciones, un total de $(n - 2)(n - 1)/2$, así como de adiciones, primero $n - 2$, luego $n - 3$, etc., de nuevo un total de $(n - 2)(n - 1)/2$. Por tanto, el número total de operaciones es $3(n - 2)(n - 1)/2 = O(n^2)$. ∎

Problemas de la sección 22.3

1. En la figura 460 se muestra una red de carreteras que conecta cuatro pueblos y debe reducirse a una longitud mínima, pero de modo que siga siendo posible llegar a todos los pueblos desde cualquier otro pueblo. ¿Cuál de las carreteras debe retenerse? Encontrar la solución (a) por inspección, (b) aplicando el algoritmo de Dijkstra.

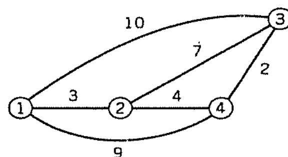
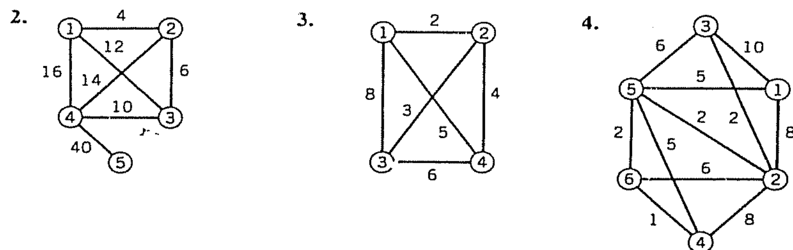
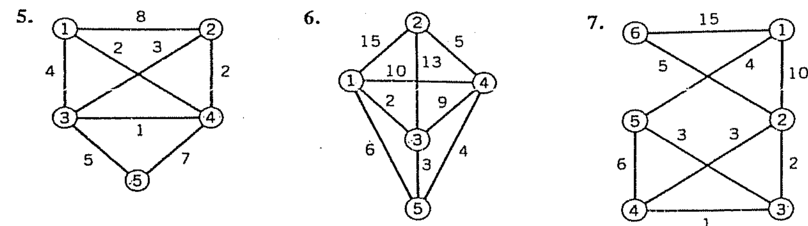


Figura 460. Problema 1.

Aplicando el algoritmo de Dijkstra, determinar las trayectorias más cortas para las siguientes gráficas.





8. Demostrar que en el algoritmo de Dijkstra, para L_k existe una trayectoria P: $1 \to k$ de longitud L_k.
9. Demostrar que en el algoritmo de Dijkstra, en cada instante la demanda de almacenamiento es baja (datos para menos de n bordes).

Longitudes negativas. En general no suele considerarse el caso de longitudes negativas, aunque se quiere indicar que las longitudes negativas pueden provocar dificultades, especialmente cuando conducen a ciclos de longitud negativa.

10. Por inspección, encontrar trayectorias más cortas en la figura 461 y confirmar el resultado aplicando las ecuaciones de Bellman.
11. Por inspección, encontrar trayectorias más cortas en la figura 461 y demostrar que las ecuaciones de Bellman no tienen solución única.
12. Demostrar por inspección que en la figura 463 no existen trayectorias más cortas únicas.

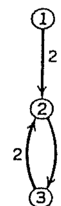


Figura 461. Problema 10.

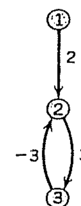


Figura 462. Problema 11.

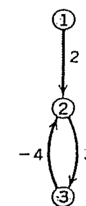


Figura 463. Problema 12.

22.4 ÁRBOLES DE EXPANSIÓN MÁS CORTOS. ALGORITMO CODICIOSO DE KRUSKAL

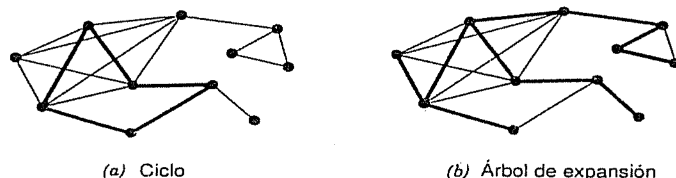
Hasta el momento se han analizado problemas de trayectoria más corta. A continuación se estudiará un tipo particularmente importante de gráfica, denominada árbol, junto con problemas de optimización relacionados que se presentan bastante a menudo en la práctica.

Por definición, un **árbol** T es una gráfica conexa y que no tiene ciclos. "**Conexa**" significa que existe una trayectoria desde cualquier vértice en T a cualquier otro vértice en T. Un **ciclo**[7] es una trayectoria $s \to t$ de por lo menos tres bordes que es cerrada ($t = s$); ver también la sección 22.2. En la figura 464a se muestra un ejemplo.

[7] **O circuito.** ¡Precaución! La terminología varía considerablemente.

Un **árbol de expansión** T en una gráfica conexa dada $G = (V, E)$ es un árbol que contiene a *todos* los n vértices de G. Ver la figura 464b. Este árbol tiene $n - 1$ vértices. (¡Demostrarlo!)

Un **árbol de expansión más corto** T en una gráfica conexa G (cuyos bordes (i, j) tienen longitudes $l_{ij} > 0$) es un árbol de expansión para el cual $\sum l_{ij}$ (sumatoria sobre todos los bordes de T) es mínima en comparación con $\sum l_{ij}$ para cualquier otro árbol de expansión en G.



(a) Ciclo *(b)* Árbol de expansión

Figura 464. Ejemplo de (a) un ciclo, (b) un árbol de expansión en una gráfica.

Los árboles figuran entre los tipos más importantes de gráficas y se presentan en varias aplicaciones. Algunos ejemplos conocidos son los árboles genealógicos y los organigramas. Los árboles pueden usarse para presentar, organizar o analizar redes eléctricas, relaciones productor-consumidor y otras relaciones de negocios, información en sistemas de bases de datos, estructura sintáctica de programas de computadora, etc. Se mencionarán unas cuantas aplicaciones específicas que no requieren explicaciones adicionales extensas.

El conjunto de las trayectorias más cortas desde el vértice 1 hasta los vértices $2, \cdots, n$ en la última sección constituye un árbol de expansión.

Las líneas de ferrocarril que conectan varias ciudades (los vértices) pueden disponerse en forma de árbol de expansión, en donde la "longitud" de una línea (borde) es el costo de construcción, y se desea minimizar el costo de construcción total. De manera semejante para las líneas de autobuses, en donde la "longitud" puede ser el costo de operación anual promedio. O bien, para las líneas de buques de carga, en donde la "longitud" puede ser la ganancia y el objetivo es la maximización de la ganancia total; o en una red de líneas telefónicas entre algunas ciudades, un árbol de expansión más corto puede representar simplemente una selección de las líneas que conectan todas las ciudades al costo mínimo.

Como ejemplo ligeramente más complejo, considerar una red de comunicación privada G, sea p_{ij} la probabilidad de que un extraño intercepte la línea (i, j), y suponer que se desea comunicar un mensaje confidencial a todos los participantes (vértices) a lo largo de un árbol de expansión T en G que minimiza el producto de la p_{ij} de todos los bordes (líneas) de T, es decir, suponiendo independencia estocástica, la probabilidad total de intercepción; de manera equivalente, un árbol T que minimice la suma de los logaritmos de las p_{ij} o, mejor aún, la suma de $l_{ij} = \ln \tilde{P}_{ij}$, en donde $\tilde{P}_{ij} = Kp_{ij}$ con K tan grande que $\tilde{P}_{ij} > 1$ para cada borde de la red G; así, $l_{ij} > 0$.

Además de estos ejemplos de redes de transporte y comunicación podrían mencionarse otros de redes de distribución, etc.

A continuación se analizará un simple algoritmo para el problema del árbol de expansión más corto, que es particularmente idóneo para gráficas ralas (gráficas con muy pocos bordes; ver la sección 22.1). Este algoritmo se muestra en la tabla 22.3.

Tabla 22.3
Algoritmo codicioso de Kruskal para árboles de expansión más cortos[8]

Algoritmo KRUSKAL $[G = (V, E), l_{ij}$ para todo (i, j) en $E]$

Dada una gráfica conexa $G = (V, E)$ con bordes (i, j) de longitud $l_{ij} > 0$, el algoritmo determina un árbol de expansión más corto T en G.

ENTRADA: Bordes (i, j) de G y sus longitudes l_{ij}

SALIDA: El árbol de expansión más corto T en G

1. Ordenar los bordes de G en orden creciente de longitud.
2. Elegirlos en este orden como bordes de T, rechazando un borde sólo si forma un ciclo con bordes ya elegidos.

   Si se han elegido $n - 1$ bordes, entonces

   SALIDA T: (= el conjunto de bordes elegidos). Detener el proceso

Fin de KRUSKAL

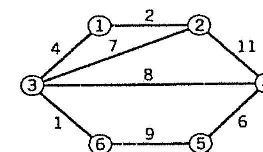


Figura 465. Gráfica del ejemplo 1.

Ejemplo 1. Aplicación del algoritmo de Kruskal.

Encontrar un árbol de expansión más corto en la gráfica de la figura 465.

Solución. Ver la tabla 22.4. En algunas de las etapas intermedias los bordes elegidos forman una gráfica *disconexa* (ver la figura 466); esto es común. La búsqueda se detiene después de $n - 1 = 5$ elecciones, ya que un árbol de expansión tiene $n - 1$ bordes. En este problema, los bordes elegidos están en la parte superior de la lista. Este hecho es típico de los problemas de cualquier tamaño; en general, los bordes en las posiciones más bajas de la lista tienen menor posibilidad de ser elegidos. ∎

Tabla 22.4
Solución en el ejemplo 1

Borde	Longitud	Elección
(3, 6)	1	Primera
(1, 2)	2	Segunda
(1, 3)	4	Tercera
(4, 5)	6	Cuarta
(2, 3)	7	Rechazar
(3, 4)	8	Quinta
(5, 6)	9	
(2, 4)	11	

[8] *Proceedings of the American Mathematical Society* 7 (1956), 48-50.

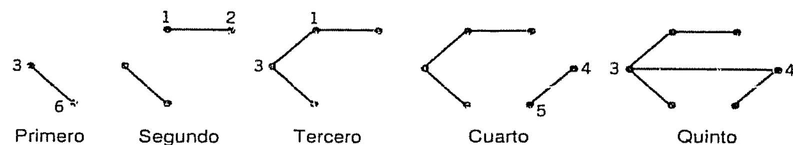


Figura 466. Proceso de elección en el ejemplo 1.

La eficiencia del método de Kruskal se incrementa grandemente por medio de la

doble etiquetación de los vértices.
Cada vértice i cuenta con una doble etiqueta (r_i, p_i), *en donde*
r_i = *Raíz del subárbol al que pertenece i, en donde*
p_i = *Predecesor de i en su subárbol,*
$p_i = 0$ *para las raíces.*

Lo anterior simplifica el

rechazo. *Si* (i, j) *es el próximo vértice a considerar en la lista, entonces rechazar* (i, j) *si* $r_i = r_j$ (es decir, i y j están en el mismo subárbol, de modo que ya están unidos por bordes e (i, j) crearía así un ciclo). *Si* $r_i \neq r_j$, *entonces incluir* (i, j) *en T.*

Si para elegir r_i existen varias opciones, entonces debe escogerse el más pequeño. Si un subárbol se une (se vuelve un solo árbol), entonces debe retenerse la raíz más pequeña como la raíz del nuevo subárbol.

Para el ejemplo 1, la lista con doble etiqueta se muestra en la tabla 22.5. Al almacenar esta lista, en cada instante puede retenerse sólo la última doble etiqueta. Se muestran todas las dobles etiquetas a fin de presentar el proceso en todas sus etapas. Las etiquetas que permanecen sin cambio no vuelven a enumerarse. Se han subrayado los dos unos que son la raíz común de los vértices 2 y 3, que es la razón para rechazar el borde (2, 3). Al leer para cada vértice la última etiqueta puede leerse a partir de esta lista que 1 es el vértice que se ha elegido como raíz y el árbol es como se muestra en la última parte de la figura 466. Lo anterior es posible por la etiqueta del predecesor que posee cada vértice. También, para aceptar o rechazar un borde basta efectuar una sola comparación (las raíces de los dos puntos extremos del borde).

Tabla 22.5

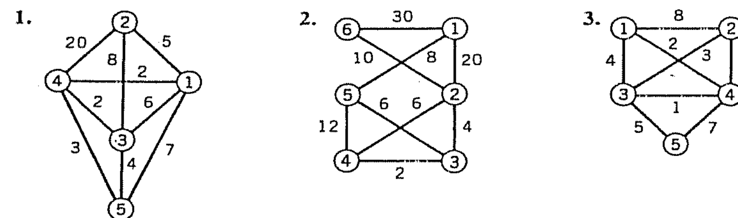
Lista de las etiquetas dobles en el ejemplo 1

Vértice	Elección 1 (3, 6)	Elección 2 (1, 2)	Elección 3 (1, 3)	Elección 4 (4, 5)	Elección 5 (3, 4)
1		(1, 0)			
2		(<u>1</u>, 1)			
3	(3, 0)		(<u>1</u>, 1)		
4				(4, 0)	(1, 3)
5				(4, 4)	(1, 4)
6	(3, 3)		(1, 3)		

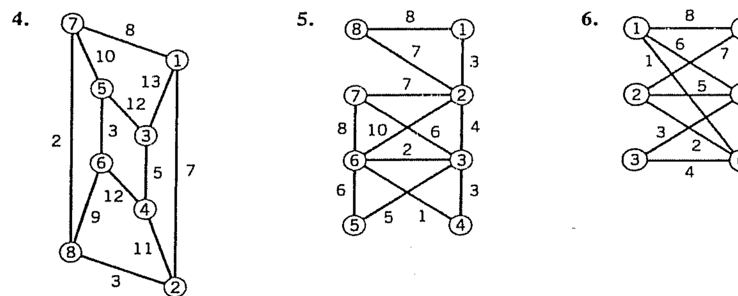
La parte más costosa del algoritmo es el **ordenamiento**. Se trata de un proceso estándar en el procesamiento de datos para el que se han sugerido varios métodos (consultar la obra citada en el apéndice 1 como referencia [E14]). Para una lista completa de m bordes, un algoritmo sería de $O(m \log_2 m)$, pero como es más probable encontrar primero los $n - 1$ bordes del árbol, al inspeccionar los q ($< m$) bordes que están en la parte superior, para tal lista de q bordes se tendría $O(q \log_2 m)$.

Problemas de la sección 22.4

Aplicando el algoritmo de Kruskal, encontrar un árbol de expansión más corto para las siguientes gráficas.



Algoritmo de Kruskal (*continuación*)



7. En la gráfica de la figura 467, encontrar (a) trayectorias más cortas de 1 a 2 y de 1 a 3, (b) un árbol de expansión más corto. Comparar la suma de las longitudes de los bordes usados en (a) con la de los bordes usados en (b) y hacer un comentario.

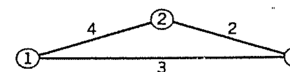


Figura 467. Problema 7.

8. Diseñar un algoritmo para obtener árboles de expansión más largos.

9. Aplicar el algoritmo del problema 8 a la gráfica del ejemplo 1. Comparar con el resultado del ejemplo 1.

10. A fin de obtener un árbol de expansión mínimo, en vez de agregar bordes más cortos, podría pensarse en eliminar los bordes más largos. ¿Para qué gráficas sería factible esto? Describir un algoritmo para llevar a cabo lo anterior.
11. Aplicar el método sugerido en el problema 10 a la gráfica del ejemplo 1. ¿Se obtiene el mismo árbol?
12. Encontrar el árbol de expansión más corto en la gráfica completa de todas las 30 conexiones aéreas posibles entre las seis ciudades dadas (distancias en millas, redondeadas). ¿Puede pensar el lector en una aplicación práctica del resultado?

	Dallas	Denver	Los Angeles	Nueva York	Washington, DC
Chicago	800	900	1800	700	650
Dallas		650	1300	1350	1200
Denver			850	1650	1500
Los Angeles				2500	2350
Nueva York					200

Propiedades generales de los árboles

13. Si en una gráfica G dos vértices cualesquiera están conectados por una trayectoria única, demostrar que G es un árbol.
14. **(Unicidad)** Demostrar que la trayectoria que conecta dos vértices cualesquiera u y v en un árbol T es única.
15. Demostrar que un árbol T con exactamente dos vértices de grado 1 (ver la sección 22.1) debe ser una trayectoria.
16. Demostrar que un árbol con n vértices tiene $n - 1$ bordes.
17. **(Bosque)** Una gráfica (no necesariamente conexa) sin ciclos se denomina *bosque*. Proporcionar ejemplos típicos de aplicaciones en las que las gráficas que aparecen son bosques o árboles.
18. Demostrar que si un gráfica G no tiene ciclos, entonces G debe tener por lo menos 2 vértices de grado 1.
19. Demostrar que si dos vértices en un árbol T se unen por medio de un borde nuevo, entonces se forma un ciclo.
20. Demostrar que una gráfica G con n vértices es un árbol si y sólo si G tiene $n - 1$ bordes y ningún ciclo.

22.5 ALGORITMO DE PRIM PARA ÁRBOLES DE EXPANSIÓN MÁS CORTOS

Tabla 22.6
Algoritmo de Prim para el árbol de expansión más corto[9]

ALGORITMO PRIM $[G = (V, E), V = \{1, \cdots, n\}, l_{ij}$ para todo (i, j) en $E]$
Dada una gráfica conexa $G = (V, E)$ con vértices $1, 2, \cdots, n$ y bordes (i, j) de longitudes $l_{ij} > 0$, este algoritmo determina un árbol de expansión más corto T en G y su longitud $L(T)$.

ENTRADA: n, bordes (i, j) de G y sus longitudes l_{ij}

[9] *Bell System Technical Journal* 36 (1957), 1389-1401. Respecto a una versión mejorada del algoritmo, consultar la obra de Cheriton y Tarjan, *SIAM Journal of Computation* 5 (1976), 724-742.

SALIDA: Conjunto de bordes S de un árbol de expansión más corto T en G; $L(T)$ [*Inicialmente, todos los vértices están sin etiquetar*]

1. *Paso inicial*

   Hacer $i(k) = 1$, $U = \{1\}$, $S = \varnothing$.

   Etiquetar el vértice k $(= 2, \cdots, n)$ con $\lambda_k = l_{ik}$ [$= \infty$ si G no tiene borde $(1, k)$].

2. *Adición de un borde al árbol T*

   Sea λ_j el menor λ_k para k no en U. Incluir el vértice j en U y el borde $(i(j), j)$ en S.

   Si $U = V$, entonces calcular

   $L(T) = \sum l_{ij}$ (sumatoria sobre todos los bordes en S)

   SALIDA: S, $L(T)$. Detener el proceso

   [*S es el conjunto de bordes de un árbol de expansión más corto T en G.*]

   En caso contrario, continuar (es decir, proceder al paso 3).

3. *Actualización de etiquetas*

   Para todo k no en U, si $l_{jk} < \lambda_k$, entonces hacer $\lambda_k = l_{jk}$ e $i(k) = j$.

   Proceder al paso 2.

Fin de PRIM

El algoritmo de Prim que se muestra en la tabla 22.6 es otro algoritmo popular para resolver el problema del árbol de expansión más corto (ver la sección 22.4). Este algoritmo proporciona un árbol T en cada etapa, una propiedad que no posee el algoritmo de Kruskal presentado en la última sección (vuelva a ver la figura 466 si no se había dado cuenta de ésto).

En el algoritmo de Prim, empezando desde cualquier simple vértice, que se denominará 1, se hace "crecer" el árbol agregándole bordes, uno cada vez, siguiendo alguna regla (que se proporciona un poco más adelante) hasta que T termina por convertirse en un árbol de *expansión*, que es el más corto.

Por U se denotará el conjunto de vértices del árbol en crecimiento T, y por S, el conjunto de sus bordes. Por tanto, inicialmente $U = \{1\}$ y $S = \varnothing$; al final, $U = V$, el conjunto de vértices de la gráfica dada $G = (V, E)$, cuyos bordes (i, j) tienen longitud $l_{ij} > 0$, como antes.

Así, al inicio (paso 1) las etiquetas $\lambda_2, \cdots, \lambda_n$ de los vértices $2, \cdots, n$ son las longitudes de los bordes que los conectan con el vértice 1 (o ∞ en caso de que en G no haya tal vértice). Y se elige (paso 2) el más corto de éstos como el primer borde del árbol en crecimiento T y se incluye su otro extremo j en U (eligiendo el menor j en caso de que haya varios, a fin de que el proceso sea único). El hecho de actualizar las etiquetas en el paso 3 (en esta etapa y en cualquiera otra etapa ulterior) implica a cada vértice k que todavía no está en U. El vértice k tiene la etiqueta $\lambda_k = l_{i(k),k}$ de antes. Si

$l_{jk} < \lambda_k$, esto significa que k está más próximo al nuevo elemento j recientemente incluido en U que a su "vecino más próximo" anterior $i(k)$ en U. Luego se actualiza la etiqueta de k, reemplazando $\lambda_k = l_{i(k),k}$ por $\lambda_k = l_{jk}$ y haciendo $i(k) = j$. Si, a pesar de lo anterior, $l_{jk} \geqq \lambda_k$ (la etiqueta *anterior* de k), no se toca la etiqueta anterior. Por tanto, la etiqueta λ_k siempre identifica al vecino más próximo de k en U, y éste es actualizado en el paso 3 cuando U y el árbol T crecen. Con base en las etiquetas finales es posible rastrear el árbol final, y a partir de sus valores numéricos se calcula la longitud total (la suma de las longitudes de los bordes) de este árbol.

Ejemplo 1. Aplicación del algoritmo de Prim.

Encontrar el árbol de expansión más corto en la gráfica de la figura 468 (que es el mismo que en el ejemplo 1, sección 22.4, de modo que es posible hacer comparaciones).

Solución. Los pasos son como sigue.

1. $i(k) = 1$, $U = \{1\}$, $S = \varnothing$, respecto a las etiquetas iniciales, consultar la tabla 22.7.
2. $\lambda_2 = l_{12} = 2$ es el más pequeño, $U = \{1, 2\}$, $S = \{(1, 2)\}$
3. Se actualizan las etiquetas como se muestra en la tabla 22.7, columna (I).
2. $\lambda_3 = l_{13} = 4$ es el más pequeño, $U = \{1, 2, 3\}$, $S = \{(1, 2), (1, 3)\}$
3. Se actualizan las etiquetas como se muestra en la tabla 22.7, columna (II).
2. $\lambda_6 = l_{36} = 1$ es el más pequeño, $U = \{1, 2, 3, 6\}$, $S = (\{1, 2), (1, 3), (3, 6)\}$
3. Se actualizan las etiquetas como se muestra en la tabla 22.7, columna (III).
2. $\lambda_4 = l_{34} = 8$ es el más pequeño, $U = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $S = \{(1, 2), (1, 3), (3, 4), (3, 6)\}$
3. Se actualizan las etiquetas como se muestra en la tabla 22.7, columna (IV).
2. $\lambda_5 = l_{45} = 6$ es el más pequeño, $U = V$, $S = (1, 2), (1, 3), (3, 4), (3, 6), (4, 5)$. Detener el proceso.

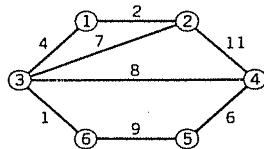


Figura 468. Gráfica del ejemplo 1.

Tabla 22.7

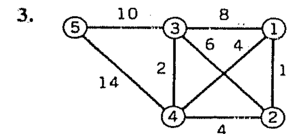
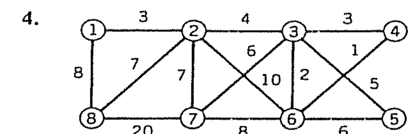
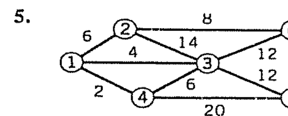
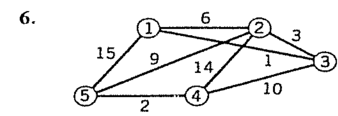
Etiquetado de vértices en el ejemplo 1

Vértice	Etiqueta inicial	Reetiquetado (I)	(II)	(III)	(IV)
2	$l_{12} = 2$	—	—	—	—
3	$l_{13} = 4$	$l_{13} = 4$	—	—	—
4	∞	$l_{24} = 11$	$l_{34} = 8$	$l_{34} = 8$	—
5	∞	∞	∞	$l_{65} = 9$	$l_{45} = 6$
6	∞	∞	$l_{36} = 1$	—	—

El árbol es el mismo que en el ejemplo 1 de la sección 22.4. Su longitud es 21. El lector encontrará interesante comparar el proceso de crecimiento de este árbol con el de la sección 22.4. ∎

Conjunto de Problemas de la sección 22.5

Aplicar el algoritmo de Prim para encontrar un árbol de expansión más corto T en las siguientes gráficas y trazar un diagrama de T.

1. La gráfica en el problema 1, sección 22.4.
2. La gráfica en el problema 2, sección 22.4.
3. 
4. 
5. 
6. 
7. ¿Cómo evita el algoritmo de Prim la formación de ciclos a medida que se hace crecer T?
8. **(Complejidad)** Demostrar que el algoritmo de Prim tiene complejidad $O(n^2)$.
9. ¿En qué caso al final del algoritmo de Prim se tendrá que $S = E$?
10. Para una gráfica completa (o para una que sea casi completa), si los datos están representados en una tabla de distancias de $n \times n$ (como en el problema 12, sección 22.4), demostrar que este algoritmo [que es de $O(n^2)$] no puede reemplazarse fácilmente por un algoritmo de orden menor que $O(n^2)$.
11. ¿Cuál sería el resultado si se aplicase al algoritmo de Prim a una gráfica que no es conexa?
12. **(Distancia, excentricidad)** Denominar a la longitud de una trayectoria más corta $u \to v$ en una gráfica $G = (V, E)$ *distancia* $d(u, v)$ de u a v. Para u fijo, la máxima $d(u, v)$ cuando v varía sobre V se denomina *excentricidad* $\varepsilon(u)$ de u. Encontrar la excentricidad de los vértices 1, 2, 3 de la gráfica en el problema 5.
13. **(Diámetro, radio, centro)** El *diámetro* $d(G)$ de una gráfica $G = (V, E)$ es el máximo de $d(u, v)$ (ver el problema 12) cuando u y v varían sobre V, y el *radio* $r(G)$ es la menor excentricidad $\varepsilon(v)$ de los vértices v. Un vértice v con $\varepsilon(v) = r(G)$ se denomina *vértice central*. El conjunto de todos los vértices centrales se denomina *centro* de G. Encontrar $d(G)$, $r(G)$ y el centro de la gráfica en el problema 5.
14. ¿Cuáles son el diámetro, el radio y el centro del árbol de expansión en el ejemplo 1?
15. Explicar cómo la idea de centro puede usarse para establecer la prestación de un servicio de emergencia en una red de transporte. Para establecer una estación de bomberos, un centro comercial. ¿Cómo generalizaría estos conceptos al caso de dos o más de tales servicios?
16. Demostrar que un árbol T cuyos bordes son todos de longitud 1 tiene un centro que consta de un vértice o de dos vértices adyacentes.
17. Escribir un algoritmo de complejidad $O(n)$ para encontrar el centro de un árbol T.

22.6 REDES. TRAYECTORIAS DE AUMENTO DE FLUJO

Una vez que se han analizado problemas de la trayectoria más corta y problemas de árboles, como tercera gran área en optimización combinatoria se estudiarán los **problemas de flujo en redes** (eléctricas, de distribución de agua, de comunicaciones, de

tráfico, de conexiones de negocios, etc.), pasando de las gráficas a las digráficas (gráficas dirigidas; ver la sección 22.1).

Por definición, una **red** es una digráfica $G = (V, E)$ en la que cada borde (i, j) tiene asignada una **capacidad** $c_{ij} > 0$ [= máximo flujo posible a lo largo de (i,j)], y en un vértice s, denominado **fuente**, se produce un flujo que circula a lo largo de los bordes hacia otro vértice t, denominado **blanco** o **sumidero**, en donde el flujo desaparece.

En aplicaciones, puede tratarse del flujo eléctrico en alambres, de agua en una tubería, de automóviles en carreteras, de personas en un sistema público de transporte, de mercancías de un productor a los consumidores, de cartas de remitentes a destinatarios, etc.

El flujo a lo largo de un borde (i,j) (¡dirigido!) se denota por f_{ij} y se le imponen dos condiciones:

1. Para cada borde (i,j) en G el flujo no excede la capacidad c_{ij},

(1) $$0 \leqq f_{ij} \leqq c_{ij} \qquad (\text{"}\textit{Condición del borde}\text{"})$$

2. Para cada vértice i, no s ni t,

Flujo de entrada = Flujo de salida ("*Condición en un vértice*", "*Ley de Kirchhoff*"):

en una fórmula,

(2) $$\underbrace{\sum_k f_{ki}}_{\substack{\text{Flujo}\\ \text{de entrada}}} - \underbrace{\sum_j f_{ij}}_{\substack{\text{Flujo}\\ \text{de salida}}} = \begin{cases} 0 & \text{si el vértice } i \neq s,\ i \neq t, \\ -f & \text{en la fuente } s, \\ f & \text{en el objetivo (sumidero) } t, \end{cases}$$

en donde f es el flujo total (y en s el flujo de entrada es cero, mientras que en t el flujo de salida es cero). En la figura 469 se ilustra la notación (para algunas cifras hipotéticas).

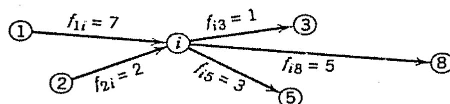


Figura 469. Notación en (2): flujo de entrada y flujo de salida para un vértice i (diferente de s y de t).

Por **trayectoria** $v_1 \to v_k$ de un vértice v_1 a un vértice v_k en una digráfica G se entiende una sucesión de *bordes no dirigidos*

$$(v_1, v_2), \quad (v_2, v_3), \quad \cdots, \quad (v_{k-1}, v_k)$$

que forma una trayectoria como se definió en la sección 22.2. Así, cuando se efectúa un desplazamiento de v_1 a v_k es posible efectuarlo siguiendo algún borde *en su* dirección dada, en cuyo caso éste se denomina **borde hacia adelante**, o en *sentido contrario* a su dirección dada, en cuyo caso se denomina **borde hacia atrás**. En la figura 470 se muestran un borde hacia adelante (u, v) y un borde hacia atrás (w, v) de una trayectoria $v_1 \to v_k$.

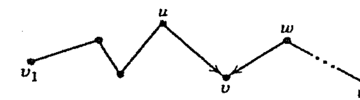


Figura 470. Borde hacia adelante (u, v) y borde hacia atrás (w, v) de una trayectoria $v_1 \to v_k$

¡Precaución! Cada borde en una red tiene una dirección dada *que no es posible cambiar*. En consecuencia, si (u, v) es un borde hacia adelante en una trayectoria $v_1 \to v_k$, entonces (u, v) puede volverse un borde hacia atrás sólo en otra trayectoria $x_1 \to x_j$ en la que es un borde y es recorrido en la dirección opuesta cuando se pasa de x_1 a x_j; ver la figura 471. Este hecho debe tenerse en cuenta a fin de evitar malentendidos.

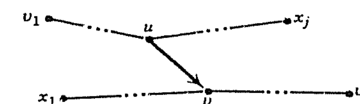


Figura 471. Borde (u, v) como borde hacia adelante en la trayectoria $v_1 \to v_k$ y como borde hacia atrás en la trayectoria $x_1 \to x_j$.

Trayectorias de aumento de flujo

El **objetivo** es **maximizar el flujo** de la fuente s al blanco t de una red dada. Lo anterior se logrará desarrollando métodos para incrementar un flujo existente (incluyendo el caso especial en que este último es cero). Así, la idea es encontrar una trayectoria $P: s \to t$ en la que no todos los bordes se usen por completo, de modo que sea posible enviar flujo adicional a través de P

(i) incrementando el flujo en los bordes hacia adelante, y

(ii) disminuyendo el flujo en los bordes hacia atrás.

Esto sugiere la siguiente

Definición

Una **trayectoria de aumento de flujo** en una red con un flujo dado f_{ij} sobre cada borde (i, j) es una trayectoria $P: s \to t$ tal que

(i) ningún borde hacia adelante se usa a su capacidad; así, $f_{ij} < c_{ij}$ para estos bordes,

(ii) ningún borde hacia atrás tiene flujo cero; así, $f_{ij} > 0$ para estos bordes.

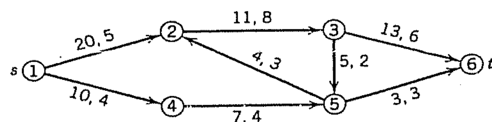


Figura 472. Red del ejemplo 1.
Primer número = Capacidad, segundo número = flujo dado.

Ejemplo 1. Trayectorias de aumento de flujo.

Encontrar trayectorias de aumento de flujo en la red de la figura 472, en donde el primer número es la capacidad y el segundo es un flujo dado.

Solución. En problemas prácticos, las redes son grandes y es necesario ***un método sistemático para aumentar flujos, que se analizará en la siguiente sección***. En esta pequeña red, que debe ayudar a ilustrar y aclarar los conceptos e ideas, es posible encontrar trayectorias de aumento de flujo por inspección y aumentar el flujo existente $f = 9$ en la figura 472. (El flujo de salida de s es $5 + 4 = 9$, que es igual al flujo de entrada $6 + 3 = 9$ hacia t.)

Se usa la notación

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - f_{ij} \quad \text{para bordes hacia delante}$$

$$\Delta_{ij} = f_{ij} \quad \text{para bordes hacia atrás}$$

$$\Delta = \min \Delta_{ij} \quad \text{tomado sobre todos los bordes de una trayectoria.}$$

Con base en la figura 472 se observa que una trayectoria de aumento de flujo P_1: $s \to t$ es P_1: 1-2-3-6 (figura 473), con $\Delta_{12} = 20 - 5 = 15$, etc., y $\Delta = 3$. Por tanto, P_1 puede usarse para aumentar el flujo dado 9 a $f = 9 + 3 = 12$. Todos los tres bordes de P_1 son bordes hacia adelante. El flujo se aumenta por 3. Entonces, el flujo en cada uno de los bordes de P_1 se incrementa por 3, de modo que ahora se tiene $f_{12} = 8$ (en lugar de 5), $f_{23} = 11$ (en lugar de 8) y $f_{36} = 9$ (en lugar de 6). El borde (2, 3) se usa ahora a su capacidad. El flujo en los otros bordes permanece como antes.

A continuación se intentará incrementar el flujo en esta red (figura 472) más allá de $f = 12$.

Existe otra trayectoria de aumento de flujo P_2: $s \to t$, a saber, P_2: 1-4-5-3-6 (ver la figura 473), que muestra cómo entra y es manejado un borde hacia atrás. El borde (3, 5) es un borde hacia atrás. Su flujo

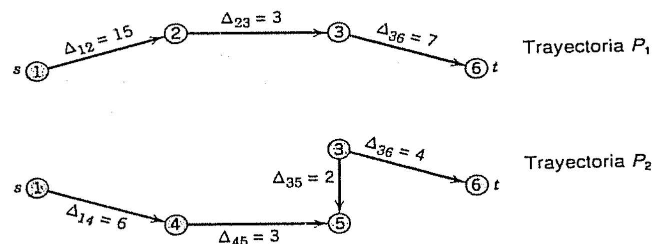


Figura 473. Trayectorias de aumento de flujo en el ejemplo 1.

es 2, de modo que $\Delta_{35} = 2$. Se calcula $\Delta_{14} = 10 - 4 = 6$, etc. (figura 473) y $\Delta = 2$. Por tanto, es posible usar P_2 para otro aumento a fin de obtener $f = 12 + 2 = 14$. El nuevo flujo se muestra en la figura 474. Ya no es posible ningún aumento. Más tarde se confirmará que $f = 14$ es máximo. (El "corte" en la figura 474 se explica a continuación.) ∎

Conjuntos de corte

Un "conjunto de corte" es un conjunto de bordes en una red. La idea subyacente es simple y natural. Si se desea determinar qué está fluyendo de s a t en una red, es posible cortar la red en alguna parte entre s y t (en la figura 474 se muestra un ejemplo) y ver lo que fluye en los bordes afectados por el corte, ya que cualquier flujo de s a t debe pasar algunas veces a través de algunos de tales bordes. Estos bordes forman lo que se denomina **conjunto de corte**. [En la figura 474, el conjunto de corte consta de los bordes (2, 3), (5, 2), (4, 5)]. Este conjunto de corte se denotará por (S, T). Aquí S es el conjunto de vértices sobre el lado del corte en que está s ($S = \{s, 2, 4\}$ para el corte en la figura 474), y T es el conjunto de los otros vértices ($T = \{3, 5, t\}$ en la figura 474). Se dice que un corte "***separa***" al conjunto de vértices V en dos partes S y T. Resulta evidente que el conjunto de corte correspondiente (S, T) consta de todos los bordes en la red con un extremo en S y el otro extremo en T.

Por definición, la **capacidad** cap (S, T) de un conjunto de corte (S, T) es la suma de las capacidades de todos los **bordes hacia adelante** en (S, T) (¡sólo los bordes hacia adelante!), es decir, los bordes que están dirigidos *de S a T*,

(3) $$\text{cap } (S, T) = \Sigma c_{ij} \qquad \text{suma sobre los bordes hacia delante de } (S, T).$$

Así, cap $(S, T) = 11 + 7 = 18$ en la figura 474.

Los otros bordes (dirigidos *de T a S*) se denominan **bordes hacia atrás** del conjunto de corte (S, T), y por **flujo neto** a través de un conjunto de corte se entiende la suma de los flujos en los bordes hacia adelante menos la suma de los flujos en los bordes hacia atrás del conjunto de corte.

¡Precaución! Es necesario distinguir bien entre bordes hacia adelante y bordes hacia atrás en un conjunto de corte y en una trayectoria: (5, 2) en la figura 474 es un borde hacia atrás para el corte mostrado, pero es un borde hacia adelante en la trayectoria 1–4–5–2–3–6.

Para el corte en la figura 474, el flujo neto es $11 + 6 - 3 = 14$. Para el mismo corte en la figura 472 (no indicado aquí), el flujo neto es $8 + 4 - 3 = 9$. En ambos casos es igual al flujo f. Se afirma que este hecho no es fortuito, sino que los cortes cumplen el propósito por el que se introdujeron:

Teorema 1 (Flujo neto en conjuntos de corte)

Cualquier flujo dado en una red G es el flujo neto a través de cualquier conjunto de corte (S, T) de G.

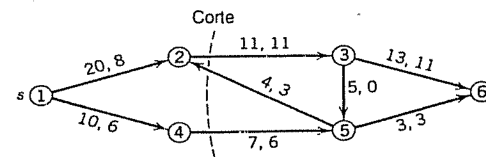


Figura 474. Flujo máximo en el ejemplo 1
(el "corte" se explicará después del ejemplo 1.)

Demostración. Por la ley de Kirchhoff (2), en un vértice i,

$$(4)\qquad \underbrace{\sum_j f_{ij}}_{\text{Flujo hacia fuera}} - \underbrace{\sum_l f_{li}}_{\text{Flujo hacia adentro}} = \begin{cases} 0 & \text{sí } i \neq s,\ t, \\ f & \text{sí } i = s. \end{cases}$$

Aquí es posible sumar sobre j y l desde 1 hasta n (= número de vértices) al hacer $f_{ij} = 0$ para $j = i$ y también para los bordes sin flujo o no existentes; por tanto, las dos sumatorias pueden escribirse como una sola,

$$\sum_j (f_{ij} - f_{ji}) = \begin{cases} 0 & \text{sí } i \neq s,\ t, \\ f & \text{sí } i = s. \end{cases}$$

Luego se suma sobre todas las i en S. Como $s \in S$, esta sumatoria es igual a f:

$$(5)\qquad \sum_{i \in S} \sum_{j \in V} (f_{ij} - f_{ji}) = f.$$

Se afirma que en esta sumatoria sólo contribuyen los bordes pertenecientes al conjunto de corte. En efecto, los bordes con ambos extremos en T no puede contribuir, ya que se suma solamente sobre las i en S; pero los bordes (i, j) con ambos extremos en S contribuyen con $+f_{ij}$ en un extremo y con $-f_{ij}$ en el otro, una contribución total de 0. Por tanto, el miembro izquierdo de (5) es igual al flujo neto que pasa por el conjunto de corte. Por (5), esto es igual al flujo f y así se ha demostrado el teorema. ∎

Este teorema posee la siguiente consecuencia, que será necesaria más adelante.

Teorema 2 (Cota superior para flujos)

Un flujo f en una red G no puede exceder la capacidad de ningún conjunto de corte (S, T) en G.

Demostración. Por el teorema 1, el flujo f es igual al flujo neto a través del conjunto de corte $f = f_1 - f_2$, en donde f_1 es la suma de los flujos a través de los bordes hacia adelante y f_2 ($\geqq 0$) es la suma de los flujos a través de los bordes hacia atrás del conjunto de corte. Así, $f \leqq f_1$. Luego, f_1 no puede exceder la suma de las capacidades de los bordes hacia adelante; pero por definición esta suma es igual a la capacidad del conjunto de corte. Así, juntando lo anterior, se tiene que $f \leqq$ cap (S, T), como se afirmó. ∎

Los conjuntos de corte pondrán de manifiesto ahora toda la importancia de las trayectorias de aumento:

Teorema 3 Teorema principal (Teorema de la trayectoria de aumento para flujos)

Un flujo de s a t en una red G es máximo si y sólo si en G no existe ninguna trayectoria de aumento de flujo $s \to t$.

Demostración. **(a)** Si existe una trayectoria de aumento de flujo P: $s \to t$, entonces puede usarse para agregar flujo adicional a través de ella. Por tanto, el flujo dado no puede ser máximo.

(b) Por otra parte, suponer que en G no existe ninguna trayectoria de aumento de flujo $s \to t$. Sea S_0 el conjunto de todos los vértices i (incluyendo a s) tal que en G existe una trayectoria de aumento de flujo $s \to i$, y sea T_0 el conjunto de los otros vértices en G. Considerar cualquier borde (i, j) con i en S_0 y j en T_0. Entonces se tiene una trayectoria de aumento de flujo $s \to i$, ya que i está en S_0, pero $s \to i \to j$ no es una trayectoria de aumento de flujo porque j no está en S_0. Así, debe tenerse

$$(6)\qquad f_{ij} = \begin{cases} c_{ij} \\ 0 \end{cases} \text{sí } (i, j) \text{ es un} \begin{cases} \text{borde hacia delante} \\ \qquad\qquad \text{de las trayectorias } s \longrightarrow i \longrightarrow j. \\ \text{borde hacia atrás} \end{cases}$$

En caso contrario podría usarse (i, j) para obtener una trayectoria de aumento de flujo $s \to i \to j$. Ahora bien, (S_0, T_0) define un conjunto de corte (ya que t está en T_0; ¿por qué?). Debido a que por (6) los bordes hacia adelante se utilizan a su capacidad y los bordes hacia atrás no conducen flujo, entonces el flujo neto a través del conjunto de corte (S_0, T_0) es igual a la suma de las capacidades de los bordes hacia adelante, que por definición es cap (S_0, T_0). Por el teorema 1, este flujo neto es igual al flujo dado f. Así, $f =$ cap (S_0, T_0). También, por el teorema 2 se tiene que $f \leqq$ cap (S_0, T_0). Por tanto, f debe ser máximo debido a que se ha obtenido una igualdad. ∎

La parte final de esta demostración produce otro resultado básico (atribuido a Ford y Fulkerson, *Canadian Journal of Mathematics* 8 (1956), 399-404), a saber, el

Teorema 4 Teorema del flujo máximo y corte mínimo

El flujo máximo[10] *en cualquier red G es igual a la capacidad de un "**conjunto de corte mínimo**" (= un conjunto de corte de capacidad mínima) en G.*

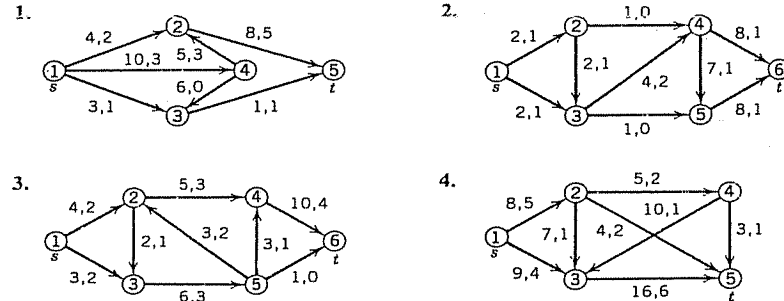
Demostración. Acaba de verse que $f =$ cap (S_0, T_0) para un flujo máximo f y un conjunto de corte (S_0, T_0) idóneo. Luego, por el teorema 2 también se tiene $f \leqq$ cap (S, T) para este f y cualquier conjunto de corte (S, T) en G. Juntando lo anterior, se tiene que cap $(S_0, T_0) \leqq$ cap (S, T). Por tanto, (S_0, T_0) es un conjunto de corte mínimo, y así se ha demostrado el teorema. ∎

Las dos herramientas básicas en relación con redes son las trayectorias de aumento de flujo y los conjuntos de corte. En la siguiente sección se verá cómo las trayectorias de aumento de flujo pueden usarse como la herramienta fundamental en un algoritmo para flujos máximos.

[10] La existencia de un flujo máximo se concluye en el caso de capacidades racionales por el algoritmo que se presentará en la siguiente sección, y en el caso de capacidades arbitrarias, por una modificación de este algoritmo, mencionada en la nota de pie de página 11 de la siguiente sección.

Problemas de la sección 22.6

Encontrar trayectorias de aumento de flujo:



Encontrar por inspección el flujo máximo

5. En el problema 1.
6. En el problema 2.
7. En el problema 3.
8. En el problema 4.

En la figura 472, encontrar T y cap (S, T) si S es igual a

9. $\{1, 2, 3\}$
10. $\{1, 2, 4, 5\}$
11. $\{1, 3, 5\}$
12. Encontrar un conjunto de corte mínimo en la figura 472 y comprobar que su capacidad es igual al flujo máximo $f = 14$.
13. Encontrar ejemplos de trayectorias de aumento de flujo y el flujo máximo en la red de la figura 475.

En la figura 475, encontrar T y cap (S, T) si S es igual a

14. $\{1, 2, 4\}$
15. $\{1, 2, 4, 6\}$
16. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
17. En la figura 475, encontrar un conjunto de corte mínimo y su capacidad.
18. ¿Por qué los bordes hacia atrás no se consideraron en la definición de capacidad de un conjunto de corte?
19. ¿En qué caso un borde (i, j) puede usarse como borde hacia adelante y como borde hacia atrás de una trayectoria en una red con un flujo dado?
20. **(Flujo incremental)** Dibujar la red en la figura 475, y sobre cada borde (i, j) escribir $c_{ij} - f_{ij}$ y f_{ij}. ¿Reconoce el lector que a partir de esta "red incremental" es posible ver más fácilmente las trayectorias de aumento de flujo?

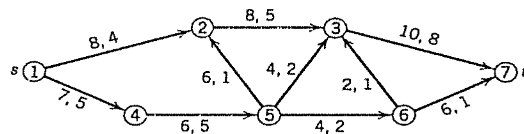


Figura 475. Problemas 13-17.

22.7 ALGORITMO DE FORD-FULKERSON PARA FLUJO MÁXIMO

Las trayectorias de aumento de flujo, según se analizaron en la sección precedente, se usan como herramienta básica en el algoritmo de Ford-Fulkerson de la tabla 22.8, en

donde un flujo dado (por ejemplo, flujo cero en todos los bordes) se incrementa hasta su máximo. El algoritmo logra el incremento por medio de la construcción paso a paso de trayectorias de aumento de flujo, una cada vez, hasta que ya no es posible construir más de tales trayectorias, lo cual sucede precisamente cuando el flujo es máximo.

En el paso 1 puede contarse con un flujo dado. En el paso 3 es posible etiquetar un vértice j si existe un borde (i, j) con i etiquetado y

$$c_{ij} > f_{ij} \qquad \text{("\textit{borde hacia adelante}")}$$

o bien, si existe un borde (j, i) con i etiquetado y

$$f_{ji} > 0 \qquad \text{("\textit{borde hacia atrás}")}$$

Tabla 22.8
Algoritmo de Ford-Fulkerson para flujo máximo

ALGORITMO FORD-FULKERSON
$[G = (V, E)$, vértices $1\ (= s), \cdots, n\ (= t)$, bordes (i, j), $c_{ij}]$
Este algoritmo calcula el flujo máximo en una red G con fuente s, sumidero t y capacidades $c_{ij} > 0$ de los bordes (i, j).

ENTRADA: n, $s = 1$, $t = n$, bordes (i, j) de G, c_{ij}

SALIDA: Flujo máximo f en G

1. Asignar un flujo inicial f_{ij} (por ejemplo, $f_{ij} = 0$ para todos los bordes), calcular f.
2. Etiquetar s con $\varnothing$. Marcar los otros vértices "*no etiquetado*".
3. Encontrar un vértice etiquetado i que aún no haya sido explorado. Explorar i como sigue.

   Para todo vértice adyacente no etiquetado j, si $c_{ij} > f_{ij}$, calcular

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - f_{ij} \quad \text{y} \quad \Delta_j = \begin{cases} \Delta_{1j} & \text{si } i = 1 \\ \min(\Delta_i, \Delta_{ij}) & \text{si } i > 1 \end{cases}$$

   y etiquetar j con una "*etiqueta hacia adelante*" (i^+, Δ_j); o bien, si $f_{ji} > 0$, calcular

$$\Delta_j = \min(\Delta_i, f_{ji})$$

   y etiquetar j con una "etiqueta hacia atrás" (i^-, Δ_j).

Si no existe tal j, entonces dar como SALIDA a f. Detener el proceso.

[*f es el flujo máximo.*]

En caso contrario, continuar (es decir, proceder al paso 4).

4. Repetir el paso 3 hasta llegar a t.

[*Así se obtiene una trayectoria de aumento de flujo P: $s \rightarrow t$.*]

Si es imposible llegar a t, entonces dar como SALIDA a f. Detener el proceso

[*f es el flujo máximo.*]

En caso contrario, continuar (es decir, proceder al paso 5).

5. Recorrer hacia atrás la trayectoria P, usando las etiquetas.
6. Usar P para aumentar el flujo existente por Δ_t. Hacer $f = f + \Delta_t$.
7. Eliminar todas las etiquetas de los vértices $2, \cdots, n$. Proceder al paso 3.

Fin de FORD-FULKERSON

Explorar un vértice etiquetado i significa etiquetar todo vértice no etiquetado j adyacente a i que sea posible etiquetar. Antes de explorar un vértice etiquetado i, se examinan todos los vértices que ya tenían etiqueta antes de i. Esta estrategia de primera búsqueda de amplitud (PBA) fue sugerida por Edmonds y Karp[11] en 1972. Su efecto es que se obtienen las trayectorias de aumento de flujo más cortas posibles. La ventaja computacional de esto se ilustra en el problema 13.

Ejemplo 1. Algoritmo de Ford-Fulkerson

Aplicar el algoritmo de Ford-Fulkerson para determinar el flujo máximo de la red en la figura 476 (que es la misma que la del ejemplo 1, sección 22.6, de modo que es posible comparar).

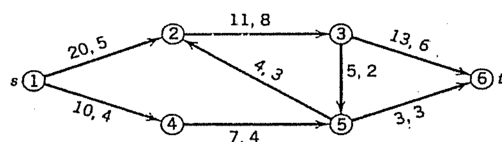


Figura 476. Red en el ejemplo 1 con capacidades (primeros números) y flujo dado.

Solución. El algoritmo procede como sigue.

1. Se proporciona un flujo inicial $f = 9$.
2. El vértice s (= 1) se etiqueta con $\varnothing$. Los vértices 2, 3, 4, 5, 6 se marcan con "no etiquetado".
3. Se explora 1.

[11] *Journal of the Association for Computing Machinery* 19 (1972), 248-64. El algoritmo de Ford-Fulkerson fue publicado por primera vez en el *Canadian Journal of Mathematics* 9 (1957), 210-218.

Se calcula $\Delta_{12} = 20 - 5 = 15 = \Delta_2$. El vértice 2 se etiqueta con $(1^+, 15)$.

Se calcula $\Delta_{14} = 10 - 4 = 6 = \Delta_4$. El vértice 4 se etiqueta con $(1^+, 6)$.

4. Se explora 2.

Se calcula $\Delta_{23} = 11 - 8 = 3$, $\Delta_3 = \text{mín}(\Delta_2, 3)$. El vértice 3 se etiqueta con $(2^+, 3)$.

Se calcula $\Delta_5 = \text{mín}(\Delta_2, 3) = 3$. El vértice 5 se etiqueta con $(2^-, 3)$.

Se explora 3.

Se calcula $\Delta_{36} = 13 - 6 = 7$, $\Delta_6 = \Delta_t = \text{mín}(\Delta_3, 7) = 3$. El vértice 6 se etiqueta con $(3^+, 3)$.

5. P: 1–2–3–6 (= t) es una trayectoria de aumento de flujo.
6. $\Delta_t = 3$. El aumento proporciona $f_{12} = 8$, $f_{23} = 11$, $f_{36} = 9$, con los otros f_{ij} sin cambio. Flujo aumentado $f = 9 + 3 = 12$.
7. Se eliminan las etiquetas en los vértices $2, \cdots, 6$. Proceder al paso 3.
3. Se explora 1.

Se calcula $\Delta_{12} = 20 - 8 = 12 = \Delta_2$. El vértice 2 se etiqueta con $(1^+, 12)$.

Se calcula $\Delta_{14} = 10 - 4 = 6 = \Delta_4$. El vértice 4 se etiqueta con $(1^+, 6)$.

4. Se explora 2.

Se calcula $\Delta_5 = \text{mín}(\Delta_2, 3) = 3$. El vértice 5 se etiqueta con $(2^-, 3)$.

Se explora 4. [*Ya no quedan vértices para etiquetar.*]

Se explora 5.

Se calcula $\Delta_3 = \text{mín}(\Delta_5, 2) = 2$. El vértice 3 se etiqueta con $(5^-, 2)$.

Se explora 3.

Se calcula $\Delta_{36} = 13 - 9 = 4$, $\Delta_6 = \text{mín}(\Delta_3, 4) = 2$. El vértice 6 se etiqueta con $(3^+, 2)$.

5. P: 1–2–5–3–6 (= t) es una trayectoria de aumento de flujo.
6. $\Delta_t = 2$. El aumento proporciona $f_{12} = 10$, $f_{52} = 1$, $f_{35} = 0$, $f_{36} = 11$, con los otros f_{ij} sin cambio. Flujo aumentado $f = 12 + 2 = 14$.
7. Se eliminan las etiquetas de los vértices $2, \cdots, 6$. Proceder al paso 3.

Ahora es posible explorar 1 y luego explorar 2, como antes, pero al explorar 4 y después 5 se encuentra que ya no queda ningún vértice para etiquetar. Por tanto, ya no es posible llegar a t. Así, el flujo obtenido (figura 477) es máximo, en concordancia con el resultado de la sección anterior. ∎

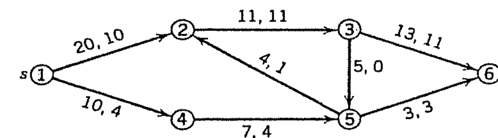


Figura 477. Flujo máximo en el ejemplo 1.

Problemas de la sección 22.7

1. Efectuar los detalles de los cálculos adicionales indicados en el ejemplo 1.
2. Aplicar el algoritmo de Ford-Fulkerson al ejemplo 1 con flujo inicial 0. Hacer un comentario sobre la cantidad de trabajo en comparación con la del ejemplo 1.
3. ¿Cuáles son los bordes "cuello de botella" debido a los cuales el flujo en el ejemplo 1 es limitado realmente? Por tanto, ¿qué capacidades pueden disminuirse sin afectar el flujo máximo?

Aplicar el algoritmo de Ford-Fulkerson para encontrar el flujo máximo:

4. En el problema 2, sección 22.6.
5. En el problema 1, sección 22.6.
6. En el problema 4, sección 22.6.
7. En el problema 3, sección 22.6.
8. ¿Cuál es la razón (sencilla) de que al aumentar un flujo por medio del empleo de una trayectoria de aumento de flujo se preserva la ley de Kirchhoff?
9. ¿Cómo evita el algoritmo de Ford-Fulkerson la formación de ciclos?
10. ¿Cómo puede verse a partir del algoritmo que el algoritmo de Ford-Fulkerson obedece una técnica PBA?
11. ¿Son únicas las trayectorias de aumento de flujo consecutivas producidas por el algoritmo de Ford-Fulkerson?
12. **(Teorema del flujo entero)** Demostrar que si las capacidades en una red G son enteras, entonces existe un flujo máximo que es entero.
13. ¿Cuántos aumentos son necesarios para obtener el flujo máximo en la red de la figura 478 si se empieza desde flujo cero y de manera alternada se usan las trayectorias P_1: s–2–3–t y P_2: s–3–2–t? ¿De qué manera el algoritmo de Ford-Fulkerson evita esta mala elección?

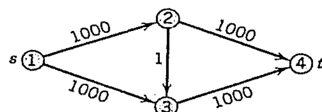


Figura 478. Problema 13.

14. Si el algoritmo de Ford-Fulkerson se detiene sin llegar a t, demostrar que los bordes con un extremo etiquetado y el otro no etiquetado forman un conjunto de corte (S, T) cuya capacidad es igual al flujo máximo.
15. **(Varias fuentes y sumideros)** Si una red tiene varias fuentes $s_1, \cdots, s_k$, demostrar que puede reducirse al caso de una red con una sola fuente al introducir un nuevo vértice s y conectar s con $s_1, \cdots, s_k$ por k bordes de capacidad ∞. De manera semejante si existen varios sumideros. Ilustrar esta idea con una red con dos fuentes y dos sumideros.
16. Encontrar el flujo máximo en la red de la figura 479 con dos fuentes (fábricas) y dos sumideros (consumidores).
17. Encontrar un conjunto de corte mínimo en la figura 476, así como su capacidad.
18. Demostrar que en una red G con todas las $c_{ij} = 1$ el flujo máximo es igual al número de trayectorias de bordes disjuntas $s \to t$.
19. En el problema 17, el conjunto de corte contiene precisamente a todos los bordes hacia adelante usados a su capacidad por el flujo máximo (figura 477). ¿Es fortuito este hecho?
20. Demostrar que en una red G con todas las capacidades iguales a 1, la capacidad de un conjunto de corte mínimo (S, T) es igual al número mínimo q de bordes cuya eliminación destruye todas las trayectorias dirigidas $s \to t$. (Una **trayectoria dirigida** $v \to w$ es una trayectoria en la que cada borde tiene la dirección en que es recorrido yendo de v a w.)

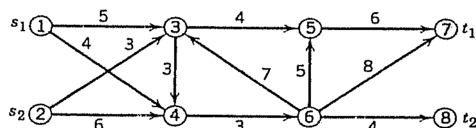


Figura 479. Problema 16.

22.8 PROBLEMAS DE ASIGNACIÓN. APAREAMIENTO BIPARTITA

De las digráficas se regresará a las gráficas y se analizará otra clase importante de problemas de optimización combinatoria que se presentan en **problemas de asignación** de obreros a trabajos, de trabajos a máquinas, de mercancía a almacenes, de barcos a muelles, de grupos de alumnos a salones de clase, de exámenes a periodos de aplicación, etc. A fin de explicar el problema, se requieren los siguientes conceptos.

Una **gráfica bipartita** $G = (V, E)$ es una gráfica en la que el conjunto de vértices V es separado en dos conjuntos S y T (sin elementos en común, por la definición de partición), tal que cada borde de G tiene un extremo en S y el otro extremo en T, de modo que en G no hay bordes que tengan ambos extremos en S o ambos extremos en T. Una gráfica $G = (V, E)$ así también se denota por $G = (S, T; E)$.

En la figura 480 se muestra una ilustración, en donde V consta de siete elementos: tres obreros a, b, c, que integran el conjunto S, y cuatro trabajos 1, 2, 3, 4, que integran el conjunto T. Los bordes indican que el obrero a puede realizar los trabajos 1 y 2; el obrero b, los trabajos 1, 2 y 3; etc., y el problema es asignar un trabajo a cada obrero de modo que cada obrero tenga un trabajo a realizar. Esto sugiere el siguiente concepto:

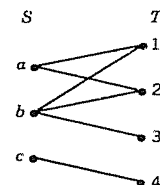


Figura 480. Gráfica bipartita en la asignación de un conjunto $S = \{a, b, c\}$ de obreros a un conjunto $T = \{1, 2, 3, 4\}$ de trabajos.

Un **apareamiento** en $G = (S, T; E)$ es un conjunto M de bordes de G tal que ningún par de éstos tiene un vértice en común. Si M consta del mayor número posible de bordes, entonces se denomina **apareamiento de cardinalidad máxima**[12] en G.

Por ejemplo, un apareamiento en la figura 480 es $M_1 = \{(a, 2), (b, 1)\}$. Otro es $M_2 = \{(a, 1), (b, 3), (c, 4)\}$; resulta evidente que éste es de cardinalidad máxima.

Un vértice v está **expuesto** (o *no* está *cubierto*) por un apareamiento M si v no es un punto extremo de un borde de M. Este concepto, que siempre se refiere a algún apareamiento, será de interés cuando se empiecen a aumentar apareamientos dados (a continuación). Si un apareamiento no deja ningún vértice expuesto, entonces se

[12] O simplemente **apareamiento máximo**, aunque esta expresión algunas veces se usa en un contexto diferente, que carece de importancia aquí.

denomina **apareamiento completo**. Resulta evidente que un apareamiento completo puede existir sólo si S y T tienen el mismo número de vértices.

Ahora se desea demostrar cómo es posible incrementar paso a paso la cardinalidad de un apareamiento M hasta que se vuelve máximo. Para esta idea es fundamental el concepto de trayectoria de aumento:

Una **trayectoria alternante** es una trayectoria que consta de manera alternada de bordes en M y no en M (figura 481A). Una **trayectoria de aumento** es una trayectoria alternante cuyos dos puntos extremos (a y b en la figura 481B) están expuestos. Al eliminar del apareamiento M los bordes que están sobre una trayectoria de aumento P (dos bordes en la figura 481B) y al agregar a M los otros bordes de P (tres en la figura), se obtiene un nuevo apareamiento, con un borde más que M. Esta es la manera en que una trayectoria de aumento se usa para aumentar por un borde un apareamiento dado. Se afirma que lo anterior siempre conducirá, después de algunos pasos, a un apareamiento de cardinalidad máxima; en efecto, el papel básico de una trayectoria de aumento se expresa en el siguiente teorema.

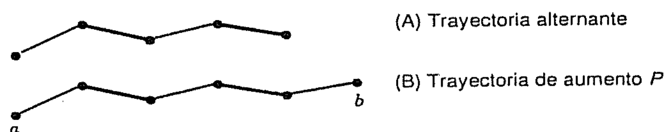


Figura 481. Trayectorias alternante y de aumento. Los bordes con trazo grueso son los que pertenecen a un apareamiento M.

Teorema 1 Teorema de la trayectoria de aumento para un apareamiento bipartita

Un apareamiento M en una gráfica bipartita $G = (S, T; E)$ es de cardinalidad máxima si y sólo si no existe ninguna trayectoria de aumento P con respecto a M.

Demostración. **(a)** Se demostrará que si existe tal trayectoria P, entonces M no es de cardinalidad máxima. Sea P que tiene q bordes pertenecientes a M. Entonces P tiene $q + 1$ bordes que no pertenecen a M. (En la figura 481B se tiene $q = 2$.) Los puntos extremos a y b de P están expuestos, y todos los otros vértices sobre P son puntos extremos de bordes en M, por definición de trayectoria alternante. Por tanto, si un borde de M no es un borde de P, entonces no puede tener un punto extremo sobre P, porque entonces M no sería un apareamiento. Por consiguiente, los bordes de M que no están en P, junto con los $q + 1$ bordes de P que no pertenecen a M, constituyen un apareamiento de cardinalidad superior por uno a la cardinalidad de M porque se omitieron q bordes de M y a la vez se agregaron $q + 1$. Por tanto, M no puede ser de cardinalidad máxima.

(b) Se demostrará que si no existe ninguna trayectoria de aumento para M, entonces M es de cardinalidad máxima. Sea M^* un apareamiento de cardinalidad máxima y se considera la gráfica H que consta de todos los bordes que pertenecen a M o a M^*, pero no a ambos. Entonces es posible que dos bordes de H tengan un vértice en común, pero tres bordes no pueden tener un vértice en común porque entonces dos de los tres pertenecerían a M (o a M^*), lo cual violaría el hecho de que M y M^* son apareamientos. Así, todo v en V puede ser común a dos bordes de H, a uno o a ninguno. Por tanto, es posible caracterizar cada "componente" (= subconjunto *conexo* maximal) de H; una componente puede ser:

(A) Una trayectoria cerrada con un número *par* de bordes (en el caso de un número *impar*, dos bordes desde M o desde M^* se encontrarían, violando la propiedad del apareamiento). Ver (A) en la figura 482.

(B) Una trayectoria abierta P con el mismo número de bordes desde M y de bordes desde M^*, por lo siguiente. P debe ser alternante, es decir, un borde de M es seguido por un borde de M^*, etc. (ya que M y M^* son apareamientos). Luego, si P tiene un borde más desde M^*, entonces P sería de aumento para M [ver (B2) en la figura 482], lo cual contradice la hipótesis de que no existe ninguna trayectoria de aumento para M. Si P tiene un borde más desde M, entonces sería de aumento para M^* [ver (B3) en la figura 482], lo cual viola la cardinalidad máxima de M^*, por el inciso (a) de esta demostración. Así, en cada componente de H, los dos apareamientos tienen el mismo número de bordes. Al agregar a ésto el número de bordes que pertenecen tanto a M como a M^* (que se dejan de lado cuando se establece H), se concluye que M y M^* deben tener el mismo número de bordes. En virtud de que M^* es de cardinalidad máxima, ésto prueba que lo mismo se cumple para M, como quería demostrarse. ∎

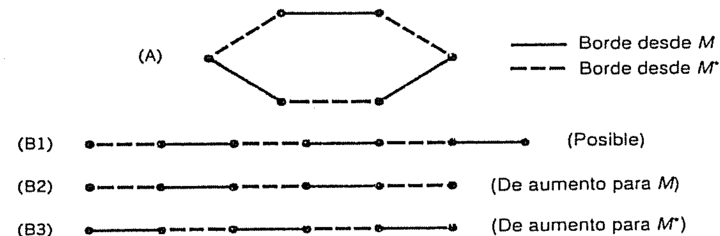


Figura 482. Demostración del teorema de la trayectoria de aumento para el apareamiento bipartita.

Este teorema sugiere un algoritmo para obtener trayectorias de aumento en las que los vértices están etiquetados con la intención de seguir trayectorias. Tal etiqueta existe *además* del número del vértice, que también se retiene. Resulta evidente que, para obtener una trayectoria de aumento, es necesario empezar desde un vértice *expuesto*, y luego seguir una trayectoria alternante hasta llegar a otro vértice *expuesto*. En la tabla 22.9 se muestra tal algoritmo. Después del paso 3 ya están etiquetados todos los vértices en S. En el paso 4, el conjunto T contiene por lo menos un vértice expuesto, ya que en caso contrario el proceso se hubiese detenido en el paso 1.

Tabla 22.9
Apareamiento bipartita de cardinalidad máxima

ALGORITMO APAREAMIENTO [$G = (S, T; E), M, n$]

Este algoritmo determina un apareamiento de cardinalidad máxima M en una gráfica bipartita G al aumentar un apareamiento dado en G.

ENTRADA: Gráfica bipartita $G = (S, T; E)$ con vértices $1, \cdots, n$, apareamiento M en G (por ejemplo, $M = \varnothing$)

SALIDA: Apareamiento de cardinalidad máxima M en G

1. Si en S no hay ningún vértice expuesto, entonces

   SALIDA: M. Detener el proceso

   [*M es de cardinalidad máxima en G.*]

   En caso contrario, etiquetar a todos los vértices *expuestos en* S con $\varnothing$.

2. Para cada i en S y borde (i, j) no en M, etiquetar a j con i, a menos de que ya esté etiquetado.

3. Para cada j *no expuesto* en T, etiquetar a i con j, en donde i es el otro extremo del único borde (i, j) en M.

4. Recorrer hacia atrás las trayectorias alternantes P que terminan en un vértice expuesto en T, usando las etiquetas sobre los vértices.

5. Si en el paso 4 ninguna P es de aumento, entonces

   Dar como SALIDA a M. [*M es de cardinalidad máxima en G.*]

   En caso contrario, aumentar M usando una trayectoria de aumento P. Eliminar todas las etiquetas. Proceder al paso 1.

Fin de APAREAMIENTO

Ejemplo 1. Apareamiento de cardinalidad máxima.

¿Es de cardinalidad máxima el apareamiento M_1 de la figura 483a? En caso negativo, aumentarlo hasta obtener cardinalidad máxima.

Solución. Se aplica el algoritmo.

1. Etiquetar 1 y 4 con $\varnothing$.
2. Etiquetar 7 con 1. Etiquetar 5, 6, 8 con 3.
3. Etiquetar 2 con 6 y 3 con 7.

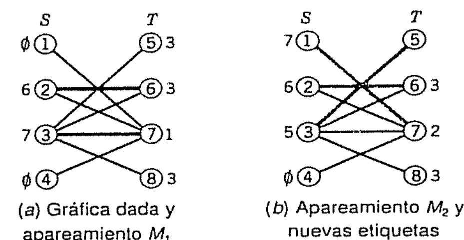
[*Ahora todos los vértices están etiquetados, como se muestra en la figura 483a.*]

4. P_1: 1–7–3–5. [*Por rastreo. P_1 es de aumento.*]
P_2: 1–7–3–8. [*P_2 es de aumento.*]
5. Aumentar M_1 usando P_1, eliminando (3, 7) de M_1 e incluyendo (1, 7) y (3, 5). Quitar todas las etiquetas. Proceder al paso 1.

[*En la figura* 483b *se muestra el apareamiento resultante* $M_2 = \{(1, 7), (2, 6), (3, 5)\}$.]

1. Etiquetar 4 con $\varnothing$.
2. Etiquetar 7 con 2. Etiquetar 6 y 8 con 3.
3. Etiquetar 1 con 7, 2 con 6 y 3 con 5.
4. P_3: 5–3–8. [*P_3 es alternante pero no de aumento.*]
5. Detener el proceso. M_2 es de cardinalidad máxima (a saber, 3). ∎

Aquí terminan el capítulo 22 y la parte F sobre optimización, un área nueva llena de problemas sin resolver que tiene varias aplicaciones (¡muchas de las cuales ni siquiera han sido exploradas!), y que está adquiriendo rápidamente un interés creciente para el ingeniero y el experto en computación, así como en los campos de la administración, de la micro y macro economía y otros.

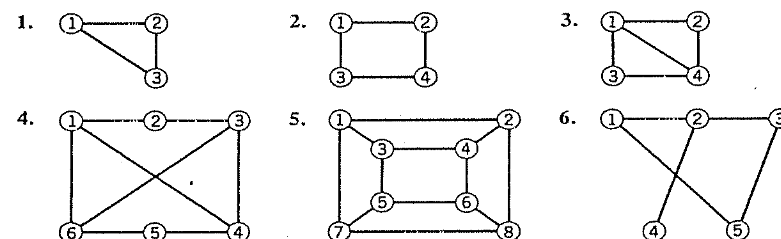


(*a*) Gráfica dada y apareamiento M_1 (*b*) Apareamiento M_2 y nuevas etiquetas

Figura 483. Ejemplo 1.

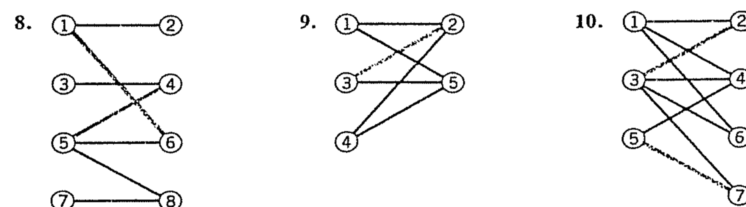
Problemas de la sección 22.8

¿Son bipartitas las siguientes gráficas? En caso afirmativo, encontrar S y T.



7. ¿Puede el lector obtener la respuesta del problema 3 a partir de la respuesta del problema 1?

Encontrar una trayectoria de aumento en las siguientes gráficas.



Aumentar el apareamiento dado para encontrar un apareamiento de cardinalidad máxima de la gráfica:

11. En el problema 9. **12.** En el problema 8. **13.** En el problema 10.

14. (Horarios y apareamiento) Tres maestros x_1, x_2, x_3 dan clases a cuatro grupos y_1, y_2, y_3, y_4 durante los siguientes periodos:

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1	0	1	1
x_2	1	1	1	1
x_3	0	1	1	1

Demostrar que este arreglo puede representarse por medio de una gráfica bipartita G y que un horario de enseñanza para un periodo corresponde a un apareamiento en G. Establecer un horario de enseñanza con el menor número posible de periodos.

15. (Coloreado de vértices y calendario de exámenes) ¿Cuál es el menor número de periodos de exámenes para seis materias a, b, c, d, e, f si algunos estudiantes presentan a, b, f, algunos presentan c, d, e, algunos presentan a, c, e y algunos presentan c, e? Resolver este problema como sigue. Trazar una gráfica con seis vértices $a, \cdots, f$ y unir los vértices si representan materias presentadas simultáneamente por algunos estudiantes. Colorear los vértices de modo que vértices adyacentes tengan colores diferentes. (Use los números 1, 2, $\cdots$, en lugar de colores reales si así se desea.) ¿Cuál es el número mínimo de colores necesarios? Para cualquier gráfica G, este número mínimo se denomina **número cromático** (del vértice) $\chi_v(G)$. ¿Por qué es esta la respuesta al problema? Escribir un posible calendario de aplicación de exámenes.

16. ¿Cuántos colores son necesarios para el coloreado de vértices en el problema 5?

17. Demostrar que todos los árboles pueden colorearse de vértices con dos colores.

18. En algún cálculo se requiere el almacenamiento temporal de variables $v_1, \cdots, v_6$ usadas con frecuencia, respectivamente, durante intervalos de tiempo (0, 3), (2, 4), (3, 6), (1, 4), (5, 7), (3, 6) que se superponen. ¿Cuántos registros de índice (lugares de almacenamiento) se necesitan? *Sugerencia.* Unir v_i y v_j mediante un borde en caso de que sus intervalos se superpongan. Luego colorear los vértices.

19. ¿Cuál sería la respuesta del problema 18 si no sólo hubiera superposición, sino que también se excluyeran los puntos extremos comunes?

20. (Gráficas bipartitas completas) Una gráfica bipartita $G = (S, T; E)$ se denomina *completa* si todo vértice en S está unido con todo vértice en T por un borde, y se denota por K_{n_1, n_2}, en donde n_1 y n_2 son los números de vértices en S y T, respectivamente. ¿Cuántos bordes tiene esta gráfica?

21. (Gráfica plana) Una *gráfica plana* es una gráfica que puede trazarse sobre una hoja de papel de modo que no se cruce ningún par de bordes. Demostrar que la gráfica completa K_4 con cuatro vértices es plana. La gráfica completa K_5 con cinco vértices no es plana. Hacer plausible lo anterior intentando dibujar K_5 de modo que no se crucen ningunos bordes. Interprete el resultado en términos de una red de carreteras entre cinco ciudades.

22. (La gráfica bipartita $K_{3,3}$ no es plana) Tres fábricas 1, 2, 3 cuentan con abastecimiento subterráneo de agua, gas y electricidad, desde los puntos A, B, C, respectivamente. Demostrar que ésto puede representarse por $K_{3,3}$ (la gráfica bipartita completa $G = (S, T; E)$ con S y T que constan de tres vértices cada uno) y que ocho de las nueve líneas de abastecimiento (bordes) pueden trazarse sin que se crucen entre sí. Hacer plausible que $K_{3,3}$ no es plana intentando dibujar la novena línea sin cruzar a las demás.

23. (Teorema de los cuatro colores (vértices)) El famoso *teorema de los cuatro colores* establece que es posible colorear los vértices de cualquier gráfica *plana* (de modo que vértices adyacentes tengan colores distintos) con cuando mucho cuatro colores. Durante mucho tiempo se conjeturó este teorema y finalmente fue demostrado en 1976 por Appel y Haken [*Bulletin of de American Mathematical Society* 82 (1976), 711-712]. ¿Puede colorear la gráfica completa K_5 con cuatro colores? ¿El resultado contradice el teorema de los cuatro colores? (Respecto a más detalles, consultar el capítulo 12 de la obra citada en el apéndice 1 como referencia [F13].)

24. (Coloreado de bordes) El *número cromático del borde* $\chi_e(G)$ de una gráfica G es el número mínimo de colores necesarios para colorear los bordes de G de modo que bordes incidentes tengan colores diferentes. Resulta evidente que $\chi_e(G) \geqq$ máx $d(u)$, en donde $d(u)$ es el grado del vértice u. Si $G = (S, T; E)$ es bipartita, entonces se cumple la igualdad. Demostrar esto para $K_{n,n}$.

25. El **teorema de Vizing** establece que para cualquier gráfica G (¡sin bordes múltiples!), máx $d(u) \leqq \chi_e(G) \leqq$ máx $d(u) + 1$. Proporcionar un ejemplo de una gráfica para la cual $\chi_e(G)$ no exceda a máx $d(u)$.

26. (Cubierta de vértices de bordes) Una *cubierta de vértices* K_v *de un conjunto* L *de bordes* en una gráfica G es un conjunto de vértices de G tal que por lo menos un punto extremo de cada borde de L está en K_v. ¿Cuántos oficiales de policía (por lo menos) se requieren para cubrir todas las cuadras (bordes) en la gráfica de la figura 484? ¿En dónde deben colocarse?

27. ¿Cuántos policías (por lo menos) se requieren para mantener bajo vigilancia cada esquina en la figura 484 (es decir, que cada policía esté alejado cuando mucho una cuadra de cualesquiera otra esquina)? ¿En dónde deben colocarse?

28. (Cubierta de bordes de vértices) Una *cubierta de bordes* K_e de un conjunto M de vértices en una gráfica G es un conjunto de bordes tal que cada vértice en M es un punto extremo de por lo menos un borde en K. Encontrar una cubierta de bordes mínima de la gráfica en la figura 484 (que conste del menor número posible de bordes).

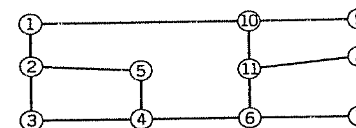


Figura 484. Problemas 26-28.

29. (Teorema de König) Un famoso teorema de D. König establece que en una gráfica bipartita G, el número de bordes en un apareamiento de cardinalidad máxima es igual al número de vértices en una cubierta de vértices mínima de G. Ilustrar este hecho con un ejemplo. Demostrar que lo anterior no se cumple para una gráfica no bipartita (con "*apareamiento*" definido como en el caso bipartita).

30. La **fórmula del poliedro de Euler** es $n - m + f = 2$, en donde n, m, f son el número de vértices, bordes y caras, respectivamente, de un poliedro. Comprobar esta fórmula para el

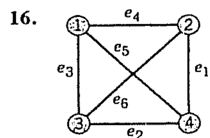
cubo. Lo anterior se cumple para una gráfica plana conexa (trazada de modo que ninguno de sus bordes se crucen entre sí), en donde "cara" significa ahora una región plana acotada por bordes y tal que dos puntos cualesquiera en la región pueden unirse por una curva continua que no toca bordes o vértices; aquí debe tomarse en cuenta la región exterior que se extiende hasta el infinito. Comprobar lo anterior para la figura 452a en la sección 22.1.

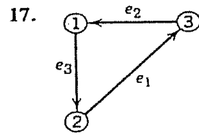
Aplicar la fórmula de Euler para demostrar que la gráfica completa K_5 con cinco vértices no es plana. *Sugerencia.* Usar el hecho de que cada región está acotada por lo menos por tres bordes, pero cada borde es parte de la frontera de cuando mucho dos caras.

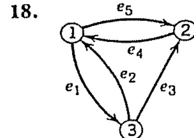
Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 22

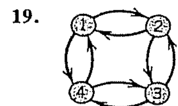
1. ¿Qué es una gráfica? ¿Una digráfica? ¿Un árbol?
2. ¿Qué matrices y listas se usaron para representar gráficas?
3. ¿Qué es una trayectoria? ¿Qué se entiende por problema de la trayectoria más corta?
4. ¿Qué significa PBA? ¿Y PBP? ¿En qué contexto se presentaron estos conceptos en este capítulo?
5. ¿Cuál el "problema del agente de ventas"?
6. ¿Cuál es la idea intuitiva del principio de optimalidad de Bellman, y cómo se aplicó este principio en el algoritmo de Dijkstra?
7. Mencionar algunas aplicaciones en las que se usen árboles de expansión.
8. ¿Cuál es la idea básica del algoritmo codicioso de Kruskal?
9. ¿Qué es una red? ¿Qué tipos de problemas de optimización están relacionadas con ésta?
10. Existe un famoso teorema sobre conjuntos de corte. ¿Puede recordarlo el lector ?
11. ¿Qué es una trayectoria de aumento de flujo y por qué es importante este concepto?
12. ¿Puede un borde hacia adelante en una trayectoria ser un borde hacia atrás en otra trayectoria? ¿Y en un conjunto de corte? Explicar su respuesta.
13. ¿Qué es una gráfica bipartita? Proporcionar algunas aplicaciones típicas que motivan este concepto.
14. ¿Qué tipos de problemas de optimización se consideraron en relación con las gráficas bipartitas?
15. ¿Qué es una trayectoria de aumento en un apareamiento bipartita? ¿Cómo se usa en la obtención de un apareamiento de cardinalidad máxima?

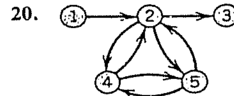
Encontrar las matrices de adyacencia de las siguientes gráficas y digráficas.

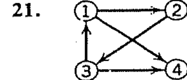
16. 

17. 

18. 

19. 

20. 

21. 

Trazar la gráfica cuya matriz de adyacencia es

22. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **23.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **24.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

25. ¿En qué condición la matriz de adyacencia de una digráfica es simétrica?

Escribir una lista de incidencia de vértices de la gráfica o de la digráfica:

26. En el problema 16.
27. En el problema 17.
28. En el problema 18.

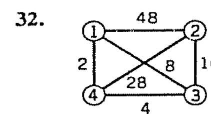
Aplicar el algoritmo PBA de Moore para encontrar una trayectoria más corta y su longitud, suponiendo que cada uno de los bordes es de longitud 1:

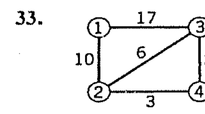
29. 

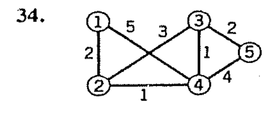
30. 

31. 

Encontrar trayectorias más cortas aplicando el algoritmo de Dijkstra:

32. 

33. 

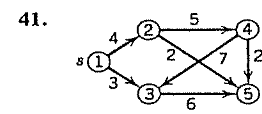
34. 

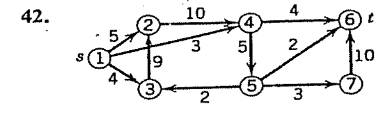
Encontrar un árbol de expansión más corto para la gráfica:

35. En el problema 32.
36. En el problema 33.
37. En el problema 34.

38. Demostrar que una gráfica conexa G con n vértices y $n - 1$ bordes es un árbol.
39. El **teorema de Cayley** establece que el número de árboles de expansión en una gráfica completa con n vértices es n^{n-2}. Comprobar ésto para $n = 2, 3, 4$.
40. Demostrar que $O(m^3) - O(m^2) = O(m^3)$.

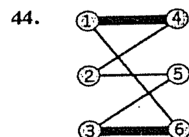
Encontrar el flujo máximo en las siguientes redes, en donde los números dados son capacidades.

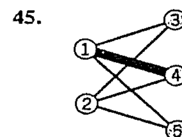
41. 

42. 

43. La compañía A tiene oficinas en Chicago, Los Ángeles y Nueva York; la compañía B, en Boston y Nueva York; y la compañía C, en Chicago, Dallas y Los Ángeles. Representar lo anterior por medio de una gráfica bipartita.

Aumentar el apareamiento dado para encontrar un apareamiento de cardinalidad máxima:

44. 

45. 

Resumen del capítulo 22

Gráficas y optimización combinatoria

La optimización combinatoria estudia problemas de optimización de estructura discreta o combinatoria. Hace uso de gráficas y digráficas (sección 22.1) como herramientas básicas.

Una **gráfica** $G = (V, E)$ consta de un conjunto V de **vértices** $v_1, v_2, \cdots$ (a menudo se denota simplemente por $1, 2, \cdots, n$) y un conjunto E de **bordes** $e_1, e_2, \cdots$, cada uno de los cuales conecta dos vértices. También se escribe (i, j) para denotar un borde cuyos puntos extremos son i y j. Una **digráfica** (= gráfica dirigida) es una gráfica en la que cada borde tiene una dirección (indicada por una flecha). Para manejar gráficas y digráficas en computadora, es posible usar *matrices* o *listas* (sección 22.1).

En este capítulo se estudiaron clases importantes de problemas de optimización para gráficas que se presentan todas en aplicaciones prácticas, así como algoritmos correspondientes, como sigue.

En un **problema de la trayectoria más corta** (sección 22.2) se determina una trayectoria de longitud mínima (que consta de bordes) de un vértice s a un vértice t en una gráfica cuyos bordes (i, j) tienen una "longitud" $l_{ij} > 0$, que puede ser una longitud real, un tiempo de viaje, un costo o una resistencia eléctrica [si (i, j) es un alambre de una red], etc. El **algoritmo de Dijkstra** (sección 22.3) o, cuando todas las $l_{ij} = 1$, el **algoritmo de Moore** (sección 22.2) son idóneos para resolver tales problemas.

Un **árbol** es una gráfica conexa que no tiene **ciclos** (trayectorias cerradas). Los árboles son muy importantes en la práctica. Un *árbol de expansión* en una gráfica G es un árbol que contiene a *todos* los vértices de G. Si los bordes de G tienen longitudes, entonces es posible determinar un **árbol de expansión más corto**, para el cual la suma de las longitudes de todos sus bordes es mínima. Algoritmos correspondientes son el de **Kruskal** (sección 22.4) y el de **Prim** (sección 22.5).

Una **red** (sección 22.6) es una digráfica en la que cada borde (i, j) tiene una *capacidad* $c_{ij} > 0$ [= máximo flujo posible a lo largo de (i, j)] y en un vértice, la *fuente* s, se produce un flujo que circula a lo largo de los bordes hacia un vértice t, el *sumidero* o *blanco*, en donde desaparece el flujo. El problema es maximizar el flujo, por ejemplo, aplicando el **algoritmo de Ford-Fulkerson** (sección 22.7), en el que se usan las **trayectorias de aumento de flujo** (sección 22.6). Otro concepto relacionado es el de **conjunto de corte**, como se definió en la sección 22.6.

Una **gráfica bipartita** $G = (V, E)$ (sección 22.8) es una gráfica cuyo conjunto de vértices V consta de dos partes S y T tales que todo borde de G tiene un extremo en S y otro en T, de modo que no existen bordes que conecten vértices en S o vértices en T. Un **apareamiento** en G es un conjunto de bordes, de los cuales ningún par tiene un punto extremo en común. Entonces, el problema es determinar un **apareamiento de cardinalidad máxima** en G, es decir, un apareamiento M tal que tenga un número máximo de bordes. Respecto a un algoritmo, consultar la sección 22.8.

Parte

G

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Capítulo 23 Teoría de probabilidad

Capítulo 24 Estadística matemática

Esta última parte del libro está dedicada a la **estadística matemática** y su fundamento, que es la **teoría de probabilidad**. Ambas áreas revisten importancia en varias tareas que se presentan en la práctica, como prueba de materiales, pruebas de funcionamiento de sistemas, robótica y automatización en general, control de procesos de producción, optimización basada en métodos estadísticos, control de calidad, problemas de mercadeo, etc. En décadas recientes, la probabilidad y la estadística han ampliado su alcance de aplicaciones ingenieriles y también han accedido a la ciencia de la computación, por ejemplo, en visión por computadora, análisis de funcionamiento de algoritmos y flujo de datos en redes de cómputo. A lo anterior es posible agregar una gran lista de aplicaciones en agricultura, biología, demografía, economía, geografía, administración de los recursos naturales, medicina, meteorología, política, psicología, sociología, control y planificación de tráfico, etc.

Es una suerte que la estadística sea ***uniforme*** en el sentido de que muchos de sus métodos básicos pueden usarse en varias áreas de aplicación diferentes. Esto sugiere el siguiente plan general.

En el capítulo 23 sobre probabilidad se proporcionan las bases de la estadística al considerar el concepto de probabilidad y aplicarlo al desarrollo de modelos matemáticos de procesos regidos o afectados por "efectos aleatorios"; es decir, efectos que no es posible controlar o predecir con certeza. A fin de motivar una comprensión satisfactoria necesaria para trabajar con éxito en estadística, se hará hincapié en los conceptos, así como en aplicaciones típicas.

En el capítulo 24 se aplican las leyes y los modelos probabilísticos del capítulo 23 para desarrollar métodos de inferencia estadística, es decir, conclusiones a partir de *muestras* hacia los entes correspondientes, denominados *poblaciones*. Aquí la atención se centrará en los principios y métodos estándares más importantes de estimación y prueba, que son universalmente aplicables en cualquiera de los diversos campos recientemente mencionados.

Capítulo

23

Teoría de probabilidad

El concepto de probabilidad (sección 23.2) tiene su origen en relación con los juegos de azar, como el lanzamiento de monedas o dados, o con juegos de naipes. Actualmente produce modelos matemáticos de procesos aleatorios (denominados en forma abreviada "experimentos"; sección 23.1). En cualquier experimento así se observa una "variable aleatoria" X (una función cuyos valores en el experimento ocurren "al azar"; sección 23.4), caracterizada por una distribución de probabilidad (secciones 23.5-23.7). O bien, se observa más de una variable aleatoria, por ejemplo, el peso y la estatura de las personas, la dureza y la resistencia a la tensión del acero; ésto se analiza en la sección 23.8, en la que también se proporcionarán las bases de la justificación matemática de los métodos estadísticos del capítulo 24.

Prerrequisito para este capítulo: Cálculo.
Bibliografía: Apéndice 1 parte G.
Respuestas a los problemas: Apéndice 2.

23.1 EXPERIMENTOS, RESULTADOS, EVENTOS

En probabilidad y estadística se tiene interés en **datos** que resultan de experimentos controlados en el laboratorio o de la observación de la naturaleza. En cualquier caso se usa el término "experimento":

Un **experimento** es un proceso por medio del cual se obtiene una medición o una observación. Una simple ejecución de un experimento se denomina simplemente **ensayo**. Algunos *ejemplos* de experimentos son

(1) Inspeccionar un foco a fin de ver si está o no defectuoso.
(2) Lanzar un dado y observar el resultado.
(3) Efectuar una medición de la precipitación pluvial diaria.
(4) Medir la resistencia a la tensión de algún cable de acero.
(5) Elegir aleatoriamente a una persona y preguntarle si le gusta algún modelo nuevo de automóvil.

Así, el término "experimento" se usa en sentido muy amplio. Se tiene interés en experimentos que implican **aleatoriedad**, efectos del azar, de modo que no es posible predecir exactamente lo que se obtendrá. Esto se denomina **resultado o punto muestra**, y el conjunto de todos los resultados posibles se denomina **espacio muestral** S del experimento.

En los ejemplos proporcionados se tiene que

(1) $S = \{D, N\}$, D = defectuoso, N = no defectuoso.
(2) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
(3) S son los números no negativos en algún intervalo $0 \leq x \leq K$.
(4) S son los números en algún intervalo $a \leq x \leq b$.
(5) $S = \{G, N, I\}$, G = Le gusta, N = No le gusta, I = Está indeciso(a).

Los subconjuntos de S se denominan **eventos** y los resultados, que evidentemente son subconjuntos especiales, eventos simples. En (2), los eventos son $A = \{1, 3, 5\}$ ("*número impar*"), $B = \{2, 4, 6\}$ ("*número par*"), $C = \{5, 6\}$, los seis **eventos simples** $\{1\}, \{2\}, \cdots, \{6\}$, etc. En problemas prácticos interesan más los eventos que los resultados.

Ejemplo 6. Eventos.

Se tienen cuatro empaques numerados del 1 al 4, de los cuales dos están defectuosos, por ejemplo, los empaques 1 y 2. El experimento consiste en extraer al azar dos empaques, de modo que el espacio muestral S consta de 6 resultados (pares no ordenados)

$$(1, 2), \quad (1, 3), \quad (1, 4), \quad (2, 3), \quad (2, 4), \quad (3, 4)$$

y se tiene interés en el número de empaques defectuosos que se obtienen en la extracción; es decir, en los eventos (subconjuntos de S)

$A = \{(3, 4)\}$ "No hay defectuosos"

$B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$ "Hay un defectuoso"

$C = \{(1, 2)\}$ "Hay dos defectuosos". ∎

Subconjuntos. En un ensayo, si ocurre un resultado que es un punto de un evento A, se dice que sucede A. Por ejemplo, si al lanzar un dado se obtiene 3, se dice que sucede el evento A: *Número impar*. Esto es bastante natural.

De manera semejante, $A \subseteq B$ ("A es un subconjunto de B") significa que todos los puntos de A también son todos los puntos de B. Y si sucede A, se dice que también sucede B. Por ejemplo, en un ensayo, si sucede $A = \{4, 5\}$ (lo que significa que el resultado del lanzamiento del dado es 4 o 5), entonces $B = \{4, 5, 6\}$ también sucede en ese ensayo.

Uniones, intersecciones, complementos

A partir de los eventos $A, B, C, \cdots$ de un espacio muestral S dado, es posible deducir más eventos por razones prácticas o teóricas como sigue.

La **unión** $A \cap B$ de A y B consta de todos los puntos que están en A o en B o en ambos.

La **intersección** $A \cap B$ de A y B consta de todos los puntos que están tanto en A como en B.

Si A y B no tienen puntos en común [como $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$ en (2)], se denominan **mutuamente excluyentes**, porque la ocurrencia de uno de esos eventos excluye la ocurrencia simultánea del otro: si se obtiene un número impar, no es posible obtener un número par en el mismo ensayo. Entonces se escribe

$$A \cap B = \varnothing,$$

en donde $\varnothing$ es el *conjunto vacío* (conjunto sin elementos).

El **complemento**[1] A^c de un evento A consta de todos los puntos de S que *no* están en A. En (2), el complemento de $A = \{1, 3, 5\}$ es $A^c = \{2, 4, 6\} = B$. Observar que un evento y su complemento siempre son mutuamente excluyentes, y que su unión es todo el espacio S.

$$A \cap A^C = \varnothing, \qquad A \cup A^C = S.$$

Las **uniones e intersecciones** de más eventos se definen de manera semejante. La **unión**

$$\bigcup_{j=1}^{m} A_j = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$$

de los eventos $A_1, \cdots, A_m$ consta de todos los puntos que están en por lo menos un A_j, y la **intersección**

$$\bigcap_{j=1}^{m} A_j = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m$$

consta de los puntos que están en cada uno de los eventos $A_1, \cdots, A_m$.

Los **diagramas de Venn**[2] son representaciones gráficas de eventos en un espacio muestral y son de bastante utilidad cuando se trabaja con eventos, en particular, si se trabaja con varios de éstos. En las figuras 485 y 486 se muestran ejemplos típicos.

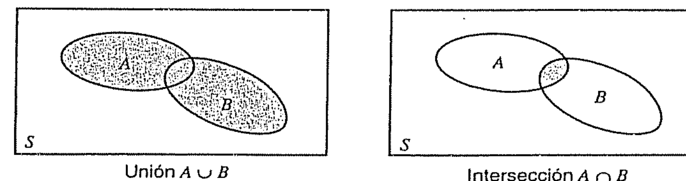


Figura 485. Diagramas de Venn en los que se observan dos eventos A y B en un espacio muestral S, su unión $A \cup B$ (a color) y su intersección $A \cap B$ (a color)

[1] O $\overline{A}$, pero esta notación no se usará porque en teoría de conjuntos se usa para otro propósito (para denotar la cerradura de A).
[2] JOHN VENN (1834–1923), matemático inglés.

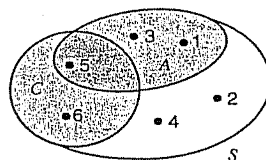


Figura 486. Diagrama de Venn para el experimento de lanzar un dado, en el que se observan S, $A = \{1, 3, 5\}$, $C = \{5, 6\}$, $A \cup C = \{1, 3, 5, 6\}$, $A \cap C = \{5\}$.

Ejemplo 7. Uniones e intersecciones de 3 eventos.

Al lanzar un dado, considerar los eventos

A: Número mayor que 3, B: Número menor que 6, C: Número par.

Entonces $A \cap B = \{4, 5\}$, $B \cap C = \{2, 4\}$, $C \cap A = \{4, 6\}$, $A \cap B \cap C = \{4\}$. ¿Puede dibujar el lector un diagrama de Venn que represente lo anterior? Además, $A \cap B = S$, de donde $A \cup B \cup C = S$ (¿por qué?), etc.

Problemas de la sección 23.1

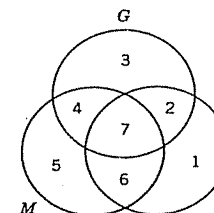
Graficar un espacio muestral de los siguientes experimentos.

1. Lanzar dos monedas.
2. Lanzar dos dados.
3. Extraer tres tornillos de un lote que contiene tornillos derechos y tornillos izquierdos.
4. Entrevistar a dos personas respecto a si les gustó cierta película, distinguiendo entre las respuestas Sí, No e Indeciso(a).
5. Extraer bolas de una caja que contiene 9 bolas azules y 1 bola roja, hasta que se extrae la roja, suponiendo "**muestreo sin reemplazo**", es decir, que las bolas extraídas *no* se regresan a la caja.
6. Lanzar un dado hasta obtener el primer 6.
7. Registrar el tiempo de vida útil de cada una de tres componentes electrónicas.
8. De un grupo de cinco personas, elegir un comité integrado por tres personas.
9. Registrar la precipitación pluvial X y la temperatura máxima Y diarias en una ciudad.
10. En el problema 2, encerrar en un círculo y marcar los eventos:

    A: Los resultados son iguales, *B: La suma de las caras es mayor que* 9.

    C: La suma de las caras es igual a 7. *D: La suma de las caras es par.*

    ¿Cuáles de estos eventos son mutuamente excluyentes? ¿Cuáles son A^c, B^c, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$, $A \cap C$?
11. En relación con un viaje a Europa efectuado por algunos estudiantes, considerar los eventos P de que vayan a París, G de que se diviertan y M de que se queden sin dinero, y describir con palabras los eventos 1, · · · , 7 en el diagrama.
12. En el problema 4, ¿cuál es el complemento del evento que consta de los tres resultados SS, NN, II?
13. Al lanzar dos dados, ¿son mutuamente excluyentes los eventos *A*: "*La suma es divisible entre* 3" y *B*: "*La suma es divisible entre* 4"? (Justificar la respuesta).



Problema 11.

14. En el problema 6, enumerar los resultados que integran el evento *E*: *Primer "seis" que se obtiene al lanzar el dado cuando mucho cuatro veces.* Describir E^c.
15. Enumerar todos los ocho subconjuntos del espacio muestral $S = \{a, b, c\}$.
16. Usando diagramas de Venn, graficar y comprobar las reglas

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

17. **(Leyes de De Morgan)** Usar diagramas de Venn para graficar y comprobar las *reglas de De Morgan*

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

18. Usando un diagrama de Venn, demostrar que $A \subseteq B$ si y sólo si $A \cap B = A$.
19. Demostrar que, por la definición de complemento, para cualquier subconjunto A de un espacio muestral S se tiene que

$$(A^c)^c = A, \quad S^c = \varnothing, \quad \varnothing^c = S, \quad A \cup A^c = S, \quad A \cap A^c = \varnothing.$$

20. Usando un diagrama de Venn, demostrar que $A \subseteq B$ si y sólo si $A \cup B = B$.

23.2 PROBABILIDAD

En un experimento, se supone que la "probabilidad" de un evento A mide aproximadamente con cuánta frecuencia ocurre A si se efectúan muchos ensayos. Si se lanza una moneda, entonces las caras H y las cruces T aparecen *aproximadamente* con la misma frecuencia: se dice que H y T son "**equiprobables**". En la tabla 23.1 se confirma este hecho. De manera semejante para un dado de forma regular ("**dado legal**" o "**no cargado**"), cada uno de los seis resultados 1, · · · , 6 son equiprobables. Estos son ejemplos de experimentos en los que el espacio muestral S consta de un número finito de resultados (puntos) que por razones de cierta simetría pueden considerarse como equiprobables. Esto sugiere la siguiente

Definición 1. Probabilidad.

Si el espacio muestral S de un experimento consta de un número finito de resultados (puntos) equiprobables, entonces la probabilidad $P(A)$ de un evento A es

(1) $$P(A) = \frac{\text{Número de puntos en } A}{\text{Número de puntos en } S}$$

Así, en particular,

(2) $$P(S) = 1.$$

Ejemplo 1. Probabilidad.

Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad $P(A)$ de A: "Obtener por lo menos un 5"? ¿Y la probabilidad de B: "*Número par*"?

Solución. Los seis resultados son equiprobables, de modo que la probabilidad de cada uno es 1/6. Así, $P(A) = 2/6 = 1/3$ porque $A = \{5, 6\}$ tiene dos puntos, y $P(B) = 3/6 = 1/2$. ∎

Tabla 23.1
Lanzamiento de una moneda

Experimentos realizados por	Número de lanzamientos	Número de caras	Frecuencia relativa de las caras
BUFFON	4,040	2,048	0,5069
K. PEARSON	12,000	6,019	0,5016
K. PEARSON	24,000	12,012	0,5005

La definición 1 es válida para muchos juegos, así como para algunas aplicaciones prácticas, como se verá, aunque ciertamente no lo es para todos los experimentos, simplemente debido a que en muchos problemas no se cuenta con un número finito de resultados equiprobables.

Por ejemplo, si de un lote recientemente producido se extraen tornillos, en grupos de 3 cada vez, y se inspeccionan para encontrar los defectuosos, ¿cómo es posible asignar una probabilidad a A: "*Cuando mucho un defectuoso*"? Bien: es posible hacer un mayor número n de ensayos (extraer al azar muchas veces tres tornillos de un lote e inspeccionarlos) y considerar la **frecuencia relativa** $f_{rel}(A)$ como una "aproximación" de la probabilidad desconocida $P(A)$. Aquí, por definición,

(3) $$f_{\text{rel}}(A) = \frac{f(A)}{n} = \frac{\text{Número de veces que ocurre } A}{\text{Número de ensayos}}$$

y $f(A)$ se denomina **frecuencia** de A. Resulta evidente que

(4*) $$0 \leqq f_{\text{rel}}(A) \leqq 1$$

en donde $f_{rel}(A) = 0$ si A no ocurre en una sucesión de ensayos y $f_{rel}(A) = 1$ si A ocurre en cada ensayo de la sucesión.

También, en cada uno de los n ensayos debe suceder uno de los resultados $D_0, \cdots, D_3$ (D_j = *Número de defectuosos en un lote*); por tanto, la suma de sus frecuencias debe ser igual a n. Para el espacio muestral $S = \{D_0, D_1, D_2, D_3\}$, con lo anterior se obtiene

(5*) $$f_{\text{rel}}(S) = \frac{f(D_0) + \cdots + f(D_3)}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

Además, si A y B son eventos mutuamente excluyentes ($A \cap B = \varnothing$, ver la sección 23.1), entonces en un ensayo cuando mucho puede ocurrir A o B, de modo que se obtiene

(6*) $$f_{\text{rel}}(A \cup B) = \frac{f(A) + f(B)}{n} = f_{\text{rel}}(A) + f_{\text{rel}}(B).$$

La probabilidad como contraparte de la frecuencia relativa. Ahora ya es posible extender la definición de probabilidad a experimentos en los que no se cuenta con resultados equiprobables. Por supuesto, la definición extendida debe comprender a la definición 1. Como se supone que las probabilidades son la contraparte teórica de las frecuencias relativas, entonces como axiomas se eligen las propiedades en (4*), (5*), (6*). (Históricamente, tal elección es resultado de un largo proceso de obtención de experiencia sobre lo que podría ser lo mejor y más práctico.)

Definición 2. Probabilidad.

Dado un espacio muestral S, para cada[3] evento A de S (subconjunto de S) hay asociado un número $P(A)$, denominado la **probabilidad** de A, tal que se cumplen los siguientes **axiomas de probabilidad**

1. Para todo A en S,

(4) $$0 \leqq P(A) \leqq 1.$$

2. La probabilidad de todo el espacio muestral S es

(5) $$P(S) = 1.$$

3. Para eventos mutuamente excluyentes A y B ($A \cap B = \varnothing$; ver la sección 23.1),

(6) $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad (A \cap B = \varnothing).$$

Si S es infinito (tiene una infinidad de puntos), el axioma 3 debe sustituirse por

3'. Para eventos mutuamente excluyentes $A_1, A_2, \cdots,$

(6') $$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots.$$

[3] En el caso infinito, respecto a una restricción *teórica* sin consecuencias prácticas para los objetivos de este libro, consultar la "s álgebra", por ejemplo, en la obra citada en el apéndice 1 como referencia [8].

Teoremas básicos sobre probabilidad

Se verá que los axiomas de probabilidad permiten elaborar la teoría de probabilidad y sus aplicaciones a la estadística. Se empezará con tres teoremas básicos. El primero de ellos es de utilidad si se desea obtener la probabilidad del complemento A^c más fácilmente que $P(A)$ en sí.

Teorema 1 (Regla de complementación)

Para un evento A y su complemento A^c en un espacio muestral S,

(7) $$P(A^C) = 1 - P(A).$$

Demostración. Por la definición de complemento (sección 23.1) se tiene $S = A \cup A^c$ y $A \cap A^c = \varnothing$. Así, por los axiomas 2 y 3,

$$1 = P(S) = P(A) + P(A^C), \quad \text{por tanto,} \quad P(A^C) = 1 - P(A).$$ ∎

Ejemplo 2. Lanzamiento de monedas.

Se lanzan cinco monedas de manera simultánea. Encontrar la probabilidad del evento A: *Por lo menos se obtiene una cara*. Suponer que las monedas no están cargadas.

Solución. Como cada moneda puede caer cara o cruz, entonces el espacio muestral consta de $2^5 = 32$ resultados. Ya que las monedas no están cargadas, es posible asignar la misma probabilidad (1/32) a cada resultado. Así, el evento A^c (*No se obtiene ninguna cara*) consta de un sólo resultado. Por tanto, $P(A^c) = 1/32$, y la respuesta es $P(A) = 1 - P(A^c) = 31/32$ ∎

El siguiente teorema es una simple extensión del axioma 3, que puede demostrarse fácilmente por inducción:

Teorema 2 (Regla de la adición para eventos mutuamente excluyentes)

Para eventos mutuamente excluyentes $A_1, \cdots, A_m$ en un espacio muestral S,

(8) $$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_m).$$

Ejemplo 3. Eventos mutuamente excluyentes.

Si las probabilidades de que en cualquier día laboral un taller mecánico reciba 10-20, 21-30, 31-40, más de 40 automóviles para reparar son 0.20, 0.35, 0.25, 0.12, respectivamente, ¿cuál es la probabilidad de que en cualquier día dado el taller reciba por lo menos 21 automóviles para reparar?

Solución. Como se trata de eventos mutuamente excluyentes, al aplicar el teorema 2 se obtiene la respuesta 0.35 + 0.25 + 0.12 = 0.72 ∎

En muchos casos los eventos no son mutuamente excluyentes. Entonces se tiene el

Teorema 3 (Regla de la adición para eventos arbitrarios)

Para los eventos A y B de un espacio muestral,

(9) $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Demostración. En la figura 487 se tiene que los eventos C, D, E son ajenos, y $A = C \cup D$, $B = D \cup E$. Así, por el axioma 3

$$P(A) = P(C) + P(D), \qquad P(B) = P(D) + P(E).$$

Por adición,

ENTRA FOR $P(A) + P(B) = P(C) + P(D) + P(D) + P(E).$

Luego se resta $P(D)$ en ambos miembros,

$$P(A) + P(B) - P(D) = P(C) + P(D) + P(E).$$

El miembro izquierdo es $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ porque $D = A \cap B$. El miembro derecho es $P(A \cup B)$ por el teorema 1, ya que $A \cup B = C \cup D \cup E$ y C, D, E son ajenos. Así se demuestra (9). ∎

Observar que, por definición, para eventos mutuamente excluyentes A y B se tiene $A \cap B = \varnothing$ y, al comparar (9) y (6),

$$\boxed{P(\varnothing) = 0.}$$

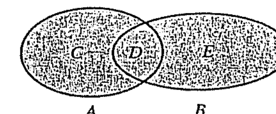


Figura 487. Demostración del teorema 3.

Ejemplo 4. Unión de eventos arbitrarios.

Al lanzar un dado no cargado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un numero impar o un número menor que 4?

Solución. Sean A el evento "*Número impar*" y B el evento "*Número menor que* 4". Entonces al aplicar el teorema 4 se obtiene la respuesta

$$P(A \cup B) = \tfrac{3}{6} + \tfrac{3}{6} - \tfrac{2}{6} = \tfrac{2}{3}$$

ya que $A \cap B$ = "*Número impar menor que* 4" = $\{1, 3\}$.

Probabilidad condicional. Eventos independientes

A menudo se requiere determinar la probabilidad de un evento B bajo la condición de que ocurra un evento A. Esta probabilidad se denomina **probabilidad condicional** de B dado A y se denota por $P(B|A)$. En este caso, A sirve como un nuevo espacio muestral (reducido), y tal probabilidad es la fracción de $P(A)$ que corresponde a $A \cap B$. Así,

(11) $$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad [P(A) \neq 0].$$

De manera semejante, la *probabilidad condicional de A dado B* es

(12) $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad [P(B) \neq 0].$$

Al despejar $P(A \cap B)$ de (11) y (12) se obtiene el

Teorema 4 (Regla de la multiplicación)

Si A y B son eventos en un espacio muestral S y $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$, entonces

(13) $$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

Ejemplo 5. Regla de la multiplicación.

Al producir tornillos, sean A que significan "tornillo demasiado delgado" y B "tornillo demasiado corto", respectivamente. Sea $P(A) = 0.1$ y sea $P(B|A) = 0.2$ la probabilidad condicional de que un tornillo demasiado delgado también sea demasiado corto. ¿Cuál es la probabilidad de que un tornillo elegido al azar del lote producido sea demasiado delgado y demasiado corto?

Solución. $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = 0.1 \cdot 0.2 = 0.02 = 2\%$ por el teorema 4.

Eventos independientes. Si los eventos A y B son tales que

(14) $$P(A \cap B) = P(A)P(B),$$

entonces se denominan **eventos independientes.** Suponiendo que $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$, a partir de (11)-(13) se observa que en este caso

$$P(A|B) = P(A), \qquad P(B|A) = P(B).$$

Lo anterior significa que la probabilidad de A no depende de la ocurrencia o no ocurrencia de B, y recíprocamente. Esto justifica el término "independientes".

Independencia de m eventos. De manera semejante, m eventos $A_1, \cdots, A_m$ se denominan **independientes** si

(15a) $$P(A_1 \cap \cdots \cap A_m) = P(A_1) \cdots P(A_m)$$

así como para cada k eventos diferentes $A_{j_1}, A_{j_2}, \cdots, A_{j_k}$

(15b) $$P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_k}) = P(A_{j_1})P(A_{j_2}) \cdots P(A_{j_k})$$

en donde $k = 2, 3, \cdots, m-1$.

En consecuencia, tres eventos A, B y C son independientes si

(16) $$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B), \\ P(B \cap C) &= P(B)P(C), \\ P(C \cap A) &= P(C)P(A), \\ P(A \cap B \cap C) &= P(A)P(B)P(C). \end{aligned}$$

Muestreo. El siguiente ejemplo está relacionado con la extracción aleatoria de objetos, *uno a la vez,* de un conjunto de objetos dado. Lo anterior se denomina **muestreo de una población** y existen dos formas de muestreo, como se muestra a continuación.

1. En el **muestreo con reemplazo,** el objeto extraído al azar se regresa nuevamente al conjunto dado y éste se revuelve de manera exhaustiva. Luego se extrae aleatoriamente el siguiente objeto.

2. En el **muestreo sin reemplazo,** el objeto extraído no se regresa al conjunto.

Ejemplo 6. Muestreo con y sin reemplazo.

Una caja contiene 10 tornillos, de los cuales tres son defectuosos. Se extraen dos tornillos al azar. Encontrar la probabilidad de que ninguno de los dos tornillos sea defectuoso.

Solución. Se considerarán los eventos

A: El primer tornillo extraído no es defectuoso.

B: El segundo tornillo extraído no es defectuoso.

Resulta evidente que $P(A) = \frac{7}{10}$ porque 7 de los 10 tornillos no son defectuosos y se muestrea al azar, de modo que cada tornillo tiene la misma probabilidad $\frac{1}{10}$ de ser elegido. Si se muestrea con reemplazo, la situación antes de la segunda extracción es la misma que al principio, y $P(B) = \frac{7}{10}$. Los eventos son independientes, y la respuesta es

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.7 \cdot 0.7 = 0.49 = 49\%.$$

Si se muestrea sin reemplazo, entonces $P(A) = \frac{7}{10}$, como antes. Si ha ocurrido A, entonces quedan 9 tornillos en la caja, de los cuales 3 son defectuosos. Así, $P(B|A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ y al aplicar el teorema 4 se obtiene la respuesta

$$P(A \cap B) = \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3} \approx 47\%.$$ ∎

Problemas de la sección 23.2

1. ¿Cuál es la probabilidad de obtener por lo menos una cara al lanzar seis monedas no cargadas?
2. Al lanzar dos dados no cargados, ¿cuál es la probabilidad de obtener una suma mayor que 10 o una suma divisible entre 6?
3. De un lote de 100 tornillos que contiene 10 tornillos defectuosos se extraen al azar tres tornillos. Encontrar la probabilidad del evento que todos los 3 tornillos extraídos no sean defectuosos, suponiendo que se extrae (a) con reemplazo, (b) sin reemplazo.
4. ¿En qué condiciones no habrá *prácticamente* diferencia si se extrae con o sin reemplazo?

5. Tres cajas contienen cinco fichas cada una, numeradas del 1 al 5, y de cada caja se extrae al azar una ficha. Encontrar la probabilidad del evento E que la suma de los números de las fichas extraídas sea mayor que 4.
6. Un lote de 100 varillas de acero consta de 25 varillas que exceden la medida necesaria, de 25 varillas que no alcanzan la medida necesaria, y de 50 varillas que tienen la medida necesaria. Si al azar se extraen sin reemplazo dos varillas, ¿cuál es la probabilidad de obtener (a) dos varillas de la medida necesaria, (b) una varilla de la medida necesaria, (c) ninguna varilla de la medida necesaria, (d) dos varillas que no alcanzan la medida necesaria?
7. Si un cierto tipo de neumático tiene una duración que supera las 25 000 millas con probabilidad 0.95, ¿cuál es la probabilidad de que un conjunto de estos neumáticos en un automóvil dure más que 25 000 millas?
8. En el problema 7, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos un neumático no dure 25 000 millas?
9. Un aparato para controlar la presión contiene 4 tubos electrónicos. El aparato no funciona a menos de que todos los tubos sean eficientes. Si la probabilidad de falla de cada tubo durante algún intervalo de tiempo es 0.03, ¿cuál es la probabilidad correspondiente de falla del aparato?
10. Si un circuito contiene tres interruptores automáticos y se desea que, con una probabilidad de 95%, durante un intervalo de tiempo dado todos trabajen, ¿cuál es la probabilidad de falla por intervalo de tiempo que es posible permitir para un solo interruptor?
11. Si se inspeccionan hojas de papel al extraer sin reemplazo 3 hojas de cada lote de 100 hojas, ¿cuál es la probabilidad de obtener 3 hojas limpias aun cuando el 8% de las hojas contiene impurezas?
12. ¿Con cuál de las siguientes opciones se obtiene una mayor probabilidad de acertar por lo menos una vez: (a) acertar con probabilidad 1/2 y disparar una vez, o (b) acertar con probabilidad 1/4 disparando 2 veces?
13. Al lanzar dos dados no cargados, ¿cuál es la probabilidad de obtener números iguales o números cuyo producto sea par?
14. Suponer que se extraen tarjetas repetidamente y con reemplazo de un archivo de 200 tarjetas, 100 de las cuales se refieren a hombres y 100 de las cuales se refieren a mujeres. ¿Cuál es la probabilidad de obtener la segunda tarjeta "mujer" antes de obtener la tercera tarjeta "hombre"?
15. ¿Cuál es el evento complementario del evento considerado en el problema 14? Calcular su probabilidad y usarla para comprobar el resultado obtenido en el problema 14.
16. Suponer que en una producción de fusibles la fracción de fusibles defectuosos ha sido del 2% constante durante un gran periodo de tiempo, y que este proceso es controlado cada media hora al extraer e inspeccionar dos fusibles recientemente producidos. Encontrar las probabilidades de (a) no obtener ningún fusible defectuoso, obtener (b) un fusible defectuoso, (c) dos fusible defectuosos. ¿Cuál es la suma de estas probabilidades?
17. Un motor acciona un generador eléctrico. Durante un periodo de 30 días, el motor requiere reparación con una probabilidad de 8%, y el generador requiere reparación con una probabilidad de 4%. ¿Cuál es la probabilidad de que durante un periodo dado todo el aparato requiera reparación?
18. Demostrar que si B es un subconjunto de A, entonces $P(B) \leqq P(A)$.
19. Extender el teorema 4 para demostrar que $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)$.
20. Quizá el lector se pregunte si en (16) la última relación se concluye a partir de las otras, pero la respuesta es no. A fin de ver lo anterior, imaginar que se extrae una ficha de una caja que contiene 4 fichas numeradas 000, 011, 101, 110, y sean A, B, C los eventos de que los dígitos primero, segundo y tercero, respectivamente, de la ficha extraída sean 1. Demostrar que entonces las tres primeras fórmulas en (16) se cumplen, pero que la ultima no se cumple.

23.3 PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

En esta sección se obtendrá ayuda para efectuar el **conteo sistemático** de puntos muestrales en eventos A. Esto es necesario para calcular la probabilidad $P(A)$ en experimentos con un espacio muestral finito S que consta de k resultados equiprobables. Así cada resultado tiene una probabilidad $1/k$, y si A consta de m resultados, entonces

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{k}.}$$

Y en la práctica, m o k puede ser tan grande que olvidar puntos o contarlos dos veces es casi inevitable. Por ejemplo, el número de órdenes para sentarse de 10 personas es 3 628 000 (con lo que la probabilidad de sentar aleatoriamente a estas personas en un cierto orden dado es igual a 1/3 628 000.): ¿puede el lector darse cuenta de que no sería muy práctico calcular lo anterior escribiendo una lista de tales órdenes para sentarse? Es aquí que las "permutaciones" y las "combinaciones" son de utilidad para efectuar lo anterior.

Permutaciones. Dadas n cosas diferentes (*elementos u objetos*), es posible disponerlas en un renglón *en cualquier orden*. Cada una de tales disposiciones o arreglos se denomina **permutación** de las cosas dadas. Por ejemplo, se tienen 6 permutaciones de las tres letras a, b, c; a saber, $abc, acb, bac, bca, cab, cba$. Esto ilustra el

Teorema 1 (Permutaciones)

El número de permutaciones de n cosas diferentes tomadas todas a la vez es

$$\text{(1)} \qquad \boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \qquad \text{(léase como "}n\text{ factorial").}$$

De hecho, existen n posibilidades para ocupar la primera posición en el renglón; luego quedan disponibles $n - 1$ objetos para ocupar la segunda posición, etc. De manera semejante, si no todas las cosas dadas son diferentes, para calcular su número de permutaciones se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 2. (Permutaciones)

Si n cosas dadas pueden dividirse en c clases tales que las cosas que pertenecen a la misma clase son iguales mientras que las que pertenecen a clases diferentes son diferentes, entonces el número de permutaciones de estas cosas tomadas todas a la vez es

$$\text{(2)} \qquad \frac{n!}{n_1!\,n_2! \cdots n_c!} \qquad (n_1 + n_2 + \cdots + n_c = n)$$

en donde n_j es el número de cosas en la j-ésima clase.

Ejemplo 1. Ilustración del teorema 1.

Si en una caja hay 10 tornillos diferentes que son necesarios en cierto orden para ensamblar un producto y estos tornillos se extraen al azar de la caja, entonces la

probabilidad P de elegirlos en el orden requerido es muy pequeña; a saber (ver el teorema 1)

$$P = 1/10! = 1/3\ 628\ 800 \approx 0.000\ 03\%.$$

Ejemplo 2. Ilustración del teorema 2.

Si una caja contiene 6 bolas rojas y 4 bolas azules, la probabilidad de extraer primero las bolas rojas y luego las bolas azules es (ver el teorema 2)

$$P = 6!4!/10! = 1/210 \approx 0.5\%.$$

Una **permutación de n cosas tomadas k a la vez** es una permutación que contiene sólo k de las n cosas dadas. Por definición, dos de tales permutaciones que constan de los mismos k elementos, en orden diferente, son diferentes. Por ejemplo, se tienen seis permutaciones diferentes de las tres letras a, b, c, al tomar dos letras a la vez; a saber,

$$ab,\quad ac,\quad bc,\quad ba,\quad ca,\quad cb.$$

Una **permutación de n cosas tomadas k a la vez con repeticiones** es un arreglo que se obtiene al colocar cualquier cosa de las dadas en la primera posición, cualquier cosa de las dadas, incluyendo una repetición de la que acaba de utilizarse, en la segunda posición, y continuando así hasta que se ocupan las k posiciones. Por ejemplo, se tienen $3^2 = 9$ permutaciones diferentes de ese tipo de a, b, c tomando dos letras a la vez; a saber, las seis permutaciones que se proporcionaron con anterioridad y ad, bb, cc. El lector puede demostrar el siguiente teorema (Problema 15).

Teorema 3 (Permutaciones)

El número de permutaciones diferentes de n cosas diferentes tomadas k a la vez sin repeticiones es

(3a) $$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

y con repeticiones, es

(3b) $$n^k.$$

Ejemplo 3. Ilustración del teorema 3.

En un telegrama codificado las letras están dispuestas en grupos de cinco letras, denominadas *palabras*. A partir de (3b) se observa que el número de tales palabras diferentes es

$$26^5 = 11\ 881\ 376.$$

A partir de (3a) se concluye que el número de tales palabras diferentes que contienen a cada letra no más de una vez es

$$26!/(26-5)! = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 7\ 893\ 600.$$

Combinaciones

En una permutación es esencial el orden de las cosas elegidas. En contraste, una combinación de cosas dadas significa cualquier selección de una o más cosas *sin importar el orden*. Existen dos tipos de combinaciones, como se muestra a continuación.

El número de **combinaciones de n cosas diferentes, tomadas k a la vez, sin repeticiones** es el número de conjuntos de pueden formarse a partir de las n cosas dadas, conteniendo cada conjunto k cosas diferentes y sin que dos conjuntos cualesquiera contengan exactamente las mismas k cosas.

El número de **combinaciones de n cosas diferentes, tomadas k a la vez, con repeticiones** es el número de conjuntos que pueden formarse de k cosas elegidas de las n dadas, utilizando cada una de éstas tan a menudo como se quiera.

Por ejemplo, se tienen tres combinaciones de las letras a, b, c, tomadas dos a la vez, sin repeticiones; a saber, ab, ac, bc, y seis de esas combinaciones con repeticiones; a saber, ab, ac, bc, aa, bb, cc.

Teorema 4 (Combinaciones)

El número de combinaciones diferentes de n cosas diferentes, tomadas k a la vez, sin repeticiones, es

(4a) $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k},$$

y el número de esas combinaciones con repeticiones es

(4b) $$\binom{n+k-1}{k}.$$

La proposición que implica a (4a) se deduce de la primera parte del teorema 3 al observar que existen $k!$ permutaciones de k cosas tomadas de las n dadas, las cuales sólo difieren en el orden de los elementos (ver el teorema 1), pero sólo se tiene una combinación de esas k cosas del tipo caracterizado en la primera proposición del teorema 4. La última proposición de este teorema puede demostrarse por inducción (ver el problema 16).

Ejemplo 4 Ilustración del teorema 4.

El número de muestras de cinco focos que pueden seleccionarse de un lote de 500 es [ver (4a)]

ENTRA FC $$\binom{500}{5} = \frac{500!}{5!495!} = \frac{500\cdot 499\cdot 498\cdot 497\cdot 496}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 255\ 244\ 687\ 600.$$

Función factorial

En (1)–(4), la **función factorial** es básica. Por definición,

(5) $$0! = 1.$$

Los valores pueden calcularse recurrentemente a partir de valores dados por medio de

(6) $$(n+1)! = (n+1)n!.$$

Para n grande la función es muy grande (ver la tabla A3 en el apéndice 5). Una aproximación conveniente para n grande es la **fórmula de Stirling**[4]

(7) $$\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \qquad (e = 2.718\cdots)$$

en donde $\sim$ se lee como "*asintóticamente igual*" y significa que la razón de los dos miembros de (7) tiende a 1 cuando n tiende a infinito.

Ejemplo 5. Fórmula de Stirling

A fin de apreciar la fórmula de Stirling, comprobar las siguientes aproximaciones:

n!	Por (7)	Valor exacto	Error relativo
4!	23.5	24	1.4%
10!	3 598 696	3 628 800	0.8%
20!	$2.422\,79 \cdot 10^{18}$	2 432 902 008 176 640 000	0.4%

Coeficientes binomiales

Los coeficientes binomiales se definen por medio de la fórmula

(8) $$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-k+1)}{k!} \qquad (k \geqq 0, \text{ entero}).$$

El numerador tiene k factores. Además, se define

(9) $$\binom{a}{0} = 1, \qquad \text{en particular,} \qquad \binom{0}{0} = 1.$$

Para un entero $a = n$, a partir de (8) se obtiene

(10) $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad (n \geqq 0,\ 0 \leqq k \leqq n).$$

[4]JAMES STIRLING (1692-1770), matemático escocés.

Los coeficientes binomiales pueden calcularse recurrentemente, ya que

(11) $$\binom{a}{k} + \binom{a}{k+1} = \binom{a+1}{k+1} \qquad (k \geqq 0, \text{ entero}).$$

La fórmula (8) también produce

(12) $$\binom{-m}{k} = (-1)^k \binom{m+k-1}{k} \qquad (k \geqq 0, \text{ entero}) \ (m > 0).$$

Existen numerosas relaciones adicionales; se mencionan las siguientes

(13) $$\sum_{s=0}^{n-1} \binom{k+s}{k} = \binom{n+k}{k+1} \qquad (k \geqq 0,\ n \geqq 1, \text{ ambos enteros})$$

y

(14) $$\sum_{k=0}^{r} \binom{p}{k}\binom{q}{r-k} = \binom{p+q}{r}.$$

Problemas de la sección 23.3

1. Enumerar todas las permutaciones de los cuatro dígitos 1, 2, 3, 4, tomados todos a la vez.
2. Enumerar todas las (a) permutaciones (b) combinaciones sin repeticiones, (c) combinaciones con repeticiones, de las 5 letras *a, e, i, o, u* tomadas 2 a la vez.
3. ¿De cuántas maneras es posible asignar 8 obreros a 8 trabajos (un obrero a cada trabajo y recíprocamente)?
4. ¿De cuántas maneras es posible elegir un comité de 3 personas de un grupo de 6 personas?
5. ¿Cuántas muestras diferentes de 3 objetos es posible extraer de un lote de 50 objetos?
6. Si una jaula contiene 100 ratones, dos de los cuales son machos, ¿cuál es la probabilidad de que dos ratones machos estén en una muestra si se eligen 12 ratones al azar?
7. De un lote de 10 objetos, 2 son defectuosos. (a) Encontrar el número de muestras diferentes de 4 objetos. Encontrar el número de muestras de 4 objetos que (b) no contienen ningún objeto defectuoso, contienen (c) 1 objeto defectuoso, (d) dos objetos defectuosos.
8. Una urna contiene 2 bolas azules, 3 bolas verdes y 4 bolas rojas. Se extrae al azar una bola y se coloca a un lado. Luego se extrae la siguiente bola, etc. Encontrar la probabilidad de extraer en primer lugar las 2 bolas azules, luego las 3 verdes y finalmente las rojas.
9. Determinar el número de manos de bridge diferentes. (Una mano de bridge consta de 13 cartas seleccionadas de una baraja completa de 52 cartas diferentes.)
10. ¿De cuántas maneras diferentes es posible que 5 personas se sienten en una tabla redonda?
11. Si se alinean 3 sospechosos de robo y 6 personas inocentes, ¿cuál es la probabilidad de que un testigo que no está seguro y debe elegir a tres personas escoja por azar a los tres sospechosos? ¿Y de que el testigo elija por azar a 3 personas inocentes?
12. ¿De cuántas maneras diferentes es posible elegir un comité integrado por 4 ingenieros, 2 químicos y 2 matemáticos de un grupo de 10 ingenieros, 5 químicos y 7 matemáticos? (Primero adivinar; luego calcular la respuesta.)
13. ¿Cuántas placas de automóvil diferentes con 5 símbolos; a saber, 2 letras seguidas por 3 dígitos, es posible elaborar?

14. ¿Cuál es la probabilidad de que en un grupo de 20 personas (en el que no hay gemelos) por lo menos dos cumplan años el mismo día, si se supone que la probabilidad de cumplir años en un día dado es 1/365 para cada día? Primero adivinar; luego calcular la respuesta.
15. Demostrar el teorema 3.
16. Demostrar la última proposición del teorema 4. *Sugerencia.* Aplicar (13).
17. Usando (17), calcular valores aproximados de 4! y 8! y determinar los valores absoluto y relativo.
18. (*Teorema del binomio*) Por el teorema del binomio,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

de modo que $a^k b^{n-k}$ tiene el coeficiente $\binom{n}{k}$. ¿Es posible concluir esto a partir del teorema 4 o se trata de una simple coincidencia?
19. Deducir (11) a partir de (8).
20. Demostrar (14) aplicando el teorema del binomio (problema 18) a

$$(1 + b)^p(1 + b)^q = (1 + b)^{p+q}.$$

23.4 VARIABLES ALEATORIAS, DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

Si se lanzan dos dados, se sabe que la suma X de los dos números que aparecen en la cara superior debe ser un entero entre 2 y 12, aunque no es posible predecir qué valor de X ocurrirá en el siguiente ensayo, y puede afirmarse que X depende del "azar". De manera semejante, si se desea extraer 5 tornillos de un lote de tornillos y medir sus diámetros, no es posible predecir cuántos serán defectuosos; es decir, no cumplirán requisitos dados; por tanto, X = *Número de defectuosos* es nuevamente una función que depende del "azar". El tiempo de vida útil X de un foco extraído de un lote de focos también depende del "azar", así como el contenido X de una botella de limonada que es llenada por una máquina y se selecciona aleatoriamente de un lote dado.

En términos generales, una **variable aleatoria** X (también denominada **variable estocástica**) es una función asociada con un experimento cuyos valores son números reales y su ocurrencia en los ensayos (las ejecuciones del experimento) depende del "azar". Con más precisión, se tiene la siguiente definición.

Definición (Variable aleatoria, su distribución de probabilidad)

Una **variable aleatoria** X es una función con las siguientes propiedades.

1. *X está definida en el espacio muestral S de un experimento, y sus valores son números reales.*

2. *Para todo número real a, la probabilidad*

$$P(X = a)$$

de que X asuma el valor a en un ensayo está bien definida; de manera semejante, para todo intervalo I la probabilidad

$$P(X \in I)$$

*de que X asuma **cualquier** valor en I en un ensayo está bien definida.*

Estas probabilidades constituyen la **distribución de probabilidad** o, brevemente, la **distribución** *de X*, dada la **función de distribución**[5]

(1) $$F(x) = P(X \leqq x),$$

para todo x que proporcione la probabilidad de que X asuma ***cualquier*** valor no mayor que x.

Aunque la definición de distribución es muy general, sólo un número muy pequeño de distribuciones ocurre una y otra vez en las aplicaciones. Más importante es una clasificación de las distribuciones relevantes desde un punto de vista práctico, en dos grandes categorías: las *distribuciones discretas*, que ocurren en experimentos en los que se ***cuenta*** (automóviles sobre una carretera, fallecimientos por cáncer, lanzamientos de un dado hasta que se obtiene el primer 6, etc.) y las *distribuciones continuas*, que ocurren en experimentos en los que se ***mide*** (tensión eléctrica, presión arterial, precipitación pluvial, etc.). A continuación se analizarán estas dos clases de distribuciones, una después de otra.

Variables y distribuciones aleatorias discretas

Definición (Variable y distribución aleatorias discretas)
Una variable aleatoria X y su distribución se denominan **discretas** si X puede asumir sólo una cantidad finita o cuando mucho una infinidad numerable de valores, denominados **valores posibles** de X, por ejemplo,

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \cdots,$$

con probabilidades positivas

$$p_1, \quad p_2, \quad p_3, \cdots,$$

respectivamente, mientras que la probabilidad para cualquier intervalo que no contiene ningún valor posible de X es cero. ∎

Resulta evidente que la distribución discreta está dada por la **función de probabilidad** *de X*, definida por

[5] ***¡Precaución!*** ¡La terminología no es uniforme! $F(x)$ algunas veces también se denomina **función de distribución acumulada**.

$$(2) \qquad f(x) = \begin{cases} p_j & \text{si } x = x_j \quad (j = 1, 2, \cdots), \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

A partir de lo anterior se obtienen los valores de la función de distribución $F(x)$ al considerar sumatorias,

$$(3) \qquad F(x) = \sum_{x_j \leqq x} f(x_j) = \sum_{x_j \leqq x} p_j,$$

en donde para cualquier x dado se suman todas las probabilidades p_j para las cuales x_j es menor o igual que x. Esta es un función escalonada con saltos verticales de tamaño p_j en los valores posibles x_j de X y constante en las regiones entre éstos.

Ejemplo 1. Función de probabilidad y función de distribución.

En la figura 488 se muestran la función de probabilidad $f(x)$ y la función de distribución $F(x)$ de la variable aleatoria discreta

X = Número que aparece en la cara superior de un dado no cargado, que se obtiene en un lanzamiento de éste.

Los valores posibles de X son $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ con probabilidad 1/6 cada uno, y precisamente en estos x la función de distribución tiene saltos verticales de magnitud 1/6. Por tanto, a partir de la gráfica de $f(x)$ es posible obtener la gráfica de $F(x)$ y recíprocamente.

En la figura 488 (y en la siguiente), **¡el punto más grande indica el valor de la función en el salto!** ∎

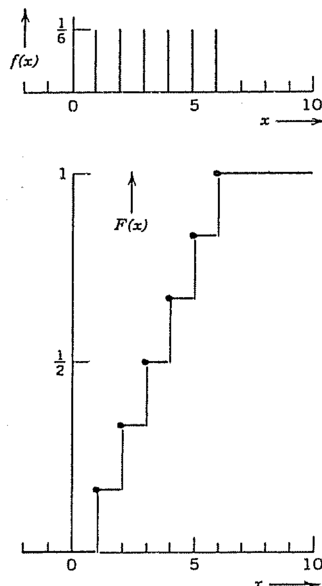


Figura 488. Función de probabilidad $f(x)$ y función de distribución $F(x)$ de la variable aleatoria *X = Número que se obtiene al lanzar una vez un dado legal.*

Ejemplo 2. Función de probabilidad y función de distribución.

La variable aleatoria

X = Suma de los dos números que aparecen en las caras superiores de dos dados no cargados al efectuar un lanzamiento de éstos.

es discreta y tiene los valores posibles 2 (= 1 + 1), 3, 4, $\cdots$, 12 (= 6 + 6). Existen $6 \cdot 6 = 36$ resultados equiprobables

$$(1, 1), \quad (1, 2), \cdots, (1, 6)$$

en donde el primer número es el que aparece en el primer dado y el segundo número es el que aparece en el otro dado. Cada uno de tales resultados tiene probabilidad 1/36. Así, $X = 2$ ocurre en el caso del resultado (1, 1); $X = 3$ en el caso de los dos resultados (1, 2) y (2, 1); $X = 4$ en el caso de los tres resultados (1, 3), (2, 2), (3, 1), etc. Por tanto, $f(x) = P(X = x)$ y $F(x) = P(X \leq x)$ tiene los valores

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36
$F(x)$	1/36	3/36	6/36	10/36	15/36	21/36	26/36	30/36	33/36	35/36	36/36

En la figura 489 se muestran un diagrama de barras de esta función y la gráfica de la función de distribución que nuevamente es una función escalonada, con saltos en los valores posibles de X.

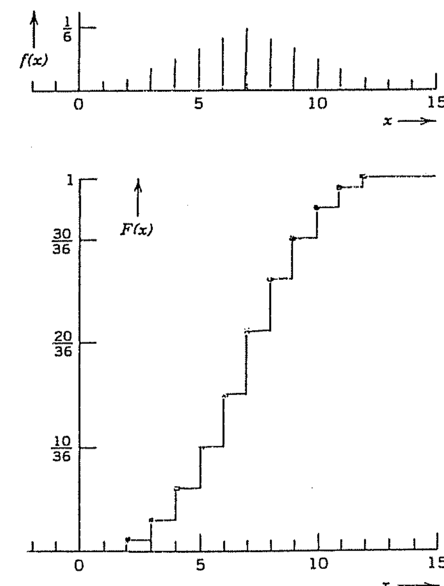


Figura 489. Función de probabilidad $f(x)$ y función de distribución $F(x)$ de la variable aleatoria *X = Suma de los dos números que se obtienen al lanzar una vez dos dados legales.*

Probabilidad correspondiente a intervalos. En aplicaciones, a menudo se tiene interés en la probabilidad $P(a < X \leqq b)$ de que X asuma cualquier valor en algún intervalo dado $a < x \leqq b$. A partir de (1) se obtiene la fórmula fundamental

$$P(a < X \leqq b) = F(b) - F(a), \tag{4}$$

que es válida para cualquier distribución. En efecto, los eventos $X \leqq a$ ("*X asume cualquier valor no mayor que a*") y $a < X \leqq b$ ("*X asume cualquier valor en el intervalo $a < x \leqq b$*") son mutuamente excluyentes, de modo que el axioma 3, sección 23.2, junto con (1) proporcionan

$$F(b) = P(x \leqq b) = P(X \leqq a) + P(a < X \leqq b) = F(a) + P(a < X \leqq b).$$

Para obtener (4) se resta $F(a)$ en ambos miembros. ∎

Si X es discreta, entonces con (4) y (3) se obtiene

$$P(a < X \leqq b) = \sum_{a < x_j \leqq b} p_j, \tag{5}$$

la suma de todas las probabilidades p_j para las cuales x_j satisface $a < x_j \leqq b$. (¡Debe tenerse cuidado con los signos < y ≦ !)

Ejemplo 3. Ilustración de la fórmula (5).

En el ejemplo 2, calcular la probabilidad de obtener una suma igual a por lo menos 4 y cuando mucho 8.

Solución. $P(3 < X \leqq 8) = F(8) - F(3) = \frac{26}{36} - \frac{3}{36} = \frac{23}{36}$. ∎

Otra fórmula útil que debe tenerse en cuenta resulta de $P(S) = 1$ y (5):

$$\sum_j p_j = 1 \quad \text{(suma de todas las probabilidades).} \tag{6}$$

Ejemplo 4. Problema de la espera. Espacio muestral infinito numerable.

Al lanzar una moneda legal, sea X = *Número de ensayos hasta que se obtiene la primera cara*. Entonces, debido a la independencia de eventos (sección 23.2),

$$P(X = 1) = P(H) = \tfrac{1}{2} \qquad (H = \text{Cara})$$
$$P(X = 2) = P(TH) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4} \qquad (T = \text{Cruz})$$
$$P(X = 3) = P(TTH) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{8}, \text{ etc.}$$

y en general $P(X = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $n = 1, 2, \cdots$. También, (6) puede confirmarse mediante la fórmula de la suma para series geométricas,

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \cdots = -1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = -1 + 2 = 1.$$ ∎

Variables y distribuciones aleatorias continuas

Los experimentos en que se *cuenta* implican variables aleatorias *discretas*, y aquéllos en los que se *mide*, variables aleatorias *continuas*:

Definición (Variable y distribución aleatorias continuas)
Una variable aleatoria X y su distribución se denominan *de tipo continuo* o, brevemente, **continuas**, si la función de distribución correspondiente $F(x)$ puede obtenerse mediante una integral en la forma[6]

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(v)\, dv \tag{7}$$

en donde la "**densidad**" f de la distribución es continua (excepto posiblemente para un número finito de valores de v) y no negativa. ∎

Al derivar (7) se obtiene

$$F'(x) = f(x)$$

para todo x en el que $f(x)$ es continua.

Con base en (7) y el axioma 2, sección 23.2, también se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\, dv = 1. \tag{8}$$

Además, a partir de (4) y (7) se obtiene la importante fórmula

$$P(a < X \leqq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(v)\, dv. \tag{9}$$

Así, esta probabilidad es igual al área bajo la curva de la densidad $f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$, como se muestra en la figura 490.

Resulta evidente que, para cualesquiera a y b ($> a$) fijos, en el caso de una variable aleatoria *continua* X las probabilidades correspondientes a los intervalos $a < X \leqq b$, $a < X < b$, $a \leqq X < b$ y $a\, X \leqq b$ son todas iguales. Esto es diferente al caso de una distribución discreta (¡explicar por qué!).

El siguiente ejemplo ilustra las notaciones y aplicaciones típicas de las fórmulas actuales.

[6] $F(x)$ es continua, pero la continuidad de F(x) no implica la existencia de una representación de la forma (7). Ya que en la práctica son raras las funciones de distribución continuas que no pueden representarse en la forma (7), no deben confundirse los términos ampliamente aceptados "variable aleatoria continua" y "distribución continua".

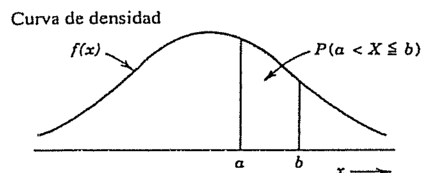


Figura 490. Ejemplo que ilustra la fórmula (9).

Ejemplo 5. Una distribución continua.

Sea X que tiene una función de densidad $f(x) = 0.75(1 - x^2)$ si $-1 \leqq x \leqq 1$ y cero en caso contrario. Encontrar la función de distribución. Encontrar las probabilidades $P(-\frac{1}{2} \leqq X \leqq \frac{1}{2})$ y $P(\frac{1}{4} \leqq X \leqq 2)$. Encontrar x tal que $P(X \leqq x) = 0.95$.

Solución. A partir de (7) se obtiene $F(x) = 0$ si $x \leqq -1$,

$$F(x) = 0.75 \int_{-1}^{x} (1 - v^2)\, dv = 0.5 + 0.75x - 0.25x^3 \qquad \text{if } -1 < x \leqq 1,$$

y $F(x) = 1$ si $x > 1$. Con base en ésto y (9) se obtiene

$$P(-\tfrac{1}{2} \leqq X \leqq \tfrac{1}{2}) = F(\tfrac{1}{2}) - F(-\tfrac{1}{2}) = 0.75 \int_{-1/2}^{1/2} (1 - v^2)\, dv = 68.75\%$$

(debido a que $P(-\frac{1}{2} \leqq X \leqq \frac{1}{2}) = P(-\frac{1}{2} < X \leqq \frac{1}{2})$ para una distribución continua) y

$$P(\tfrac{1}{4} \leqq X \leqq 2) = F(2) - F(\tfrac{1}{4}) = 0.75 \int_{1/4}^{1} (1 - v^2)\, dv = 31.64\%.$$

(Observar que el límite superior de integración es 1, no 2. ¿Por qué?) Finalmente,

$$P(X \leqq x) = F(x) = 0.5 + 0.75x - 0.25x^3 = 0.95.$$

Al simplificar algebraicamente se obtiene $3x - x^3 = 1.8$. Una solución es $x = 0.73$, aproximadamente. Trazar la gráfica de $f(x)$ y señalar $x = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, y 0.73, a fin de poder ver los resultados (las probabilidades) como áreas bajo la curva. También trazar la gráfica de $F(x)$. ∎

En los problemas de esta sección y en secciones ulteriores se incluyen más ejemplos de distribuciones continuas.

Problemas de la sección 23.4

1. Trazar las gráficas de la función de probabilidad $f(x) = x^2/30$ ($x = 1, 2, 3, 4$) y de la función de distribución.
2. Trazar las gráficas de f y F cuando $f(0) = f(3) = \frac{1}{8}$, $f(1) = f(2) = \frac{3}{8}$. ¿Es posible que f tenga valores positivos adicionales?
3. Trazar la gráfica de la densidad $f(x) = x^2/9$ si $0 \leqq x \leqq 3$ y cero en caso contrario, así como la gráfica de la función de distribución $F(x)$.

4. Trazar las gráficas de la función de distribución $F(x) = 0$ si $x \leqq 0$, $F(x) = 1 - e^{-2x}$ si $x > 0$, y de la densidad $f(x)$.
5. Trazar las gráficas de $F(x) = 0$ si $x \leqq 0$, $F(x) = 0.2x$ si $0 < x \leqq 5$, $F(x) = 1$ si $x > 5$, y de su densidad $f(x)$.
6. Trazar las gráficas de la densidad $f(x) = 0.4$ si $3 < x < 5.5$ y de la función de distribución.
7. En el problema 6, encontrar $P(0 \leqq X \leqq 4)$. Encontrar x tal que $P(X \leqq x) = \frac{1}{2}$.
8. Sea X el número de años transcurridos antes de que un tipo particular de máquina requiera ser reemplazada. Suponer que X tiene la función de probabilidad $f(1) = 0.1$, $f(2) = 0.2$, $f(3) = 0.2$, $f(4) = 0.2$, $f(5) = 0.3$. Trazar las gráficas de f y F. Encontrar la probabilidad de que la máquina no requiera ser reemplazada durante los tres primeros años.
9. Encontrar la probabilidad de que ninguno de los tres focos de un semáforo tengan que ser sustituidos durantes las primeras 1200 horas de operación si la vida útil X de un foco es una variable aleatoria con la densidad $f(x) = 6[0.25 - (x - 1.5)^2]$ cuando $1 \leqq x \leqq 2$ y $f(x) = 0$ en caso contrario, en donde x se mide en múltiplos de 1000 horas.
10. Suponer que ciertos tornillos tienen longitud $L = 200 + X$ mm, en donde X es una variable aleatoria con densidad $f(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2)$ si -1 x 1 y 0 en caso contrario. Determinar c de modo que con una probabilidad del 95% un tornillo tenga cualquier longitud entre $200 - c$ y $200 + c$. *Sugerencia.* Ver también el ejemplo 5.
11. Sea $f(x) = kx^2$ si $0 \leqq x \leqq 1$ y 0 en caso contrario. Encontrar k. Encontrar c_1 y c_2 tales que $P(X \leqq c_1) = 0.1$ y $P(X \leqq c_2) = 0.9$.
12. Suponer que en un proceso automático de vaciado de petróleo en barriles el contenido de un barril (en galones) es $Y = 50 + X$, donde X es una variable aleatoria con densidad $f(x) = 1 - |x|$ cuando $|x| \leqq 1$ y 0 cuando $|x| > 1$. Trazar las gráficas de $f(x)$ y $F(x)$. En un lote de 100 barriles, ¿aproximadamente cuántos contienen 50 galones o más? ¿Cuál es la probabilidad de que un barril contenga menos de 49.5 galones? ¿Y menos de 49 galones?
13. Sea X [milímetros] el grosor de las arandelas que produce una máquina. Suponer que X tiene la densidad $f(x) = kx$ si $1.9 < x < 2.1$ y 0 en caso contrario. Encontrar k. ¿Cuál es la probabilidad de que el grosor de una arandela esté entre 1.95 mm y 2.05 mm?
14. Considerar la variable aleatoria X = *Número de veces que un dado legal es lanzado hasta que se obtiene el primer 6*. Encontrar la función de probabilidad de X; demostrar que satisface (6).
15. Demostrar que $b < c$ implica $P(X \leqq b)$ $P(X \leqq c)$.
16. Sea X la razón de ventas a ganancias de cierta empresa. Suponer que X tiene la función de distribución $F(x) = 0$ si $x < 2$, $F(x) = (x^2 - 4)/5$ si $2 \leqq x < 3$ y $F(x) = 1$ si $x \geqq 3$. Encontrar y trazar la gráfica de la densidad. ¿Cuál es la probabilidad de que X esté entre 2.5 (40% de ganancia) y 5 (20% de ganancia)?
17. Si la vida útil de las chumaceras tiene la densidad $f(x) = ke^{-x}$ si $0 \leqq x \leqq 2$ y 0 en caso contrario, ¿cuál es el valor de k? ¿Cuál es la probabilidad $P(X \leqq 1)$?
18. Si el diámetro X de ejes tiene la densidad $f(x) = k$ si $119.9 \leqq x \leqq 120.1$ y 0 en caso contrario, ¿aproximadamente cuántos ejes defectuosos habrá en un lote de 500 si los ejes defectuosos son más delgados que 119.92 o más gruesos que 120.08?
19. Sea X una variable aleatoria que puede asumir todo valor real. ¿Cuáles son los complementos de los eventos $X \leqq b$, $X < b$, $X \geqq c$, $X > c$, $b \leqq X \leqq c$, $b < X \leqq c$?
20. Una caja contiene 5 tornillos derechos y 6 tornillos izquierdos. Se extraen al azar sin reemplazo dos tornillos. Sea X el número de tornillos izquierdos extraídos. Encontrar las probabilidades $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(1 < X < 2)$, $P(X \leqq 1)$, $P(X \geqq 1)$, $P(X > 1)$ y $P(0.5 < X < 10)$.

23.5 MEDIA Y VARIANCIA DE UNA DISTRIBUCIÓN

La función de distribución (y también la función de probabilidad o la densidad, respectivamente), determina por completo todas las propiedades de una variable aleatoria. Además, a partir de la función de distribución es posible calcular ciertas cantidades, denominadas **parámetros**, que expresan propiedades importantes de la distribución, como *ubicación central, dispersión*, asimetría, etc. En esta sección se analizarán la media y la variancia de una distribución, que son los dos parámetros más importantes en la práctica.

El valor *medio* o **media** de una distribución se denota por μ y se define por

$$(1)\quad \begin{array}{lll} \text{(a)} & \mu = \sum_j x_j f(x_j) & \text{(Distribución discreta)} \\ \text{(b)} & \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx & \text{(Distribución continua).} \end{array}$$

En (1a) la función $f(x)$ es la función de probabilidad de la variable aleatoria X considerada, y se suma sobre todos los valores posibles (ver la sección 23.4). En (1b) la función $f(x)$ es la densidad de X. La media también se denomina esperanza matemática de X y algunas veces se denota por $E(X)$. Por definición, se supone que la serie en (1a) converge absolutamente y que existe la integral de $|x|f(x)$ desde $-\infty$ hasta ∞. Si esto no se cumple, se dice que la distribución no tiene media; en las aplicaciones ingenieriles rara vez se presenta este caso.

Se dice que una distribución es **simétrica** con respecto a un número $x = c$ si para todo real x

$$(2)\qquad f(c + x) = f(c - x).$$

El estudiante puede demostrar el

Teorema 1 (Media de una distribución simétrica)

Si una distribución es simétrica con respecto a $x = c$ y tiene media μ, entonces $\mu = c$.

La **variancia** de una distribución se denota por σ^2 y se define por la fórmula

$$(3)\quad \begin{array}{lll} \text{(a)} & \sigma^2 = \sum_j (x_j - \mu)^2 f(x_j) & \text{(Distribución discreta)} \\ \text{(b)} & \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, dx & \text{(Distribución continua).} \end{array}$$

en donde, por definición, se supone que la serie en (3a) converge y que la integral en (3b) existe (tiene un valor finito).

En el caso de una distribución discreta, con $f(x) = 1$ en un punto y $f = 0$ en caso contrario, se tiene $\sigma^2 = 0$. Este caso carece de interés práctico. En cualquier otro caso,

$$(4)\qquad \sigma^2 > 0.$$

La raíz cuadrada positiva de la variancia se denomina **desviación estándar** y se denota por σ.

La variancia y la desviación estándar miden la dispersión de una distribución, como se ilustra en el ejemplo 2 a continuación del ejemplo 1.

Ejemplo 1. Media y variancia.

La variable aleatoria

X = *Número de caras en un solo lanzamiento de una moneda legal*

tiene los valores posibles $X = 0$ y $X = 1$, con probabilidades $P(X = 0) = \frac{1}{2}$ y $P(X = 1) = \frac{1}{2}$. A partir de (1a) se obtiene entonces el valor medio $\mu = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, y (3a) produce

$$\sigma^2 = (0 - \tfrac{1}{2})^2 \cdot \tfrac{1}{2} + (1 - \tfrac{1}{2})^2 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}.$$ ∎

Ejemplo 2. Distribución uniforme.

La distribución con la densidad

$$f(x) = \frac{1}{b - a} \quad \text{si} \quad a < x < b$$

y $f = 0$ en caso contrario se denomina **distribución uniforme** en el intervalo $a < x < b$. Por el teorema 1 o a partir de (1b) se encuentra que $\mu = (a + b)/2$, y (3b) produce la variancia

$$\sigma^2 = \int_a^b \left(x - \frac{a + b}{2}\right)^2 \frac{1}{b - a}\, dx = \frac{(b - a)^2}{12}.$$

En la figura 491 se muestran casos especiales que ilustran que la dispersión es grande si y sólo si σ^2 (y también σ) es grande.

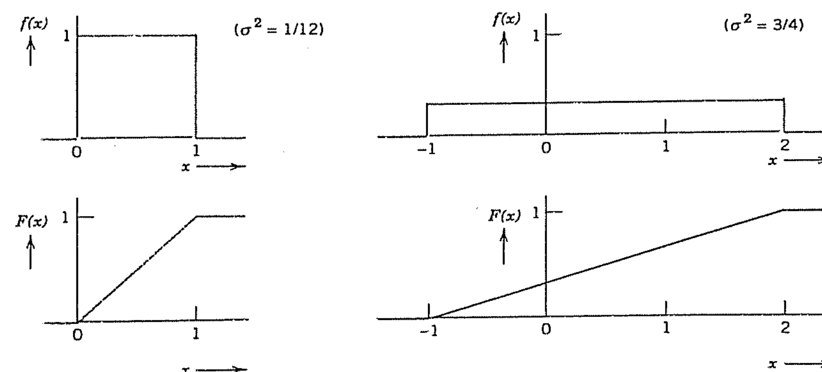


Figura 491. Distribuciones uniformes que tienen la misma media (0.5) pero variancias diferentes σ^2.

Transformación de la media y la variancia. A partir de una variable aleatoria X dada, a menudo se desea obtener una nueva variable aleatoria de la forma

$$X^* = c_1 X + c_2 \qquad (c_1 \neq 0) \tag{5}$$

en particular, una que tenga media 0 y variancia 1. (Un caso fundamental de esto se presentará en la sección 23.7). Entonces es necesario conocer la media y la variancia de X^*:

Teorema 2 (Transformación de la media y la variancia)

(a) *Si una variable aleatoria X tiene media μ y variancia σ^2, entonces X^* definida por (5) tiene media*

$$\mu^* = c_1\mu + c_2 \tag{6}$$

y variancia

$$\sigma^{*2} = c_1^2\sigma^2. \tag{7}$$

(b) *En particular, la* **variable aleatoria estandarizada** *Z correspondiente a X, definida por*

$$\boxed{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}} \tag{8}$$

tiene media 0 y variancia 1.

Demostración. Se demostrará (6) para el caso continuo, suponiendo primero que $c_1 > 1$. Para x y $x^* = c_1 x + c_2$ correspondientes, las densidades $f(x)$ de X y $f^*(x^*)$ de X^* cumplen la relación $f^*(x^*) = f(x)/c_1$, ya que a un pequeño intervalo de longitud Δx en el eje X corresponde la probabilidad $f(x)\,\Delta x$ (aproximadamente), y ésto debe ser igual a $f^*(x^*)\,\Delta x^*$, en donde $\Delta x^* = c_1\,\Delta x$ es la longitud del intervalo correspondiente sobre el eje X^*. Como $dx^*/dx = c_1$, $dx^* = c_1\,dx$, entonces se tiene $f^*(x^*)\,dx^* = f(x)\,dx$. Así,

$$\mu^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^* f^*(x^*)\,dx^* = \int_{-\infty}^{\infty}(c_1x + c_2)f(x)\,dx$$

$$= c_1\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx + c_2\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$$

La última integral es igual a 1 [ver (8), sección 23.4] y así se ha demostrado la fórmula (6). Como

$$x^* - \mu^* = (c_1x + c_2) - (c_1\mu + c_2) = c_1x - c_1\mu,$$

entonces la definición de la variancia produce

$$\sigma^{*2} = \int_{-\infty}^{\infty}(x^* - \mu^*)^2 f^*(x^*)\,dx^* = \int_{-\infty}^{\infty}(c_1x - c_1\mu)^2 f(x)\,dx = c_1^2\sigma^2,$$

con lo que se ha demostrado (7).

Si $c_1 < 0$, los resultados son los mismos, ya que se obtienen dos signos negativos adicionales, uno por cambiar la dirección de integración en x (observar que $x^* = -\infty$ corresponde a $x = \infty$) y el otro por $f^*(x^*) = f(x)/(-c_1)$: aquí $-c_1 > 0$ es necesario ya que las densidades son no negativas.

Para una variable discreta X la demostración es semejante.

(b) se obtiene al elegir $c_1 = 1/\sigma$ y $c_2 = -\mu/\sigma$ en (5) – (7). ∎

Esperanza, momentos. Para cualquier variable aleatoria X y cualquier función continua $g(X)$ definida para todo real X, la **esperanza matemática** de $g(X)$ se define como

(9)

(a) $$E(g(X)) = \sum_j g(x_j)f(x_j) \qquad (X \text{ discreta})$$

(b) $$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx \qquad (X \text{ continua})$$

en donde f en (9a) es la función de probabilidad y en (9b) es la densidad de X. Observar que para $g(X) = X$ con lo anterior se obtiene la media de X,

$$\boxed{\mu = E(X).} \tag{10}$$

Al tomar $g(X) = X^k$ ($k = 1, 2, \cdots$) en (9), se obtiene el **k-ésimo momento** de X, definido por

$$E(X^k) = \sum_j x_j^k f(x_j) \quad \text{y} \quad E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,dx, \tag{11}$$

respectivamente. Por último, al tomar $g(X) = (X - \mu)^k$ en (9) se obtiene el **k-ésimo momento central**

$$E([X - \mu]^k) = \sum_j (x_j - \mu)^k f(x_j) \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty}(x - \mu)^k f(x)\,dx, \tag{12}$$

respectivamente. Se observa que el segundo momento central ($k = 2$) es la variancia.

$$\boxed{\sigma^2 = E([X - \mu]^2).} \tag{13}$$

Para su utilización ulterior, el estudiante puede demostrar que

$$E(1) = 1. \tag{14}$$

Problemas de la sección 23.5

1. Encontrar la media y la variancia de una variable aleatoria discreta X cuya función de probabilidad es $f(0) = \frac{1}{4}$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(2) = \frac{1}{4}$.
2. Realizar la misma tarea que en el problema 1, cuando $f(0) = 0.512$, $f(1) = 0.384$, $f(2) = 0.096$, $f(3) = 0.008$.
3. Sea X, con densidad $f(x) = 2x$ si $0 \leq x \leq 1$ y 0 en caso contrario. Demostrar que la media y la variancia de X son 2/3 y 1/18, respectivamente.
4. Encontrar la media y la variancia de $Y = -4X + 5$, en donde X es la variable aleatoria del problema 3.
5. Encontrar la media y la variancia de X: *Al lanzar un dado legal, número que aparece en la cara superior de éste.*
6. Si al lanzar un dado legal Juan gana tantas monedas de 10 centavos como puntos tiene la cara superior del dado, ¿cuánto debe pagar Juan por juego a fin de que éste sea justo?
7. ¿Cuál es la ganancia diaria esperada si una pequeña tienda vende X guajolotes diarios con probabilidades $f(5) = 0.1$, $f(6) = 0.3$, $f(7) = 0.4$, $f(8) = 0.2$ y la ganancia por guajolote es de \$3.50?
8. Si la duración X (en horas) de cierto foco tiene la densidad $f(x) = 0.001e^{-0.001x}$ si $x > 0$ y 0 en caso contrario, ¿cuál es la vida media de tal foco?
9. Sea X cm el diámetro de los tornillos en una producción. Suponer que X tiene la densidad $f(x) = k(x - 0.9)(1.1 - x)$ si $0.9 < x < 1.1$, y 0 en caso contrario. Determinar k, trazar la gráfica de $f(x)$ y encontrar μ y σ^2.
10. Suponer que en el problema 9 se considera que un tornillo es defectuoso si su diámetro se desvía de 1.00 cm por más de 0.09 cm. Entonces, ¿qué porcentaje de tornillos defectuosos deben esperarse?
11. Una pequeña gasolinera es abastecida con gasolina cada sábado por la tarde. Suponer que su volumen X de ventas en decenas de miles de galones tiene la densidad de probabilidad $f(x) = 6x(1 - x)$ si $0 \leq x \leq 1$ y 0 en caso contrario. Determinar la media, la variancia y la variable estandarizada.
12. ¿Qué capacidad debe tener el tanque del problema 11 a fin de que la probabilidad de que el tanque se vacíe en una semana dada sea de 5%?
13. Demostrar (10), (13) y (14).
14. Demostrar que $E(X - \mu) = 0$ y $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$.
15. Sea X con densidad $f(x) = 2x$ si $0 < x < 1$ y 0 en caso contrario. Encontrar todos los momentos. Calcular σ^2 aplicando la fórmula del problema 14.
16. Demostrar que $E(ag(X) + bh(X)) = aE(g(X)) + bE(h(X))$; [$a$ y b son constantes].
17. Encontrar todos los momentos de la distribución uniforme sobre un intervalo $a \leq x \leq b$.
18. El **sesgo** γ de una variable aleatoria X se define como

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sigma^3} E([X - \mu]^3).}$$

Demostrar que para una distribución simétrica (cuyo tercer momento central existe), el sesgo es cero.

19. Determinar el sesgo de la distribución con densidad $f(x) = xe^{-x}$ cuando $x > 0$ y $f(x) = 0$ en caso contrario. Trazar la gráfica de $f(x)$.
20. La **función generadora de momentos** $G(t)$ de una variable aleatoria discreta o continua X se define como

$$G(t) = E(e^{tX}) = \sum_j e^{tx_j} f(x_j) \quad \text{y} \quad G(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx,$$

respectivamente. Suponiendo que es permisible la diferenciación bajo la sumatoria y la integral, demostrar que $E(X^k) = G^{(k)}(0)$, en particular $\mu = G'(0)$, en donde $G^{(k)}(t)$ es la k-ésima derivada de G con respecto a t.

23.6 DISTRIBUCIONES BINOMIAL, DE POISSON E HIPERGEOMÉTRICA

Ya se mencionó (en la sección 23.4) que en la práctica sólo se requiere un puñado de variables aleatorias especiales y sus distribuciones. En esta sección se analizarán tres distribuciones discretas particularmente importantes, y en la siguiente sección se estudiará la distribución continua más importante. (En el capítulo 24 se presentarán tres distribuciones continuas más, cuando se establezcan las pruebas.)

Distribución binomial

Se empezará con la distribución binomial, que se obtiene si se tiene interés en el número de veces que ocurre un evento A en n ejecuciones independientes de un experimento, suponiendo que en un solo ensayo la probabilidad de A es $P(A) = p$. Así, $q = 1 - p$ es la probabilidad de que en un solo ensayo no ocurra el evento A. Se supondrá que el experimento se ejecuta n veces y se considerará la variable aleatoria

$$X = \textit{Número de veces que ocurre } A.$$

Entonces X puede asumir los valores $0, 1, \cdots, n$, y se desea determinar las probabilidades correspondientes. Para este efecto se considerará cualquiera de estos valores, por ejemplo $X = x$, lo cual significa que en x de los n ensayos ocurre A y en $n - x$ ensayos no ocurre A. Lo anterior podría verse como sigue:

$$(1) \qquad \underbrace{AA \cdots A}_{x \text{ veces}}\ \underbrace{BB \cdots B}_{n-x \text{ veces}}.$$

Aquí $B = A^c$, es decir, A no ocurre. Se supone que los ensayos son independientes, es decir, que no se afectan entre sí. Entonces, como $P(A) = p$ y $P(B) = q$, se observa que a (1) corresponde la probabilidad

$$\underbrace{pp \cdots p}_{x \text{ veces}}\ \underbrace{qq \cdots q}_{n-x \text{ veces}} = p^x q^{n-x}.$$

Resulta evidente que (1) es meramente *una* manera de disponer x número de letras A y $n - x$ número de letras B, y que la probabilidad $P(X = x)$ es entonces igual a $p^x q^{n-x}$ multiplicado por la cantidad de arreglos diferentes de x número de letras A y $n - x$

número de letras B, como se concluye a partir del teorema 1 en la sección 23.2. Es posible numerar los n ensayos de 1 a n y elegir x de estos números correspondientes a aquellos ensayos en los que ocurre A. Como no importa el orden en que se escogen los x números, por (4a) de la sección 23.3 se observa que tales x números pueden elegirse de los n números en $\binom{n}{x}$ maneras distintas. Por tanto, la probabilidad $P(X = x)$ correspondiente a $X = x$ es igual a

$$(2) \qquad \boxed{f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}} \qquad (x = 0, 1, \cdots, n).$$

y $f(x) = 0$ para cualquier otro valor de x. Esta es la probabilidad de que en n ensayos independientes un evento A ocurra precisamente x veces, donde p es la probabilidad de ocurrencia de A en un solo ensayo y $q = 1 - p$. La distribución con la función de probabilidad (2) se denomina **distribución binomial** o *distribución de Bernoulli*. La ocurrencia de A se denomina *éxito*, la no ocurrencia se denomina *fracaso* y p se denomina *probabilidad de éxito en un solo ensayo*. En la figura 492 se muestran ejemplos ilustrativos de $f(x)$.

Si $p = q = 1/2$, entonces a partir de (2) simplemente se tiene

$$(2^*) \qquad \boxed{f(x) = \binom{n}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^n} \qquad (x = 0, 1, \cdots, n).$$

La distribución binomial tiene media (ver el problema 17)

$$(3) \qquad \boxed{\mu = np}$$

y variancia (ver el problema 18)

$$(4) \qquad \boxed{\sigma^2 = npq.}$$

Con respecto a tablas de la distribución binomial, consultar el apéndice 5 y la obra citada como referencia [G14].

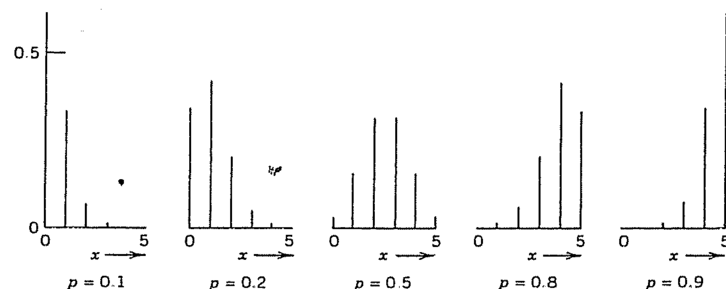


Figura 492. Función de probabilidad (2) de la distribución binomial para $n = 5$ y varios valores de p.

Ejemplo 1. Distribución binomial.

Calcular la probabilidad de obtener por lo menos dos "*Seis*" al lanzar 4 veces un dado legal.

Solución. $p = P(A) = P(\text{"Seis"}) = 1/6$, $q = 5/6$, $n = 4$. *Respuesta*:

$$P = f(2) + f(3) + f(4) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \binom{4}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right) + \binom{4}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4$$

$$= \frac{1}{6^4}(6 \cdot 25 + 4 \cdot 5 + 1) = \frac{171}{1296} = 13.2\%.$$

Distribución de Poisson

La distribución discreta con la función de probabilidad

$$(5) \qquad \boxed{f(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}} \qquad (x = 0, 1, \cdots)$$

se denomina **distribución de Poisson** en honor de S. D. Poisson (sección 17.5). En la figura 493 se muestra (5) para algunos valores de μ. Es posible demostrar que esta distribución se obtiene como el caso límite de la distribución binomial, si se hace $p \to 0$ y $n \to \infty$, de modo que la media $\mu = np$ tiende a un valor finito. La distribución de Poisson tiene media μ y variancia (ver el problema 19)

$$(6) \qquad \sigma^2 = \mu.$$

Ejemplo 2. Distribución de Poisson.

Si la probabilidad de producir un tornillo defectuoso es $p = 0.01$, ¿cuál es la probabilidad de que en un lote de 100 tornillos haya más de 2 defectuosos?

ENTRA FIGURA 493

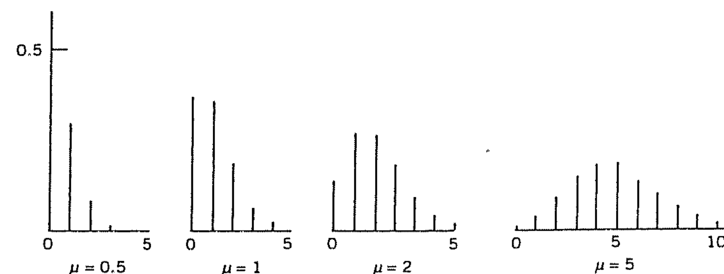


Figura 493. Función de probabilidad (5) de la distribución de Poisson para varios valores de μ.

Solución. Para el evento complementario A^c: *No más de 2 defectuosos* se calcula la aproximación de Poisson de la distribución binomial con $\mu = np = 1$.

$$P(A^c) = \binom{100}{0} 0.99^{100} + \binom{100}{1} 0.01 \cdot 0.99^{99} + \binom{100}{2} 0.01^2 \cdot 0.99^{98}$$

$$\approx e^{-1}\left(1 + 1 + \frac{1}{2}\right) = 91.97\%.$$

Así, $P(A) = 8.03\%$. Demostrar que con la distribución binomial se obtiene $P(A) = 7.94\%$, de modo que la aproximación de Poisson es bastante aceptable. ∎

Ejemplo 3. Distribución de Poisson.

Si en promedio 2 automóviles entran a un estacionamiento por minuto, ¿cuál es la probabilidad de que durante cualquier minuto dado entren al estacionamiento 4 o más automóviles?

Solución. Para comprender que la distribución de Poisson es un modelo de la situación, se supone que el minuto está dividido en muchos intervalos cortos; sea p la probabilidad (constante) de que un automóvil entre al estacionamiento durante cualquiera de tales intervalos, y se supone independencia de los eventos que suceden durante esos intervalos. Entonces se tiene una distribución binomial con n,muy grande y p muy pequeña, que es posible aproximar por medio de la distribución de Poisson con $\mu = np = 2$. Así, la probabilidad del evento complementario "3 *o menos automóviles entran al estacionamiento*" es

$$f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = e^{-2}\left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}\right) = 0.857.$$

Por tanto, la respuesta es 14% ∎

Muestreo con y sin reemplazo: distribución hipergeométrica

Muestreo con reemplazo significa extraer una cosa a la vez y regresarla al conjunto dado, mezclando éste antes de extraer la siguiente cosa (ver también la sección 23.2). Lo anterior garantiza independencia de los ensayos y conduce a la **distribución binomial**. En efecto, si una caja contiene N cosas, por ejemplo, tornillos, de los cuales M son defectuosos, entonces la probabilidad de extraer un tornillo defectuoso en un ensayo es

$$p = \frac{M}{N}.$$

Por tanto, al extraer *con reemplazo* una muestra de n tornillos, la probabilidad de obtener precisamente x tornillos defectuosos es [ver (2)]

$$\text{(7)} \qquad f(x) = \binom{n}{x}\left(\frac{M}{N}\right)^x\left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-x} \qquad (x = 0, 1, \cdots, n).$$

Al **muestrear sin reemplazo**, en donde los tornillos extraídos no se regresan a la caja, la probabilidad mencionada es

$$\text{(8)} \qquad f(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad (x = 0, 1, \cdots, n).$$

Esta distribución con la función de probabilidad (8) se denomina **distribución hipergeométrica.**[7]

Para comprobar la proposición primero se observa que, por (4a) en la sección 23.3, existen

(a) $\binom{N}{n}$ maneras diferentes de elegir n cosas de N,

(b) $\binom{M}{x}$ maneras diferentes de elegir x defectuosos de M,

(c) $\binom{N-M}{n-x}$ maneras diferentes de elegir $n - x$ no defectuosos de $N - M$.

y que cada manera en (b) combinada con cada manera en (c) proporciona el número total de maneras mutuamente excluyentes de combinar x defectuosos en n extracciones sin reemplazo. Dado que (a) es el número total de resultados y se extrae al azar, cada una de tales maneras tiene la probabilidad $1/\binom{N}{n}$. Con base en ésto, se concluye (8). ∎

La distribución hipergeométrica tiene media

$$\text{(9)} \qquad \mu = n\frac{M}{N}$$

y variancia

$$\text{(10)} \qquad \sigma^2 = \frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}.$$

Ejemplo 4. Muestreo con y sin reemplazo.

De una caja que contiene 10 empaques, de los cuales tres son defectuosos, se desea extraer muestras aleatorias de dos empaques. Encontrar la función de probabilidad de la variable aleatoria

X = *Número de defectuosos en la muestra.*

[7]Porque la función generadora de momentos (ver el problema 20, sección 23.5) de esta distribución puede representarse en términos de la función hipergeométrica.

Solución. Se tiene $N = 10$, $M = 3$, $N - M = 7$, $n = 2$. Para muestreo con reemplazo, (7) produce

$$f(x) = \binom{2}{x}\left(\frac{3}{10}\right)^x\left(\frac{7}{10}\right)^{2-x}, \qquad f(0) = 0.49, \quad f(1) = 0.42, \quad f(2) = 0.09.$$

Para muestreo sin reemplazo es necesario aplicar (8), con lo que se encuentra

$$f(x) = \binom{3}{x}\binom{7}{2-x}\Big/\binom{10}{2}, \qquad f(0) = f(1) = \frac{21}{45} \approx 0.47, \quad f(2) = \frac{3}{45} \approx 0.07.$$

Si N, M y N – M son grandes en comparación con n, entonces no importa demasiado si se muestrea con o sin reemplazo, y en este caso la distribución hipergeométrica puede aproximarse por medio de la distribución binomial (con $p = M/N$), que es algo más sencilla.

Por tanto, al muestrear de una población indefinidamente grande (**"población infinita"**), *es posible usar la distribución binomial, sin importar si se muestrea con o sin reemplazo.*

Problemas de la sección 23.6

1. Cuatro monedas legales se lanzan simultáneamente. Encontrar la función de probabilidad de la variable aleatoria X = *Número de caras* y calcular las probabilidades de no obtener ninguna cara y de obtener precisamente 1 cara, por lo menos 1 cara, no más de 3 caras.
2. Si la probabilidad de acertar en un blanco es 10% y se dispara 10 veces de manera independiente, ¿cuál es la probabilidad de acertar por lo menos una vez en el blanco?
3. En el problema 2, si la probabilidad de acertar fuese 5% y se disparara 20 veces, entonces la probabilidad de acertar por lo menos una vez en el blanco ¿sería menor que, igual a o mayor que la del problema 2? Primero adivinar, luego calcular la respuesta.
4. Suponer que un conmutador telefónico maneja 300 llamadas en promedio durante una hora pico, y que es capaz de efectuar cuando mucho 10 conexiones por minuto. Aplicar la distribución de Poisson para estimar la probabilidad de que el conmutador esté sobresaturado durante un minuto dado. (Usar la tabla 6 del apéndice 5.)
5. Sea $p = 1\%$ la probabilidad de que un foco de cierto tipo falle en una prueba de 24 horas. Encontrar la probabilidad de que una señal que consta de 10 de tales focos permanezca encendida 24 horas sin que ningún foco falle.
6. Suponer que el 3% de los tornillos fabricados por una máquina son defectuosos, en donde éstos ocurren al azar durante la producción. Si los tornillos se empacan en cajas de 50, ¿cuál es la aproximación de Poisson de la probabilidad de que una caja dada contenga $x = 0, 1, \cdots, 5$ tornillos defectuosos?
7. Suponer que en la producción de resistores de radio de 50 ohms los artículos no defectuosos son aquéllos cuya resistencia está entre 45 y 55 ohms y la probabilidad de que un resistor sea defectuoso es de 0.2%. Los resistores se venden en lotes de 100, con la garantía de que ninguno es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote dado no se cumpla esta garantía? (Usar la distribución de Poisson.)
8. Suponer que cierto tipo de cinta magnética contiene, en promedio, 2 defectos por cada 100 metros. ¿Cuál es la probabilidad de que un rollo de 300 metros de longitud (a) contenga x defectos, (b) no contenga defectos?
9. En experimentos clásicos efectuados en 1910, E. Rutherford y H. Geiger demostraron que el número de partículas alfa emitidas por segundo en un proceso radiactivo es una variable aleatoria X que tiene una distribución de Poisson. Si X tiene una media de 0.5, ¿cuál es la probabilidad de observar dos o más partículas durante cualquier segundo dado?
10. Un proceso de manufactura de tornillos se verifica cada hora inspeccionando n tornillos elegidos al azar de entre todos los tornillos producidos durante esa hora. Si uno o más tornillos son defectuosos, el proceso se detiene y revisa cuidadosamente. ¿Cuán grande debe ser n si el fabricante desea que la probabilidad de que el proceso se detenga cuando el 10% de los tornillos producidos sean defectuosos sea aproximadamente de 95%? (Suponer independencia de la calidad de cualquier artículo con respecto a la calidad de los otros.)
11. Sea X el número de automóviles por minuto que pasan por cierto punto de alguna carretera entre las 8 hrs y las 10 hrs de un domingo. Suponer que X tiene una distribución de Poisson con media 5. Encontrar la probabilidad de observar 3 o menos automóviles durante cualquier minuto dado.
12. Una caja de cartón contiene 20 fusibles, 5 de los cuales son defectuosos. Encontrar la probabilidad de que, si de la caja se elige al azar sin reemplazo una muestra de 3 fusibles, x fusibles de la muestra sean defectuosos.
13. Suponer que una prueba de percepción extrasensorial consiste en identificar (en cualquier orden) 3 cartas elegidas al azar de un mazo de 13 cartas. Encontrar la probabilidad de que sólo por azar, la persona (a) no identifique correctamente ninguna carta, y que identifique correctamente (b) una carta, (c) 2 cartas, (d) 3 cartas.
14. Un distribuidor vende ligas de goma en paquetes de 100 y garantiza que cuando mucho el 10% son defectuosas. Un consumidor controla cada paquete mediante la extracción sin reemplazo de 10 ligas. Si la muestra no contiene ligas defectuosas, el consumidor acepta el paquete. En caso contrario, lo rechaza. Encontrar la probabilidad de que en este proceso el consumidor rechace un paquete que contiene 10 ligas defectuosas (de modo que sigue cumpliendo la garantía).
15. **(Distribución multinomial)** Suponer que un ensayo puede dar por resultado precisamente uno de k eventos mutuamente excluyentes $A_1, \cdots, A_k$ con probabilidades $p_1, \cdots, p_k$ respectivamente, en donde $p_1 + \cdots + p_k = 1$. Suponer que se ejecutan n ensayos independientes. Demostrar que la probabilidad de obtener x_1 A_1's, $\cdots$, x_k A_k's es

$$f(x_1, \cdots, x_k) = \frac{n!}{x_1! \cdots x_k!} p_1^{x_1} \cdots p_k^{x_k}$$

en donde $0 \leq x_j \leq n, j = 1, \cdots, k$, y $x_1 + \cdots + x_k = n$. La distribución que tiene esta función de probabilidad se denomina *distribución multinomial*.

16. Aplicando el teorema del binomio, demostrar que la distribución binomial tiene la función generadora de momentos (ver el problema 20, sección 23.5)

$$G(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx}\binom{n}{x}p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(pe^t)^x q^{n-x} = (pe^t + q)^n.$$

17. Usar el problema 16 y la expresión $p + q = 1$ para demostrar (3).
18. Demostrar (4). *Sugerencia.* Usar la función generadora de momentos del problema 16.
19. Demostrar que la distribución de Poisson tiene la función generadora de momentos

$$G(t) = e^{-\mu}e^{\mu e^t}$$

y demostrar (6).

20. Demostrar (9). *Sugerencia.* Demostrar que $x\binom{M}{x} = M\binom{M-1}{x-1}$. Usar (14) en la sección 23.3.

23.7 DISTRIBUCIÓN NORMAL

Al pasar de distribuciones discretas a continuas, en esta sección se analizará la distribución normal. Ésta es la distribución continua más importante porque en aplicaciones muchas variables aleatorias son **variables aleatorias normales** (es decir, poseen una distribución normal), son aproximadamente normales o es posible transformarlas en variables aleatorias normales de una manera relativamente sencilla. Además la distribución normal es una aproximación útil de distribuciones más complicadas, y también ocurre en las comprobaciones de varias pruebas estadísticas.

La **distribución normal** o *distribución de Gauss* se define como la distribución con densidad

$$\text{(1)} \qquad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad (\sigma > 0).$$

Aquí, μ es la media. La curva de $f(x)$ es simétrica con respecto a $x = \mu$ porque el exponente contiene a $(x - \mu)^2$. Cambiar μ corresponde a desplazar la curva a otra posición (trasladarla), y para $\mu = 0$ es simétrica con respecto a la ordenada, como se muestra en la figura 494. Las curvas en la figura 494 se denominan curvas acampanadas y poseen un pico en $x = 0$ (o en $x = \mu$ cuando son trasladadas). σ^2 es la variancia, y se observa que para σ^2 pequeña se obtiene un pico alto y pendientes pronunciadas, mientras que con σ^2 creciente la curva se vuelve cada vez más plana y la densidad se "dispersa" más y más, en concordancia con el hecho de que la variancia mide la dispersión.

Función de distribución. A partir de la densidad (1) se obtiene la función de distribución $F(x)$ de la distribución normal al integrar desde $-\infty$ hasta x [ver (7), sección 23.4], es decir,

$$\text{(2)} \qquad F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v-\mu}{\sigma}\right)^2} dv.$$

Así, por (9) en la sección 23.4, la probabilidad de que una variable aleatoria normal X asuma cualquier valor en algún intervalo $a < x \leqq b$ es

$$\text{(3)} \qquad P(a < X \leqq b) = F(b) - F(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{b} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v-\mu}{\sigma}\right)^2} dv.$$

La integral en (2) no puede integrarse aplicando ninguno de los métodos del cálculo, aunque ha sido tabulada debido a que se requiere con bastante frecuencia. Entonces, si lo anterior se efectuara para muchas μ y σ, la tabla sería voluminosa y poco práctica. Por fortuna, basta tabular la función de distribución de la variable aleatoria normal estandarizada $Z = (X - \mu)/\sigma$ con media 0 y variancia 1 [ver (8), sección 23.5], que es

$$\text{(4)} \qquad \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-u^2/2}\, du \qquad \text{(Fig. 495).}$$

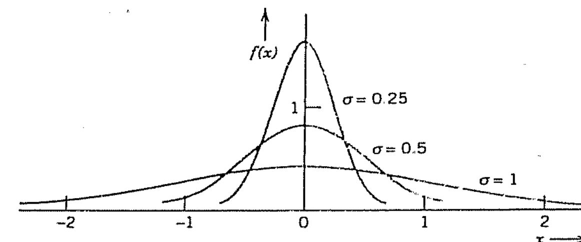


Figura 494. Densidad (1) de la distribución normal con μ = 0 para varios valores de σ.

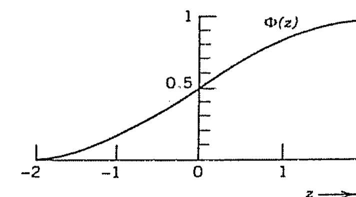


Figura 495. Función de distribución Φ(z) de la distribución normal con media 0 y variancia 1.

En la tabla A7 del apéndice 5 se proporcionan valores de $\Phi(z)$.

Al comparar los exponentes en (2) y en (4) se observa que para obtener $F(x)$ en términos de $\Phi(z)$ es necesario hacer

$$\frac{v-\mu}{\sigma} = u. \qquad \text{Entonces} \qquad \frac{dv}{\sigma} = du$$

y $v = x$ da el nuevo límite superior de integración $u = (x - \mu)/\sigma$:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} e^{-\mu^2/2}\, \sigma\, du.$$

σ se elimina y la expresión en el miembro derecho es igual a (4), en donde $z = (x - \mu)/\sigma$:

$$\text{(5)} \qquad F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

A partir de esta importante fórmula y (3) se obtiene otra fórmula importante:

$$(6) \qquad P(a < X \leqq b) = F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

En particular, si $a = \mu - \sigma$ y $b = \mu + \sigma$, entonces el miembro derecho es igual a $\Phi(1) - \Phi(-1)$; a $a = \mu - 2\sigma$ y $b = \mu + 2\sigma$ corresponde el valor $\Phi(2) - \Phi(-2)$, etc. Al usar la tabla A7 en el apéndice 5, entonces se encuentra (figura 496)

$$(7) \qquad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad P(\mu - \sigma < X \leqq \mu + \sigma) \approx 68\%, \\ &\text{(b)} \quad P(\mu - 2\sigma < X \leqq \mu + 2\sigma) \approx 95.5\%, \\ &\text{(c)} \quad P(\mu - 3\sigma < X \leqq \mu + 3\sigma) \approx 99.7\%. \end{aligned}$$

Por tanto, es posible esperar que un gran número de valores observados de una variable aleatoria normal X esté distribuido como sigue:

(a) Aproximadamente 2/3 de los valores estarán entre $\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$.
(b) Aproximadamente 95% de los valores estarán entre $\mu - 2\sigma$ y $\mu + 2\sigma$
(c) Aproximadamente 99.75% de los valores estarán entre $\mu - 3\sigma$ y $\mu + 3\sigma$.

Esto también puede expresarse como sigue.

Un valor que se desvía más de σ de μ ocurrirá aproximadamente una vez en 3 ensayos. Un valor que se desvía más de 2σ o 3σ de μ ocurrirá aproximadamente una vez en 20 o 400 ensayos, respectivamente. En términos prácticos, lo anterior significa que todos los valores estarán entre $\mu - 3\sigma$ y $\mu + 3\sigma$; estos dos números se denominan **límites de las tres sigmas**. De manera semejante se obtiene

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad P(\mu - 1.96\sigma < X \leqq \mu + 1.96\sigma) = 95\%, \\ &\text{(b)} \quad P(\mu - 2.58\sigma < X \leqq \mu + 2.58\sigma) = 99\%, \\ &\text{(c)} \quad P(\mu - 3.29\sigma < X \leqq \mu + 3.29\sigma) = 99.9\%. \end{aligned}$$

ENTRA FIGURA 496

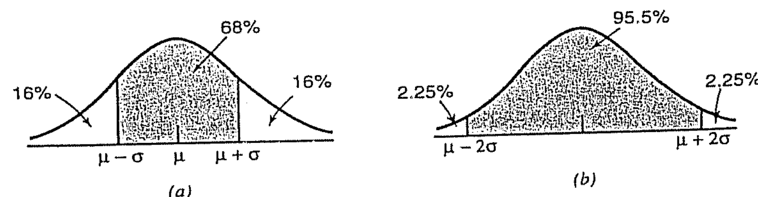


Figura 496. Ilustración de la fórmula (7).

Uso de tablas normales. Los siguientes ejemplos típicos deben ayudar al estudiante a comprender el uso práctico de las tablas A7 y A8 del apéndice 5.

Ejemplo 1. Para una variable aleatoria normal X con media 0 y variancia 1, encontrar las siguientes probabilidades

(a) $P(X \leqq 2.44)$, (b) $P(X \leqq -1.16)$, (c) $P(X \geqq 1)$, (d) $P(2 \leqq X \leqq 10)$.

Solución. Como $\mu = 0$ y $\sigma2 = 1$, los valores deseados pueden obtenerse directamente de la tabla A7:

(a) 0.9927, (b) 0.1230, (c) $1 - P(X \leqq 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$ [see (7), Sec. 23.2],
(d) $\Phi(10) = 1.0000$ (why?), $\Phi(2) = 0.9772$, $\Phi(10) - \Phi(2) = 0.0228$. ∎

Ejemplo 2. Calcular las probabilidades en el ejemplo 1 para una X normal con media 0.8 y variancia 4.

Solución. Por (6) y la tabla A7 se obtiene

(a) $F(2.44) = \Phi\left(\frac{2.44 - 0.80}{2}\right) = \Phi(0.82) = 0.7939$
(b) $F(-1.16) = \Phi(-0.98) = 0.1635$
(c) $1 - P(X \leqq 1) = 1 - F(1) = 1 - \Phi(0.1) = 0.4602$
(d) $F(10) - F(2) = \Phi(4.6) - \Phi(0.6) = 1 - 0.7257 = 0.2743$. ∎

Ejemplo 3. Sea X normal con media 0 y variancia 1. Determinar una constante c tal que

(a) $P(X \geqq c) = 10\%$, (b) $P(X \leqq c) = 5\%$,
(c) $P(0 \leqq X \leqq c) = 45\%$, (d) $P(-c \leqq X \leqq c) = 99\%$.

Solución. Por la tabla A8 en el apéndice 5 se obtiene

(a) $1 - P(X \leqq c) = 1 - \Phi(c) = 0.1$, $\Phi(c) = 0.9$, $c = 1.282$
(b) $c = -1.645$
(c) $\Phi(c) - \Phi(0) = \Phi(c) - 0.5 = 0.45$, $\Phi(c) = 0.95$, $c = 1.645$
(d) $c = 2.576$. ∎

Ejemplo 4. Sea X normal con media −2 y variancia 0.25. Determinar c tal que

(a) $P(X \geqq c) = 0.2$ (b) $P(-c \leqq X \leqq -1) = 0.5$
(c) $P(-2 - c \leqq X \leqq -2 + c) = 0.9$ (d) $P(-2 - c \leqq X \leqq -2 + c) = 99.6\%$.

Solución. Usando la tabla A8 en el apéndice 5 se obtienen los siguientes resultados.

(a) $1 - P(X \leqq c) = 1 - \Phi\left(\frac{c+2}{0.5}\right) = 0.2$,

$\Phi(2c + 4) = 0.8$, $2c + 4 = 0.842$, $c = -1.579$

(b) $\Phi\left(\frac{-1+2}{0.5}\right) - \Phi\left(\frac{-c+2}{0.5}\right) = 0.9772 - \Phi(4-2c) = 0.5,$

$\Phi(4-2c) = 0.4772,\ 4-2c = -0.057,\ c = 2.03$

(c) $\Phi\left(\frac{-2+c+2}{0.5}\right) - \Phi\left(\frac{-2-c+2}{0.5}\right)$

$= \Phi(2c) - \Phi(-2c) = 0.9,\ 2c = 1.645,\ c = 0.823$

(d) $\Phi(2c) - \Phi(-2c) = 99.6\%,\ 2c = 2.878,\ c = 1.439.$ ∎

Ejemplo 5.

Suponer que se requiere que las placas de hierro de una producción tengan cierto espesor, y que el trabajo de máquina es realizado por una conformadora. En cualquier caso, los productos industriales difieren ligeramente entre sí debido a las propiedades del material, y el comportamiento de las máquinas y herramientas utilizadas muestra ligeras variaciones aleatorias provocadas por pequeñas perturbaciones imposibles de predecir. Por consiguiente, es posible considerar el grosor X [mm] de las placas como una variable aleatoria. Se supone que para cierta condición la variable X es normal con media $\mu = 10$ mm y desviación estándar $\sigma = 0.02$ mm. Se desea determinar el porcentaje de placas defectuosas a esperar, suponiendo que las placas defectuosas son (a) placas más delgadas que 9.97 mm, (b) placas más gruesas que 10.05 mm, (c) placas que se desvían más de 0.03 mm con respecto a 10 mm. (d) ¿Cómo deben elegirse los números $10-c$ y $10+c$ a fin de asegurar que el porcentaje esperado de placas defectuosas no sea mayor que 5%? (e) ¿Cómo cambia el porcentaje de placas defectuosas en el inciso (d) si μ se desplaza de 10 mm a 10.01 mm?

Solución. Usando la tabla A7 en el apéndice 5 y (6), se obtienen las siguientes soluciones.

(a) $P(X \leqq 9.97) = \Phi\left(\frac{9.97-10.00}{0.02}\right) = \Phi(-1.5) = 0.0668 \approx 6.7\%$

(b) $P(X \geqq 10.05) = 1 - P(X \leqq 10.05) = 1 - \Phi\left(\frac{10.05-10.00}{0.02}\right)$

$= 1 - \Phi(2.5) = 1 - 0.9938 \approx 0.6\%$

(c) $P(9.97 \leqq X \leqq 10.03) = \Phi\left(\frac{10.03-10.00}{0.02}\right) - \Phi\left(\frac{9.97-10.00}{0.02}\right)$

$= \Phi(1.5) - \Phi(-1.5) = 0.866.$ *Respuesta.* $1 - 0.8664 = 13\%$.

(d) Por (8a) se obtiene $c = 1.96\sigma = 0.039$. *Respuesta.* 9.961 y 10.039 mm.

(e) $P(9.961 \leqq X \leqq 10.039) = \Phi\left(\frac{10.039-10.010}{0.02}\right) - \Phi\left(\frac{9.961-10.010}{0.02}\right)$

$= \Phi(1.45) - \Phi(-2.45) = 0.9265 - 0.0071 \approx 92\%;$

por tanto, la respuesta es 8%, y se observa que este ligero cambio en el ajuste de la muela de la herramienta provoca un incremento considerable del porcentaje de placas defectuosas. ∎

Transformación de variables aleatorias normales. Estas variables permanecen normales bajo una traslación y un cambio de escala. De hecho, usando (5) el lector puede demostrar el

Teorema 1 (Transformación)

Si X es normal con media μ y variancia σ^2, entonces $X^* = c_1X + c_2$ ($c_1 \neq 0$) es normal con media $\mu^* = c_1\mu + c_2$ y variancia $\sigma^{*2} = c_1^2\sigma^2$.

Aproximación de la distribución binomial con n grande. Si n es grande, entonces la función de probabilidad de la distribución binomial (sección 23.6)

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \qquad (x = 0, 1, \cdots, n) \tag{9}$$

implica grandes coeficientes y potencias binomiales, de modo que se vuelve muy inconveniente. Es de gran importancia práctica (y teórica) que en este caso la distribución normal proporciona una aproximación aceptable de la distribución binomial, en concordancia con el siguiente teorema, que es uno de los teoremas más importantes en toda la teoría de probabilidad.

Teorema 2 (Teorema del límite de De Moivre y Laplace)

Para n grande,

$$f(x) \sim f^*(x) \qquad (x = 0, 1, \cdots, n)$$

en donde f está definida por (9),

$$f^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}} e^{-z^2/2}, \qquad z = \frac{x-np}{\sqrt{npq}} \tag{10}$$

es la densidad de la distribución normal con media $\mu = np$ y variancia $\sigma^2 = npq$ (la media y la variancia de la distribución normal), *y el símbolo* ~ (que se lee como **asintóticamente igual**) *significa que la razón de ambos miembros tiende a* 1 *cuando n tiende a ∞. Además, para enteros no negativos cualesquiera a y b ($> a$),*

$$P(a \leqq X \leqq b) = \sum_{x=a}^{b} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \sim \Phi(\beta) - \Phi(\alpha), \tag{11}$$

$$\alpha = \frac{a - np - 0.5}{\sqrt{npq}}, \qquad \beta = \frac{b - np + 0.5}{\sqrt{npq}}.$$

Una demostración de este teorema se encuentra en la obra citada en el apéndice 1 como referencia [G3]. La demostración indica que el término 0.5 en α y β es una corrección provocada por el cambio de una distribución discreta a una distribución continua.

Problemas de la sección 23.7

1. Sea X normal con media 80 y variancia 9. Encontrar $P(X > 83)$, $P(X < 81)$, $P(X < 80)$ y $P(78 < X < 82)$.
2. Sea X normal con media 105 y variancia 25. Encontrar $P(X \leqq 112.5)$, $P(X > 100)$, $P(110.5 < X < 111.25)$.
3. Sea X normal con media 14 y variancia 4. Determinar c tal que $P(X \leqq c) = 95\%$, $P(X \leqq c) = 5\%$, $P(X \leqq c) = 99.5\%$
4. Sea X normal con media 3.6 y variancia 0.01. Encontrar c tal que $P(X \leqq c) = 50\%$, $P(X > c) = 10\%$, $P(-c < X - 3.6 \leqq c) = 99.9\%$.
5. ¿Qué porcentaje de placas de hierro defectuosas es posible esperar en el inciso (c) del ejemplo 5 si se utiliza una mejor conformadora de modo que $\sigma = 0.01$ mm?

6. En el ejemplo 5, inciso (c), ¿qué valor debe tener σ a fin de que el porcentaje de placas defectuosas se reduzca a 6%?
7. Si la vida útil X de una batería de automóvil está distribuida normalmente con una media de 4 años y desviación estándar de 1 año y el fabricante desea garantizar la batería por tres años, ¿qué porcentaje de baterías tendrá que reemplazar el fabricante bajo la garantía?
8. ¿Cuál es la probabilidad de obtener por lo menos 2048 caras si una moneda se lanza 4040 veces y la caras y las cruces son equiprobables? (Consultar la tabla 23.1 en la sección 23.2.)
9. En las especificaciones de cierto trabajo se solicitan tornillos con un diámetro de 0.280 ± 0.002 cm. Si los diámetros de los tornillos fabricados por una empresa están distribuidos normalmente con $\mu = 0.279$ y $\sigma = 0.001$, ¿qué porcentaje de estos tornillos satisface las especificaciones?
10. Un productor vende focos eléctricos en cajas de cartón de 1000 focos. Usar (11) para encontrar la probabilidad de que cualquier caja dada contenga no más del 1% de focos defectuosos, suponiendo que el proceso de producción es un experimento de Bernoulli con $p = 1\%$ (= probabilidad de que cualquier foco dado sea defectuoso).
11. Un fabricante sabe por experiencia que la resistencia de los resistores que produce es normal con media $\mu = 150$ ohms y desviación estándar $\sigma = 5$ ohms. ¿Qué porcentaje de los resistores tendrá resistencias entre 148 ohms y 152 ohms? ¿Y entre 140 ohms y 160 ohms?
12. La resistencia a la ruptura X [kg] de cierto bloque de plástico está distribuida normalmente con una media de 1250 kg y desviación estándar de 55 kg. ¿Cuál es la carga máxima de modo que pueda esperarse que se rompa no más del 5% de los bloques?
13. Un fabricante produce sobres aéreos cuyo peso es normal con una media $\mu = 1.950$ gramos y desviación estándar $\sigma = 0.025$ gramos. Los sobres se venden en lotes de 1000. ¿Cuántos sobres en un lote pesarán más de 2 gramos?

14. Demostrar el teorema 1.
15. Deducir las fórmulas en (8) usando la tabla normal.
16. **(Ley de los grandes números de Bernoulli)** En un experimento, sea un evento A que tiene probabilidad p $(0 < p < 1)$, y sea X el número de veces que ocurre A en n ensayos independientes. Demostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ dado, se tiene

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leqq \epsilon\right) \to 1 \qquad \text{cuando } n \to \infty.$$

17. Demostrar que $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.
18. Considerar $\Phi^2(\infty)$ e introducir coordenadas polares en la integral doble para demostrar que

$$\Phi(\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2}\, du = 1. \tag{12}$$

19. Demostrar que la curva de (1) tiene dos puntos de inflexión correspondientes a $x = \mu \pm \sigma$.
20. Usar (12) y aplicar integración por partes para demostrar que σ en (1) es la desviación estándar de la distribución normal.

23.8 DISTRIBUCIONES DE VARIAS VARIABLES ALEATORIAS

En esta última sección del capítulo se analizarán las distribuciones de probabilidad de varias variables aleatorias, según ocurren en experimentos en los que se observan

varias cantidades, como el contenido de carbono X y la dureza Y del acero; la cantidad de fertilizante X y la cosecha Y; la estatura X_1, el peso X_2 y la presión arterial X_3 de las personas; etc. Otra razón de este análisis es que tales distribuciones también desempeñan un papel importante en la justificación de los métodos estadísticos del capítulo 24.

Si se observan dos cantidades X y Y, en cada ensayo se obtiene un par de valores $X = x$, $Y = y$, en forma abreviada, $(X, Y) = (x, y)$, que puede graficarse como un punto en el plano XY. Así, para una sola variable aleatoria X, la distribución de probabilidad es determinada por la función de distribución $F(x) = P(X\ x)$. De manera semejante, para dos variables aleatorias X, Y, que también se denominan variable **aleatoria bidimensional** (X, Y), la distribución de probabilidad es determinada por la **función de distribución**

$$F(x, y) = P(X \leqq x,\ Y \leqq y). \tag{1}$$

Esta es la probabilidad de que (X, Y) asuma ***cualquier*** par de valores en la región azul (que se extiende hasta $-\infty$ hacia la izquierda y hacia abajo) en la figura 497. Determina la distribución de probabilidad de manera única porque en analogía con la fórmula $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$, ahora se tiene para cualquier rectángulo (ver el problema 16)

$$\begin{aligned} P(a_1 < X \leqq b_1,\ a_2 < Y \leqq b_2) \\ = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2). \end{aligned} \tag{2}$$

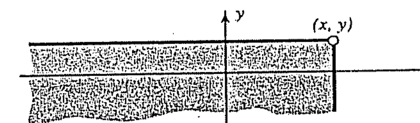


Figura 497. Fórmula (1).

Distribuciones discretas bidimensionales

Definición (Variable aleatoria y distribución discretas bidimensionales)

Una variable aleatoria (X, Y) y su distribución se denominan **discretas** si (X, Y) puede asumir sólo una cantidad finita o cuando mucho una infinidad numerable de pares de valores (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\cdots$ con probabilidades positivas, mientras que la probabilidad para cualquier dominio que no contiene a ninguno de tales valores de (X, Y) es cero. ∎

Sea (x_i, y_j) cualquiera de estos pares y sea $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$ (aquí se admite que p_{ij} puede ser 0 para ciertos pares de subíndices i, j). Así, la **función de probabilidad** $f(x, y)$ de (X, Y) se define como

(3) $f(x, y) = p_{ij}$ if $x = x_i, y = y_j$ y $f(x, y) = 0$ en caso contrario

aquí, $i = 1, 2, \cdots$ y $j = 1, 2, \cdots$ de manera independiente. En analogía con (3), sección 23.4, ahora para la función de distribución se tiene la fórmula

(4)
$$F(x, y) = \sum_{x_i \leqq x} \sum_{y_j \leqq y} f(x_i, y_j),$$

y en vez de (6), sección 23.4, se tiene la condición

(5)
$$\sum_i \sum_j f(x_i, y_j) = 1.$$

Ejemplo 1. Distribución discreta bidimensional.

Si de manera simultánea se lanzan una moneda de 10 centavos y una moneda de 5 centavos y se consideran los eventos

X = Número de caras que se obtienen en la moneda de 10 centavos.
Y = Número de caras que se obtienen en la moneda de 5 centavos.

entonces X y Y pueden asumir los valores 0 o 1, y la función de probabilidad es

$$f(0, 0) = f(1, 0) = f(0, 1) = f(1, 1) = \tfrac{1}{4}, \quad f(x, y) = 0 \text{ en caso contrario}$$ ∎

Distribuciones continuas bidimensionales

Definición (Variable aleatoria y distribución continuas bidimensionales)

Una variable aleatoria (X, Y) y su distribución se denominan continuas si la función de distribución correspondiente $F(x, y)$ puede definirse por medio de una doble integral

(6)
$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(x^*, y^*)\, dx^*\, dy^*$$

en donde la "**densidad**" f de la distribución es continua (excepto posiblemente en un número finito de curvas) y no negativa. ∎

Por (6), para la probabilidad de que (X, Y) asuma cualquier valor en un rectángulo (figura 498) se obtiene la fórmula

(7)
$$P(a_1 < X \leqq b_1, a_2 < Y \leqq b_2) = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x, y)\, dx\, dy.$$

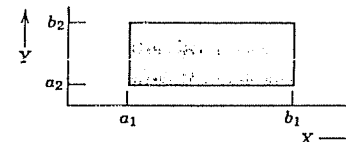


Figura 498. Concepto de distribución bidimensional.

Ejemplo 2. Distribución uniforme bidimensional en un rectángulo.

Sea R el rectángulo $\alpha_1 < x \leqq \beta_1$, $\alpha_2 < y \leqq \beta_2$. La densidad (ver la figura 499)

(8) $f(x, y) = 1/k$ si (x, y) es en R, $\quad f(x, y) = 0$ en caso contrario

define la **distribución uniforme** *en el rectángulo R*; aquí k es el área de R, es decir, $k = (\beta_1 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_2)$ La función de distribución se muestra en la figura 500. ∎

Distribuciones marginales de una distribución discreta

En el caso de una variable aleatoria discreta (X, Y), con función de probabilidad $f(x, y)$, puede pedirse la probabilidad $P(X = x, Y \text{ arbitraria})$ de que X asuma un valor x, en tanto que Y puede asumir cualquier valor, el cual se ignora. Esta probabilidad es una función de x, por ejemplo $f_1(x)$, y se tiene la fórmula

(9)
$$\boxed{f_1(x) = P(X = x, Y \text{ arbitrario}) = \sum_y f(x, y)}$$

en donde se suman todos los valores de $f(x, y)$ que no sean 0 para esa x. Resulta evidente que $f_1(x)$ es la función de probabilidad de la distribución de probabilidad de una sola variable aleatoria. Esta distribución se denomina **distribución marginal de X con respecto a la distribución bidimensional dada** y tiene la función de distribución

(10)
$$F_1(x) = P(X \leqq x, Y \text{ arbitrario}) = \sum_{x^* \leqq x} f_1(x^*).$$

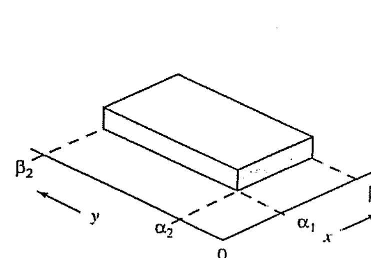


Figura 499. Función de densidad de probabilidad (8) de la distribución uniforme.

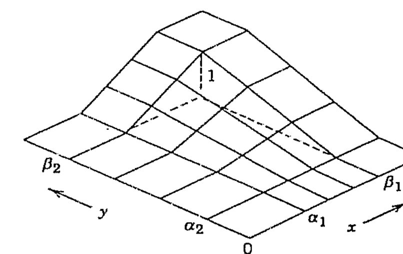


Figura 500. Función de distribución de la distribución uniforme definida por (8).

De manera semejante, la función de probabilidad

$$(11)\qquad \boxed{f_2(y) = P(X \text{ arbitrario}, Y = y) = \sum_x f(x, y)}$$

determina la **distribución marginal** *de Y con respecto a la distribución bidimensional dada.* En (11) se suman todos los valores de $f(x, y)$ que no son 0 para la y correspondiente. La función de distribución de esta distribución es

$$(12)\qquad F_2(y) = P(X \text{ arbitrario}, Y \leqq y) = \sum_{y^* \leqq y} f_2(y^*).$$

Resulta evidente que ambas distribuciones marginales de una variable aleatoria discreta (X, Y) son discretas.

Ejemplo 3. Distribuciones marginales de una variable aleatoria discreta bidimensional. Suponer que se desea extraer con reemplazo tres cartas de una baraja de bridge y observar la variable aleatoria discreta bidimensional (X, Y), en donde

X = *Número de reinas.*

Y = *Número de reyes o ases.*

Dado que la baraja de 52 cartas contiene cuatro reinas, cuatro reyes y cuatro ases, entonces la probabilidad de obtener una reina al extraer una sola carta es $4/52 = 1/13$, y un rey o un as se obtienen con probabilidad $8/52 = 2/13$. Por tanto, (X, Y) tiene la función de probabilidad

$$f(x, y) = \frac{3!}{x!\, y!\, (3 - x - y)!} \left(\frac{1}{13}\right)^x \left(\frac{2}{13}\right)^y \left(\frac{10}{13}\right)^{3-x-y} \qquad (x + y \leqq 3)$$

y $f(x, y) = 0$ en caso contrario. En la tabla 23.2 se muestran los valores de $f(x, y)$ en el centro y, en los márgenes derecho e inferior, los valores de las funciones de probabilidad $f_1(x)$ y $f_2(y)$ de las distribuciones marginales de X y Y, respectivamente. ∎

Tabla 23.2
Valores de las funciones de probabilidad $f(x, y)$, $f_1(x)$, $f_2(y)$ en la extracción con reemplazo de tres cartas de una baraja de bridge, en donde X es el número de reinas extraídas y Y es el número de reyes o ases extraídos.

x \ y	0	1	2	3	$f_1(x)$
0	$\frac{1000}{2197}$	$\frac{600}{2197}$	$\frac{120}{2197}$	$\frac{8}{2197}$	$\frac{1728}{2197}$
1	$\frac{300}{2197}$	$\frac{120}{2197}$	$\frac{12}{2197}$	0	$\frac{432}{2197}$
2	$\frac{30}{2197}$	$\frac{6}{2197}$	0	0	$\frac{36}{2197}$
3	$\frac{1}{2197}$	0	0	0	$\frac{1}{2197}$
$f_2(y)$	$\frac{1331}{2197}$	$\frac{726}{2197}$	$\frac{132}{2197}$	$\frac{8}{2197}$	

Distribuciones marginales de una distribución continua

De manera semejante, en el caso de una variable aleatoria continua (X, Y) con densidad $f(x, y)$ es posible considerar

$$(X \leqq x,\ Y \text{ arbitrario}) \quad \text{o} \quad (X \leqq x,\ -\infty < Y < \infty).$$

Resulta evidente que la probabilidad correspondiente es

$$F_1(x) = P(X \leqq x,\ -\infty < Y < \infty) = \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x^*, y)\, dy \right) dx^*.$$

Al hacer

$$(13)\qquad \boxed{f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy,}$$

es posible escribir

$$(14)\qquad F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(x^*)\, dx^*.$$

$f_1(x)$ es la densidad y $F_1(x)$ es la función de distribución de la **distribución marginal de** *X con respecto a la distribución continua dada.*

De manera semejante, la función

$$(15)\qquad \boxed{f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx}$$

se denomina *densidad* y

$$(16)\qquad F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(y^*)\, dy^* = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y^*)\, dx\, dy^*$$

se denomina *función de distribución de la* **distribución marginal** *de Y con respecto a la distribución bidimensional dada.* Se observa que ambas distribuciones marginales de una distribución continua con continuas.

Independencia de las variables aleatorias

Se dice que las dos variables aleatorias X y Y de una distribución bidimensional (X, Y) con función de distribución $F(x, y)$ son independientes si

$$(17)\qquad \boxed{F(x, y) = F_1(x) F_2(y)}$$

se cumple para todo (x, y). En caso contrario, se dice que son **dependientes.**

Suponer que X y Y son ambas discretas o ambas continuas. Entonces X y Y son independientes si y sólo si las funciones de probabilidad o densidades correspondientes $f_1(x)$ y $f_2(y)$ satisfacen

(18) $$f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$$

para todo (x, y); ver el problema 18. Por ejemplo, las variables en la tabla 23.2 son dependientes. Las variables X = *Número de caras que se obtienen al lanzar una moneda de* 10 *centavos*, Y = *Número de caras que se obtienen al lanzar una moneda de 5 centavos* al lanzar una moneda de 10 centavos y una de 5 centavos pueden asumir los valores 0 o 1 y son independientes.

Los conceptos de independencia y dependencia pueden extenderse a las n variables aleatorias de una distribución n-dimensional $(X^1, \cdots, X_n)$ con función de distribución

$$F(x_1, \cdots, x_n) = P(X_1 \leqq x_1, \cdots, X_n \leqq x_n).$$

Se dice que estas variable aleatorias son **independientes** si para todo $(x_1, \cdots, x_n)$ se tiene que

(19) $$F(x_1, \cdots, x_n) = F_1(x_1)F_2(x_2) \cdots F_n(x_n),$$

en donde $F_j(x_j)$ es la función de distribución de la distribución marginal de X_j, es decir,

$$F_j(x_j) = P(X_j \leqq x_j, X_k \text{ arbitrario}, k \neq j).$$

En caso contrario, se dice que las variables aleatorias son **dependientes.**

Funciones de variables aleatorias

Sea (X, Y) una variable aleatoria con función de probabilidad o densidad $f(x, y)$ y función de distribución $F(x, y)$, y sea $g(x, y)$ cualquier función continua que está definida para todo (x, y) y no es constante. Entonces $Z = g(X, Y)$ es también una variable aleatoria. Por ejemplo, si se lanzan dos dados y X es el número que aparece en la cara superior del primer dado y Y es el número que aparece en la cara superior del segundo dado, entonces $Z = X + Y$ es la suma de estos dos números (ver la figura 489 en la sección 23.4).

Si $(X_1, \cdots, X_n)$ es una variable aleatoria n-dimensional y $g(x_1, \cdots, x_n)$ es una función continua que está definida para todo $(x_1, \cdots, x_n)$ y no es constante, entonces $Z = g(X_1, \cdots, X_n)$ es también una variable aleatoria.

En el caso de una variable aleatoria discreta (X, Y), es posible obtener la función de probabilidad $f(x)$ de $Z = g(X, Y)$ sumando todas las $f(x, y)$ para las cuales $g(x, y)$ es igual al valor del z considerado; así,

(20) $$f(z) = P(Z = z) = \sum_{g(x,y)=z}\sum f(x, y).$$

La función de distribución de Z es

(21) $$F(z) = P(Z \leqq z) = \sum_{g(x,y)\leqq z}\sum f(x, y)$$

en donde se suman todos los valores de $f(x, y)$ para los cuales $g(x, y) \leqq z$.

En el caso de una variable aleatoria continua (X, Y), de manera semejante se tiene

(22) $$F(z) = P(Z \leqq z) = \iint_{g(x,y)\leqq z} f(x, y)\, dx\, dy$$

en donde para cada z se integra sobre la región $g(x, y) \leqq z$ en el plano xy.1

Adición de medias y variancias

El número

(23) $$E(g(X, Y)) = \begin{cases} \sum_x \sum_y g(x, y)f(x, y) & [(X, Y) \text{ discreta}] \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)f(x, y)\, dx\, dy & [(X, Y) \text{ continua}] \end{cases}$$

se denomina **esperanza matemática** o, simplemente, **esperanza** de $g(X, Y)$. Aquí se ha supuesto que la serie doble converge absolutamente y que la integral de $|g(x, y)| f(x, y)$ sobre el plano xy existe (es finita). Debido a que la sumatoria y la integración son procesos lineales, entonces por (23) se tiene

(24) $$E(ag(X, Y) + bh(X, Y)) = aE(g(X, Y)) + bE(h(X, Y)).$$

Un importante caso especial es $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$, y por inducción se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1 (Adición de medias)

La media (esperanza) de una suma de variables aleatorias es igual a la suma de las medias (esperanzas), es decir

(25) $$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n).$$

Además, fácilmente se obtiene el

Teorema 2 (Multiplicación de medias)

La media (esperanza) del producto de variables aleatorias **independientes** *es igual al producto de las medias (esperanzas), es decir*

(26) $$E(X_1X_2 \cdots X_n) = E(X_1)E(X_2) \cdots E(X_n).$$

Demostración. Si X y Y son variable aleatorias independientes (ambas discretas o ambas continuas), entonces $E(XY) = E(X)E(Y)$. De hecho, en el caso discreto se tiene

$$E(XY) = \sum_x \sum_y xyf(x, y) = \sum_x xf_1(x) \sum_y yf_2(y) = E(X)E(Y),$$

y en el caso continuo la demostración de la relación es semejante. La extensión a n variables aleatorias independientes proporciona (26), y entonces se ha demostrado el teorema 2. ∎

A continuación se analizará la **adición de variancias.** Sea $Z = X + Y$ y sean μ y σ^2 la media y la variancia de Z. Primero se tiene (ver el problema 14 en los problemas de la sección 23.5)

$$\sigma^2 = E([Z - \mu]^2) = E(Z^2) - [E(Z)]^2.$$

Por (24) se observa que el primer término del miembro derecho es igual a

$$E(Z^2) = E(X^2 + 2XY + Y^2) = E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2),$$

y para el segundo término del miembro derecho, por el teorema 1 se obtiene

$$[E(Z)]^2 = [E(X) + E(Y)]^2 = [E(X)]^2 + 2E(X)E(Y) + [E(Y)]^2.$$

Al sustituir estas expresiones en la fórmula de $\sigma 2$ se tiene

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 + E(Y^2) - [E(Y)]^2$$
$$+ 2[E(XY) - E(X)E(Y)].$$

Por el problema 14, sección 23.5, se observa que la expresión en el primer renglón del miembro derecho es la suma de las variancias de X y Y, que se denotan por σ_1^2 y σ_2^2, respectivamente. La cantidad

(27) $$\boxed{\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y)}$$

se denomina **covariancia** de X y Y. Por consiguiente, el resultado es

(28) $$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_{XY}.$$

Si X y Y son independientes, entonces $E(XY) = E(X)E(Y)$; por tanto, $\sigma XY = 0$, y

(29) $$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2.$$

La extensión a más de dos variables conduce al

Teorema 3 (Adición de variancias)

La variancia de la suma de variables aleatorias ***independientes*** *es igual a la suma de las variancias de estas variables.*

¡Precaución! En las numerosas aplicaciones de los teoremas 1 y 3 siempre debe recordarse que el teorema 3 se cumple sólo para variables **independientes**.

Aquí termina el capítulo 23 sobre teoría de probabilidad. Casi todos los conceptos, métodos y distribuciones especiales analizados en este capítulo desempeñarán un papel fundamental en el siguiente capítulo, que trata sobre métodos de **inferencia estadística**, es decir, conclusiones de muestras a poblaciones, cuyas propiedades desconocidas se desea conocer e intentar descubrir al considerar propiedades idóneas de muestras que han sido obtenidas.

Problemas de la sección 23.8

1. Sea $f(x, y) = k$ cuando $8 \leqq x \leqq 12$ y $0 \leqq y \leqq 2$, y cero en todos los demás casos. Encontrar k. Encontrar $P(X \leqq 11, 1 \leqq Y \leqq 1.5)$ y $P(9 \leqq X 13, Y \leqq 1)$.
2. Encontrar $P(X > 2, Y > 2)$ y $P(X \leqq 1, Y \leqq 1)$ si (X, Y) tiene la densidad $f(x, y) = 1/8$ si $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x + y \leqq 4$.
3. Sea (X, Y) con la densidad $f(x, y) = kxy$ si $0 \leqq x \; 1$, $0 \leqq y \leqq 1$, y 0 en caso contrario. Encontrar k y $P(X > 0.5, Y > 0.5)$.
4. Encontrar la densidad de la distribución marginal de X en el problema 2.
5. Encontrar la densidad de la distribución marginal de Y en la figura 499.
6. Si ciertas hojas de papel para envolver tienen un peso medio de 10 g cada una, con una desviación estándar de 0.05 g, ¿cuáles son el peso medio y la desviación estándar de un paquete de 10 000 hojas?
7. Un ensamble de cuatro engranes se arma con espaciadores entre aquéllos. El espesor medio de los engranes es de 5.020 cm con una desviación estándar de 0.003 cm. El grosor medio de los espaciadores es de 0.040 cm con una desviación estándar de 0.002 cm. Encontrar la media y la desviación estándar de las unidades ensambladas consistentes en cuatro engranes y tres espaciadores, todos seleccionados al azar.
8. Si el peso de ciertos recipientes (vacíos) tiene una media de 2 lb y una desviación estándar de 0.1 lb, y si el relleno de los recipientes tiene un peso medio de 75 lb y una desviación estándar de 0.8 lb, ¿cuáles son el peso medio y la desviación estándar de los recipientes rellenos?
9. ¿Cuáles son el espesor medio y la desviación estándar de ciertos núcleos de transformador, si cada uno consta de 50 capas de láminas metálicas y 49 capas de papel aislante, y si las láminas metálicas tienen un espesor medio de 0.5 mm, cada una con una desviación estándar de 0.05 mm, y las capas de papel tienen una media de 0.05 mm, cada una con una desviación estándar de 0.02 mm?
10. Sean X [cm] y Y [cm] los diámetros de una pasador y un orificio, respectivamente. Suponer que (X, Y) tiene la densidad

$$f(x, y) = 2\,500 \text{ si } 0.99 < x < 1.01,\ 1.00 < y < 1.02$$

y 0 en caso contrario. (a) Encontrar las distribuciones marginales. (b) ¿Cuál es la probabilidad de que un pasador elegido al azar se ajuste a un orificio cuyo diámetro es de 1.00?

11. Un dispositivo electrónico consta de dos componentes. Sean X y Y [meses] los lapsos de tiempo que transcurren hasta que se presenta una falla de la primera y segunda componentes, respectivamente. Suponer que (X, Y) tiene la densidad de probabilidad

$$f(x, y) = 0.01e^{-0.1(x+y)} \quad \text{si } x > 0 \text{ y } y > 0$$

y 0 en caso contrario. (a) X y Y, ¿son independientes o dependientes? (b) Encontrar las densidades de las distribuciones marginales. (c) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera componente tenga una vida útil de 10 meses o más?

12. Proporcionar un ejemplo de dos distribuciones discretas diferentes que tengan las mismas distribuciones marginales.

13. Demostrar que las variables aleatorias con las densidades $f(x, y) = x + y$ y $g(x, y) = (x + 1/2)(y + 1/2)$ si $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$, tienen las mismas distribuciones marginales.

14. Sea (X, Y) que tiene la densidad $f(x, y) = k$ si $x^2 + y^2 < 1$ y 0 en caso contrario. Determinar k. Encontrar las densidades de las distribuciones marginales. Encontrar la probabilidad $P(X^2 + Y^2) < 1/2)$.

15. Encontrar $P(X > Y)$ cuando (X, Y) tiene la densidad $f(x, y) = e^{-(x+y)}$ si $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ y 0 en caso contrario.

16. Demostrar (2).

17. Sea (X, Y) que tiene la función de probabilidad $f(0, 0) = f(1, 1) = 1/8$, $f(0, 1) = f(1, 0) = 3/8$. ¿Son independientes X y Y?

18. Demostrar la proposición que implica a (18).

19. Aplicar los teoremas 1 y 3 para obtener las fórmulas para la media y la variancia de la distribución binomial.

20. Usar el teorema 1 para obtener la fórmula para la media de la distribución hipergeométrica. ¿Es posible aplicar el teorema 3 para obtener la variancia de esa distribución?

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 23

1. Proporcionar ejemplos de experimentos aleatorios en los que se tengan casos equiprobables y otros en los que no.
2. ¿Cuál es la diferencia entre eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes?
3. ¿Cuál es la diferencia entre los conceptos de permutación y combinación?
4. Enumerar todas las permutaciones y todas las combinaciones de las letras a, b, c, d tomadas dos a la vez.
5. ¿Qué significa probabilidad condicional? Proporcionar un ejemplo típico.
6. Si $P(A) = P(B)$ y $A \subseteq B$, ¿es posible que $A \neq B$?
7. Si $E \neq S$ (= el espacio muestral), ¿es posible que $P(E) = 1$?
8. ¿Qué distribuciones corresponden al muestreo con reemplazo y sin reemplazo?
9. ¿En qué condiciones prácticamente no hay diferencia si se muestrea con reemplazo o sin reemplazo?
10. ¿En qué casos la distribución de Poisson es una aproximación aceptable de la distribución binomial?
11. ¿Qué sabe sobre la aproximación de la distribución binomial por la distribución normal?
12. ¿Qué significa la expresión "límites de las tres sigmas"?
13. Escribir la fórmula de la función de distribución $F(x)$ de una variable aleatoria normal arbitraria en términos de la función de distribución de la distribución normal estandarizada. ¿Por qué ésto reviste importancia práctica?

14. ¿Cómo está relacionada la densidad de una variable aleatoria continua con la función de distribución?
15. ¿Qué propiedad de una distribución caracteriza la variancia? ¿Y la media?
16. ¿Cuál es la suma de las probabilidades de todos los valores posibles de una variable aleatoria discreta? ¿Cuál es el análogo de ésto para una variable aleatoria continua?
17. ¿Es posible que la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta asuma una infinidad de valores posibles? (Justificar la respuesta.)
18. Si X es una variable aleatoria continua, ¿cuál es el valor de $P(X = a)$, en donde a es cualquier número dado?
19. ¿En qué clase de experimento se tiene una variable aleatoria discreta y en cuál una variable aleatoria continua?
20. ¿En qué condiciones se cumple la fórmula de adición de variancias? ¿Y la fórmula de adición de medias?

21. De un lote de 50 tornillos, de los cuales están defectuosos 10, se extraen al azar tres tornillos. Encontrar la probabilidad del evento que todos los tres tornillos extraídos no estén defectuosos, suponiendo que se extrae (a) con reemplazo, (b) sin reemplazo.
22. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma de 17 o 18 al lanzar una vez tres dados legales?
23. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma divisible entre 4 al lanzar una vez dos dados legales?
24. De una caja que contiene 10 tornillos izquierdos y 20 derechos se extraen sin reemplazo 4 tornillos. ¿Cuál es la probabilidad de extraer por lo menos un tornillo derecho?
25. Una caja contiene 50 tornillos, de los cuales 5 están defectuosos. Encontrar la función de probabilidad de la variable aleatoria X = *Número de tornillos defectuosos que se obtienen al extraer sin reemplazo dos tornillos*, y calcular sus valores.
26. Encontrar los valores de la función de distribución en el problema 25.
27. Encontrar la función de probabilidad de X = *Número de veces que se lanza un dado legal hasta que se obtiene el primer número par.*
28. En el problema 27, encontrar la media.
29. Si X tiene la función de probabilidad $f(4) = 0.2$, $f(6) = 0.5$, $f(8) = 0.1$, $f(10) = 0.2$, ¿cuál es la probabilidad de que X asuma cualquier valor mayor que 6? ¿Y menor que 6? ¿Y menor que 4?
30. En un lote de 12 artículos, 3 son defectuosos. (a) Encontrar el número de muestras diferentes de 3 artículos. Encontrar el número de muestras de 3 artículos que (b) no contienen ningún artículo defectuoso y que contienen (c) 1 artículo defectuoso, (d) 2 artículos defectuosos, (e) 3 artículos defectuosos.
31. ¿Cuántos registros de automóviles debe verificar la policía en un accidente en que el automovilista se dio a la fuga si un testigo reporta que la placa del automóvil en cuestión era KDP7 y no puede recordar los dos últimos dígitos de la placa pero está seguro de que los tres eran distintos?
32. Si se dispone de 6 tintas diferentes, ¿de cuántas maneras es posible elegir dos colores para hacer un trabajo de impresión? ¿Y cuatro colores?
33. Calcular 5! aplicando a fórmula de Stirling y encontrar los errores absoluto y relativo.
34. ¿De cuántas maneras distintas es posible elegir un comité de 6 personas de un grupo de 20 personas?
35. Si se sabe que un proceso de producción de tornillos se realiza correctamente, con una fracción de defectuosos de 3%, y el proceso se inspecciona tomando muestras de dos tornillos, ¿cuál es la probabilidad de que no haya defectuosos? ¿Y de que haya un defectuoso? ¿Y dos defectuosos?

36. Sea $f(x) = ke^{-x}$ cuando $x > 0$, $f(x) = 0$ cuando $x < 0$. Encontrar k. Trazar las gráficas de f y de F.
37. Sea $f(x) = kx^2$ cuando $0 \leqq x \leqq 1$ y 0 en caso contrario. Encontrar k. Encontrar el número c tal que $P(X \leqq c) = 95\%$.
38. Encontrar μ y σ^2 de la distribución que tiene función de probabilidad $f(1) = 0.3$, $f(2) = 0.4$, $f(3) = 0.3$.
39. Encontrar la media y la variancia de la distribución que tiene la densidad $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.
40. Si el millaje X (en miles de millas) de cierto tipo de neumático tiene la densidad $f(x) = 0.05^{e-0.05x}$ $(x > 0)$, ¿qué millaje es de esperar alcanzar? ¿Cuál es la probabilidad de que el neumático dure por lo menos 30 000 millas?
41. Si X tiene la densidad $f(x) = 0.5x$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ y 0 en caso contrario, ¿cuáles son la media y la variancia de $X^* = -2X + 5$?
42. Encontrar el sesgo de la distribución con densidad $f(x) = 2(1 - x)$ si $0 < x < 1$, $f(x) = 0$ en caso contrario.
43. Sea $p = 2\%$ la probabilidad de que cierto tipo de foco falle en una prueba de 24 horas. Encontrar la probabilidad de que una señal que consta de 15 de tales focos funcione durante 24 horas sin que falle ningún foco.
44. Suponer que el 4% de los tornillos producidos por una máquina están defectuosos, en donde éstos ocurren al azar durante la producción. Si los tornillos se empacan en cajas de 100, ¿cuál es la aproximación de Poisson de la probabilidad de que una caja dada contenga x tornillos defectuosos?
45. Demostrar que la función de distribución de la distribución de Poisson satisface $F(\infty) = 1$.
46. Encontrar la probabilidad de que una variable aleatoria X asuma cualquier valor en el intervalo $\mu - \sigma \leqq X \leqq \mu + \sigma$ si X tiene (a) una distribución binomial con $n = 8$ y $p = 0.5$, (b) la distribución normal.
47. Si la resistencia a la ruptura de ciertas cuerdas es normal con media 100 kg y desviación estándar de 10 kg, ¿cuál es la carga máxima con la que es posible esperar que se rompa cuando mucho el 1% de las cuerdas?
48. ¿Cuál es la probabilidad de obtener por lo menos 12 012 caras si una moneda se lanza 24 000 veces y la ocurrencia de caras y cruces es equiprobable? (Ver la tabla 23.1 en la sección 23.2).
49. Si la vida útil de unos neumáticos es normal con media de 25 000 km y variancia de 25 000 000 km², ¿cuál es la probabilidad de que uno de tales neumáticos dure por lo menos 30 000 km? ¿Y por lo menos 35 000 km?
50. Si el peso de unos sacos de cemento es normal con media de 50 kg y desviación estándar de 1 kg, ¿cuál es la probabilidad de que 100 sacos pesen más de 5030 kg?

Resumen del capítulo 23

Teoría de probabilidad

Un *experimento aleatorio*, brevemente denominado **experimento**, es un proceso en el que el *resultado* depende del "azar" (efectos de factores desconocidos). Ejemplos son los juegos de azar con dados o cartas, la medición de la dureza del acero, la observación de las condiciones climatológicas, el conteo del número de llamadas telefónicas en una oficina, o el registro del número de accidentes en una ciudad. (Por tanto, el término "experimento" es usado aquí

en un sentido mucho más amplio que en el lenguaje común.) Los resultados se consideran como puntos (elementos) de un conjunto S, denominado **espacio muestral**, cuyos subconjuntos se denominan **eventos.** Para los eventos E se define una **probabilidad** $P(E)$ por medio de los axiomas (sección 23.2)

$$0 \leqq P(E) \leqq 1$$

$$(1) \qquad P(S) = 1$$

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots \qquad (E_j \cap E_k = \varnothing).$$

El complemento E^c de E tiene entonces la probabilidad

$$(2) \qquad P(E^C) = 1 - P(E).$$

La **probabilidad condicional** de un evento B bajo la condición de que ocurra un evento A es

$$(3) \qquad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

A y B se denominan **independientes** si

$$(4) \qquad P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

A un experimento se asocia una **variable aleatoria** X; se trata de una función definida sobre S cuyos valores son números reales, y X es tal que la probabilidad $P(X = a)$ de que X asuma cualquier valor a y la probabilidad $P(a < X \leqq b)$ de que X asuma cualquier valor en cualquier intervalo están definidas (sección 23.4). La **distribución de probabilidad** de X está determinada por la función de distribución (sección 23.4)

$$(5) \qquad F(x) = P(X \leqq x).$$

Existen dos clases de variables aleatorias que son importantes desde un punto de vista práctico: aquéllas del tipo **discreto**, que aparecen si se cuenta algo (artículos defectuosos, clientes en un banco, etc.) y las de tipo **continuo**, que aparecen si se mide algo (longitud, velocidad, temperatura, peso, etc.).

Una variable aleatoria discreta tiene la **función de probabilidad**

$$(6) \qquad f(x) = P(X = x).$$

Sus **media** μ **y variancia** σ^2 son (sección 23.5)

$$(7) \qquad \mu = \sum_j x_j f(x_j) \qquad \text{y} \qquad \sigma^2 = \sum_j (x_j - \mu)^2 f(x_j)$$

en donde los x_j son los valores para los cuales X tiene una probabilidad positiva. Variables y distribuciones aleatorias discretas importantes son la **binomial**, la **de Poisson** y la **hipergeométrica** (sección 23.6).

Una variable aleatoria continua tiene densidad

$$(8) \qquad f(x) = F'(x) \qquad \text{[ver (5)].}$$

Su media y variancia son (sección 23.5)

$$(9) \qquad \mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx.$$

De bastante importancia es la **distribución normal**, cuya densidad es (sección 23.7)

$$(10) \qquad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^2$$

y cuya función de distribución es (sección 23.7; tablas A7 y A8 en el apéndice 5)

$$(11) \qquad F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Una **variable aleatoria bidimensional** (X, Y) ocurre si de manera simultánea se observan dos cantidades (por ejemplo, la estatura X y el peso Y de las personas). Su función de distribución es (sección 23.8)

$$(12) \qquad F(x, y) = P(X \leqq x,\ Y \leqq y).$$

X y Y tienen las funciones de distribución (sección 23.8)

$$(13) \quad F_1(x) = P(X \leqq x,\ Y \text{ arbitrario}), \quad F_2(y) = P(x \text{ arbitrario},\ Y \leqq y);$$

sus distribuciones se denominan **distribuciones marginales**. Si tanto X como Y son discretas, entonces (X, Y) tiene función de probabilidad

$$f(x, y) = P(X = x,\ Y = y).$$

Si X y Y son continuas, entonces (X, Y) tiene densidad $f(x, y)$.

Capítulo

24

Estadística matemática

En **teoría de probabilidad** se establecieron modelos matemáticos de procesos y sistemas que son afectados por el "azar". En estadística matemática, o brevemente, **estadística**, estos modelos se confrontan contra la realidad a fin de determinar si son suficientemente fidedignos y exactos para efectos prácticos. Lo anterior se lleva a cabo extrayendo **muestras**, inspeccionando sus propiedades y después obteniendo conclusiones concernientes a propiedades de la población de la cual fueron extraídas las muestras. Estas conclusiones son verdaderas no de manera absoluta, sino con una probabilidad (usualmente elevada) que puede elegirse (por ejemplo, 95%) o por lo menos calcularse. Tales conclusiones resultan de métodos de inferencia estadística que serán desarrollados en este capítulo, usando la teoría de probabilidad como fundamentación de este enfoque.

Tales conclusiones se utilizan luego como base para hacer predicciones, tomar decisiones y llevar a cabo acciones, por ejemplo, para predecir el clima, analizar el mercado o planificar el tránsito vehicular, en el desarrollo de planes económicos de producción, en la compra de materia prima o máquinas o equipo, en métodos de publicidad y venta de productos, en la ejecución de acciones contra enfermedades peligrosas, etc.

En la sección 24.1 se hablará en términos generales acerca del método global, y luego se analizarán muestras y sus medias (secciones 24.2-24.4). El estudio de los **métodos estadísticos** se inicia en la sección 24.5 con la **estimación de parámetros** de manera puntual y por intervalos (secciones 24.5, 24.6) y se continuará con la **prueba de hipótesis** y aplicaciones (secciones 24.7-24.9), la **bondad de ajuste** (prueba para funciones de distribución, sección 24.10) y algunas **pruebas no paramétricas** (sección 24.11). La última sección trata sobre *pares de mediciones* y **análisis de regresión**.

Prerrequisitos para este capítulo: Capítulo 23.
Secciones que pueden omitirse en un curso más breve: 24.3, 24.8, 24.9, 24.11.
Bibliografía: Apéndice 1, parte G.
Respuestas a los problemas: Apéndice 2.
Tablas estadísticas: Apéndice 5.

24.1 NATURALEZA Y OBJETIVOS DE LA ESTADÍSTICA

En estadística el interés lo constituyen los métodos para diseñar y evaluar experimentos a fin de obtener información sobre problemas prácticos, por ejemplo, la inspección de la calidad de materia prima o de productos manufacturados, la comparación de máquinas y herramientas o de los métodos usados en la producción, el rendimiento de los obreros, la reacción de los consumidores frente a nuevos productos, la reacción de un proceso químico en varias condiciones, la relación entre el contenido de hierro o de mineral de hierro y la densidad de éste, la eficiencia de los sistemas de acondicionamiento de aire bajo varias temperaturas, la relación entre la dureza de Rockwell y el contenido de carbono del acero, etc.

Por ejemplo, en un proceso de producción masiva (de tornillos, pernos, focos, transistores, etc.), ordinariamente existen *artículos no defectuosos*, es decir, artículos que satisfacen las especificaciones de calidad, y *artículos defectuosos*, que no las satisfacen. Estas especificaciones pueden incluir, por ejemplo, los diámetros máximo y mínimo de ejes, las vidas útiles mínimas de focos, los valores límites de la resistencia de resistores en aparatos de televisión, los pesos máximos de los sobres aéreos, los contenidos mínimos de botellas llenadas automáticamente, los tiempos máximos de reacción de interruptores y los valores mínimos de la resistencia de un hilado.

La razón que explica las diferencias en la calidad de los productos es la *variación* debida a numerosos factores (en la materia prima, la función de la maquinaria automática, la mano de obra, etc.) cuya influencia no puede ser predicha, de modo que la variación debe considerarse como una ***variación aleatoria***. La situación es semejante en el caso de la evaluación de la eficiencia de los métodos de producción y de otros ejemplos precedentes.

En la mayor parte de los casos, la inspección de *cada* artículo de una producción es demasiado costosa y consumidora de tiempo. Inclusive, puede ser imposible llevarla a cabo si conduce a la destrucción del artículo. Por tanto, en vez de inspeccionar todos los artículos manufacturados, simplemente se inspeccionan unos cuantos de ellos (una "**muestra**"), y con base en esta inspección es posible obtener conclusiones acerca de la totalidad de los artículos (la "**población**"). Si se extraen 100 tornillos de un lote de 10 000 tornillos y se encuentra que 4 de los 100 son defectuosos, se está inclinado a creer que *aproximadamente* el 4% del lote son tornillos defectuosos, en el supuesto de que los tornillos fueron extraídos "**al azar**", es decir, de modo que cada tornillo del lote tiene la misma "posibilidad" de ser extraído. Resulta evidente que tal conclusión no es absolutamente cierta; es decir, no puede afirmarse que el lote contiene *precisamente* el 4% de tornillos defectuosos, aunque de todas formas en la mayor parte de los casos esta afirmación precisa no tendría ningún interés práctico en particular. También se siente que la conclusión es más dependiente mientras más tornillos (¡elegidos aleatoriamente!) se inspeccionen. Aplicando la teoría de probabilidad matemática se verá que estas nociones e ideas algo vagas pueden precisarse. Además, esta teoría también produce medidas para la confiabilidad de las conclusiones (obtenidas a partir de muestras por medio de métodos estadísticos) sobre poblaciones. Por tanto, la teoría de probabilidad constituye la base de los métodos estadísticos.

De manera semejante, para obtener información sobre el contenido de hierro μ del mineral de hierro, podría elegirse aleatoriamente un cierto número de n especímenes y medir su contenido de hierro. Lo anterior produce una muestra de n números $x_1, \cdots x_n$

(los resultados de las n mediciones) cuyo promedio $\bar{x} = (x_1 + \cdots + x_n)/n$ es un valor aproximado de μ.

Problemas de naturalezas diferentes pueden requerir métodos y técnicas diferentes, pero los pasos que conducen desde el planteamiento de un problema hasta su solución son los mismos en la mayor parte de los casos. Tales pasos son como sigue.

1. ***Planteamiento del problema.*** Es importante plantear el problema de manera precisa y limitar la investigación, de modo que entonces sea posible esperar una respuesta útil dentro de un periodo prescrito, tomando en cuenta el costo de la investigación estadística, la habilidad de los investigadores y las facilidades con que se cuenta. Este paso también debe incluir la creación de un modelo matemático basado en conceptos claros. (Por ejemplo, es necesario definir qué se entiende por artículo defectuoso en una situación específica.)
2. ***Diseño del experimento.*** Este paso incluye la elección del método estadístico a aplicar en el último paso, el tamaño n de la muestra (número de artículos a extraer e inspeccionar, o número de experimentos a efectuar, etc.), y los métodos y técnicas físicas a usar en el experimento. El objetivo es obtener un máximo de información invirtiendo un mínimo de costo y tiempo.
3. ***Experimentación o recolección de datos.*** Este paso debe seguir reglas estrictas.
4. ***Procesamiento de datos.*** En este paso se ordenan los datos en forma tabular clara y simple, y pueden representarse gráficamente por medio de diagramas, gráficas de barras, etc. También se calculan parámetros muestrales (números), en particular, la media $\bar{x}$ de la muestra (tamaño promedio de los valores muestrales) y la variancia s^2 de la muestra (que mide la dispersión de los valores muestrales).
5. ***Inferencia estadística.*** En este paso se usa la muestra y se aplica un método estadístico idóneo para obtener conclusiones sobre las propiedades desconocidas de la población, de modo que se obtenga la respuesta del problema.

Parece evidente que las **muestras** desempeñan un rol crucial en el método global. En consecuencia, es necesario hacer riguroso este concepto intuitivo. Esto se efectuará en la siguiente sección.

24.2 MUESTREO ALEATORIO. NÚMEROS ALEATORIOS

Por la sección precedente se sabe que las muestras son selecciones de poblaciones y que son fundamentales en estadística porque se requieren para, a partir de sus propiedades, obtener conclusiones sobre propiedades que desean conocerse de la población. Para lograr lo anterior, es absolutamente esencial que una muestra sea una **selección aleatoria**, es decir, cada elemento de la población debe tener una probabilidad conocida de ser considerado en la muestra. Esta condición debe cumplirse (por lo menos de manera aproximada); en caso contrario, los métodos estadísticos pueden conducir a resultados engañosos.

Si el espacio muestral es infinito, los valores muestrales son **independientes**; es decir, los resultados de las n ejecuciones de un experimento efectuado para obtener n valores muestrales no se afectan entre sí. Este hecho ciertamente es válido para muestras de una población normal. Si el espacio muestral es finito, los valores muestrales siguen siendo independientes si el muestreo es con reemplazo, y serán *prácticamente* independientes si el muestreo es sin reemplazo pero el tamaño de la muestra se man-

tiene pequeño en comparación con el de la población (por ejemplo, muestras de 5 o 10 valores de una población de 1000 valores.) Sin embargo, si se muestrea sin reemplazo y se toman grandes muestras de una población finita, entonces es necesario considerar la dependencia.

Números aleatorios

No es fácil satisfacer el requisito de que una muestra sea una selección aleatoria, porque existen muchos factores sutiles de varios tipos que pueden sesgar el resultado del muestreo. Por ejemplo, si se desea extraer e inspeccionar una muestra de 10 chumaceras de un lote de 80 chumaceras antes de decidir comprar el lote, ¿cómo deben seleccionarse físicamente esas 10 chumaceras a fin de tener una certeza razonable de que todas las

$$\binom{80}{10} \approx 1.6 \cdot 10^{12}$$

muestras de tamaño 10 son equiprobables?

Se han desarrollado métodos para resolver este problema, y a continuación se mostrará uno de tales procedimientos, que se utiliza frecuentemente.

Los artículos de ese lote se numeran del 1 al 80. Luego se eligen 10 artículos usando la tabla A9 del apéndice 5, que contiene *números aleatorios* obtenidos a partir de conjuntos de **dígitos aleatorios** como se muestra a continuación. Primero se elige al azar un número de renglón de 0 a 99. Esto puede efectuarse lanzando una moneda legal siete veces, denotando a las caras por 1 y a las cruces por 0, generando así un número binario de siete posiciones que representa a $0, 1, \cdots, 127$ con probabilidades iguales. Este número se usa si es $0, 1, \cdots$, o 99. En caso contrario, se ignora y se repite este proceso. A continuación se elige un número de columna de 0 a 9 generando un número binario de 4 posiciones de manera semejante. Suponer que se han obtenido 0011010 (= 26) y 0111 (= 7), respectivamente. En el renglón 26 y en la columna 7 de la tabla A9 se encuentra 44973. Se preservan los dos primeros dígitos, es decir, 44. Se efectúa un desplazamiento hacia abajo siguiendo la columna, empezando en 44973 y preservando sólo los dos primeros dígitos. De esta manera se encuentra

44 44 83 91 55 etc.

Se omiten los números mayores que 80 o que ocurren por segunda vez y se continúa hasta obtener 10 números. Así se obtiene

44 55 53 03 52 61 67 78 39 54.

Los 10 artículos que tienen estos números representan la selección deseada.

Respecto a una tabla más grande de dígitos aleatorios, consultar la obra citada en el apéndice 1 como[G15].

Sin embargo, para grandes muestras tales tablas pueden volverse inconvenientes. Debido a lo anterior, para generar números con propiedades semejantes se han desarrollado procedimientos en el denominado **generador de números aleatorios**, disponibles en muchos lenguajes de computadora y librerías de subrutinas.

En la siguiente sección se abundará más sobre muestras desde el punto de vista del procesamiento de datos.

Problemas de la sección 24.2

1. Suponer que en el ejemplo explicado en el texto se hubiera empezado en el renglón 83 y la columna 2 de la tabla A9 en el apéndice 5, y que el desplazamiento hubiera sido hacia arriba. ¿Qué artículos hubieran sido incluidos en una muestra de tamaño 10?
2. Usando la tabla A9 en el apéndice 5, seleccionar de un lote de 250 artículos dados una muestra de tamaño 20.
3. ¿Cómo puede usarse un dado legal en relación con la selección aleatoria?
4. Considerar una variable aleatoria Y que tiene la densidad uniforme $f(y) = 1$ si $0 < y < 1$, y 0 en caso contrario. Es fácil simular Y (es decir, muestrear los valores de Y) mediante el empleo de dígitos aleatorios. Por ejemplo, para obtener 20 valores redondeados hasta 2 decimales, considerar cualquiera de las 10 columnas de la tabla A9, empezar con algún renglón elegido aleatoriamente y efectuar un desplazamiento hacia abajo, tomando los dos primeros dígitos de los cinco dígitos dados en la columna y escribir un punto decimal a la izquierda del primer dígito. Suponer que se eligieron la columna 8 y el renglón 12. Demostrar que se obtiene la siguiente muestra y graficar los valores como puntos en una escala entre 0 y 1.

0.91 0.42 0.64 0.55 0.66 0.50 0.34 0.28 0.07 0.64
0.77 0.03 0.88 0.11 0.37 0.54 0.92 0.96 0.97 0.48

5. ¿Cómo modificaría el lector el método del problema 4 si desea obtener una muestra de tamaño 20 de la distribución uniforme en el intervalo $2 < y < 6$?
6. Los dígitos aleatorios también pueden usarse para simular *cualquier* variable aleatoria continua X. Para este efecto se grafica la función de distribución de X, se usan dígitos aleatorios para obtener valores de la variable Y descrita en el problema 4, se grafican estos valores sobre el eje vertical y se leen los valores correspondientes de X. Ilustrar este procedimiento para una variable aleatoria normal X con media 0 y variancia 1, usando la muestra del problema 4. (Por supuesto, en la práctica una computadora efectuaría ésto mediante el empleo de un generador de números aleatorios y la función de distribución de X.)
7. Escribir el método del problema 6 en términos de $\Phi(z)$, de modo que pueda programarse en una computadora.
8. Extender el método del problema 6 a la distribución normal con media 3 y variancia 4. ¿Qué se obtiene a partir de 0.91, 0.42, 0.64 en el problema 4?
9. ¿Qué muestra de una variable aleatoria con densidad $f(x) = e^{-x}$ si $x > 0$, $f(x) = 0$ si $x < 0$ se obtendría a partir de la muestra del problema 4? Calcular los tres primeros valores.
10. La técnica de simulación descrita en el problema 6 también es válida para variables aleatorias *discretas*. Explicar cómo procedería el lector si X es la suma de los dos números que se obtienen al lanzar dos dados legales (ver la figura 489 en la sección 23.4).

24.3 PROCESAMIENTO DE MUESTRAS

En esta sección se analizarán métodos para manejar muestras y representarlas mediante diagramas (representaciones gráficas); lo que es más importante, también se

introducirán conceptos relacionados con muestras que serán necesarios a lo largo de todo este capítulo.

En el transcurso de un experimento estadístico por lo general se obtiene una sucesión de observaciones (números en la mayor parte de los casos). Éstas siempre deben registrarse en el orden en que ocurren y se denominan **valores muestrales**; su número se denomina *tamaño de la* **muestra** y se denota por n. Como ejemplo típico, en la tabla 24.1 se observa una muestra de tamaño $n = 100$ valores. Estos datos se obtuvieron al elaborar cilindros de prueba estándares de concreto (diámetro de 6 pulgadas, longitud de 12 pulgadas) y romperlos 28 días después.

Tabla 24.1.
Muestra de 100 valores de la resistencia a la tensión de resquebrajadura (lb/pulg²) de cilindros de concreto.

320	380	340	410	380	340	360	350	320	370
350	340	350	360	370	350	380	370	300	420
370	390	390	440	330	390	330	360	400	370
320	350	360	340	340	350	350	390	380	340
400	360	350	390	400	350	360	340	370	420
420	400	350	370	330	320	390	380	400	370
390	330	360	380	350	330	360	300	360	360
360	390	350	370	370	350	390	370	370	340
370	400	360	350	380	380	360	340	330	370
340	360	390	400	370	410	360	400	340	360

1. D. L. IVEY, Pruebas a la tensión de resquebrajaduras sobre concreto estructural de agregado ligero. Texas Transportation Institute, College Station, Texas.

Tabla de frecuencias de una muestra. Función de frecuencias

A partir de una tabla como la 24.1, en la que los valores muestrales $x_1, \cdots, x_n$ se registran en su orden de ocurrencia durante la experimentación, no es posible ver mucho. En consecuencia, a continuación se usa una subrutina de clasificación con la que se obtiene una **tabla de frecuencias**, como la tabla 24.2, donde en la columna 1 se enumeran los valores numéricos que ocurren y en la columna 2 sus **frecuencias absolutas** (= número de veces que ocurre un valor en una muestra), también denominadas simplemente **frecuencias**. (Así, $x = 330$ tiene la frecuencia absoluta 6, etc.) La división entre el tamaño n de la muestra proporciona la **frecuencia relativa** $\tilde{f}(x)$ en la columna 3. (Por ejemplo, $\tilde{f}(300) = 2/100 = 0.02$, etc.) Resulta evidente que los valores extremos posibles son $\tilde{f}(x) = 0$ si x no ocurre en la muestra, y $\tilde{f}(x) = n/n = 1$ si todos los valores muestrales son iguales (iguales a tal x). Así se obtiene el

Teorema 1 (Frecuencia relativa)

La frecuencia relativa satisface

$$0 \leqq \tilde{f}(x) \leqq 1. \tag{1}$$

Para una muestra dada, $\tilde{f}(x)$ con $\tilde{f}(x) = 0$ para todo x que no está en la muestra se denomina **función de frecuencias** de la muestra y se dice que determina la **distribución de frecuencias** de la muestra porque indica cómo están distribuidos los valores muestrales.

El teorema 1 es la contraparte empírica del axioma 1 para probabilidad en la sección 23.2. Además, la suma de todas las frecuencias absolutas en una muestra debe ser igual a n (¿por qué?), de modo que al dividir entre n se obtiene el

Teorema 2 (Suma de todas las frecuencias relativas)

La suma de todas la frecuencias relativas en una muestra es igual a 1,

$$\sum_x \tilde{f}(x) = 1. \tag{2}$$

Tabla 24.2.
Tabla de frecuencias de la muestra en la tabla 24.1

1 Resistencia a la tensión x [lb/pulg²]	2 Frecuencia absoluta	3 Frecuencia relativa $\tilde{F}(x)$	4 Frecuencia absoluta acumulada	5 Frecuencia relativa acumulada $\tilde{f}(x)$
300	2	0.02	2	0.02
310	0	0.00	2	0.02
320	4	0.04	6	0.06
330	6	0.06	12	0.12
340	11	0.11	23	0.23
350	14	0.14	37	0.37
360	16	0.16	53	0.53
370	15	0.15	68	0.68
380	8	0.08	76	0.76
390	10	0.10	86	0.86
400	8	0.08	94	0.94
410	2	0.02	96	0.96
420	3	0.03	99	0.99
430	0	0.00	99	0.99
440	1	0.01	100	1.00

La fórmula (2) es la contraparte empírica del axioma 2 en la sección 23.2. (El análogo del axioma 3 no reviste gran interés.) En (2) se tiene una sumatoria finita, que puede escribirse de manera más ordenada si primero los valores ***numéricamente diferentes*** en una muestra de tamaño n se denotan por

$$x_1, \quad x_2, \quad \cdots, \quad x_m \qquad (m \leqq n).$$

(Por tanto, $n = 100$, pero $m = 15$ en la tabla 24.2, y $x_1 = 330, x_2 = 340, \cdots, x_{15} = 440$.) Entonces, (2) se vuelve

(2*)
$$\sum_{j=1}^{m} \tilde{f}(x_j) = 1$$

(la sumatoria va desde 1 hasta m, no hasta n). Comprobar (2*) para la tabla 24.2.

La función de frecuencias $\tilde{f}(x)$ de una muestra es una contraparte empírica o análogo de la función de probabilidad o densidad $f(x)$ de la población correspondiente, aunque estas funciones son conceptualmente bastante diferentes; lo que es más evidente: una población tiene *una* $f(x)$, pero si se toman 10 muestras de la misma población, por lo general se obtienen 10 funciones de frecuencias muestrales $\tilde{f}(x)$ diferentes. (¿Por qué?) En el trabajo ulterior también se necesitará un análogo de la función de distribución $F(x)$ de una población. Éste se define como sigue.

Función de distribución de la muestra

Sea

(3) $\tilde{F}(x)$ = *Suma de las frecuencias relativas de todos los valores que son menores o iguales que x.*

Esta función se denomina **función de frecuencias acumuladas de la muestra** o **función de distribución de la muestra**. En la figura 501 se presenta un ejemplo.

$\tilde{F}(x)$ es una *función escalonada* (función constante por secciones) que tiene saltos de magnitud $\tilde{f}(x)$ precisamente en aquellos x en los cuales $\tilde{f}(x) \neq 0$. Antes del primer salto, $\tilde{F}(x) = 0$. El primer salto es en el menor valor muestral y el último, en el mayor. A partir de ahí, $\tilde{F}(x) = 1$.

La relación entre $\tilde{f}(x)$ y $\tilde{F}(x)$ es

(4)
$$\tilde{F}(x) = \sum_{t \leq x} \tilde{f}(t)$$

en donde $t \leq x$ significa que para un x es necesario sumar todos los $\tilde{f}(t)$ para los que t es menor o igual que x.

Representaciones gráficas de muestras

En las figuras 502-505 se observan posibilidades para representar muestras por medio de gráficas. Tales figuras son autoexplicativas, aunque el siguiente comentario reviste interés práctico.

En la figura 504 el área de cada rectángulo es igual a la frecuencia relativa correspondiente. Por tanto, la ordenada debe etiquetarse como "*frecuencia relativa por intervalo unitario*". Como en este caso las bases de los rectángulos son iguales, los valores sobre la ordenada son proporcionales a $\tilde{f}(x)$ y es posible etiquetar la ordenada en términos de $\tilde{f}(x)$. Sin embargo, esto deja de ser cierto en caso de que los rectángulos tengan bases diferentes.

La situación es semejante en la figura 505.

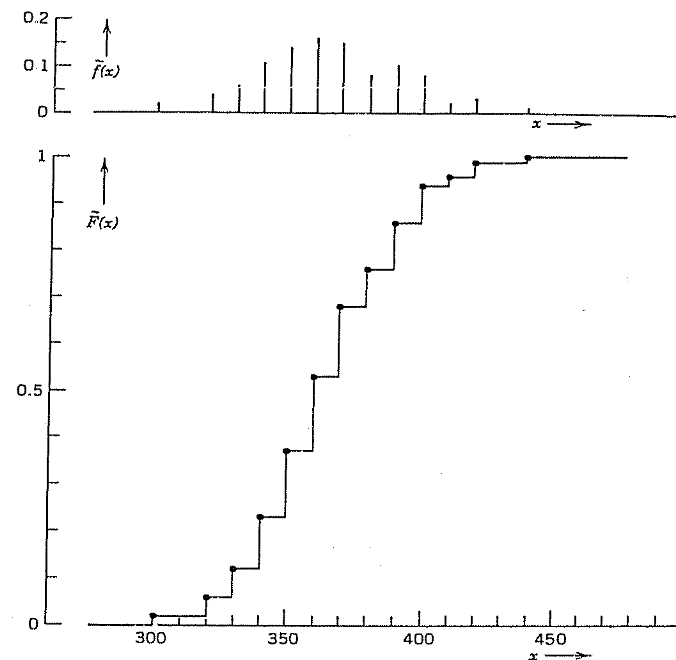


Figura 501. Función de frecuencias $\tilde{f}(x)$ y función de frecuencias acumuladas $\tilde{F}(x)$ de la muestra de la tabla 24.2. (Los puntos indican los valores de $\tilde{F}(x)$ en los saltos.)

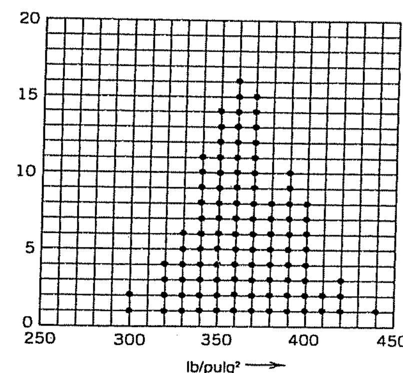


Figura 502. Diagrama de frecuencias de puntos de la muestra de la tabla 24.2.

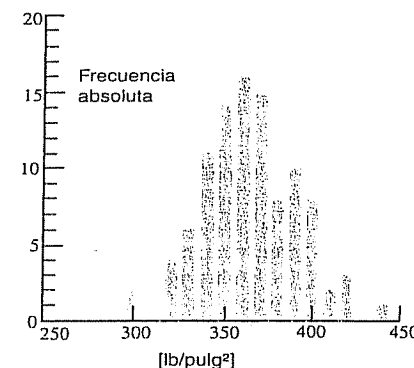


Figura 503. Gráfica de barras de la muestra de la tabla 24.2.

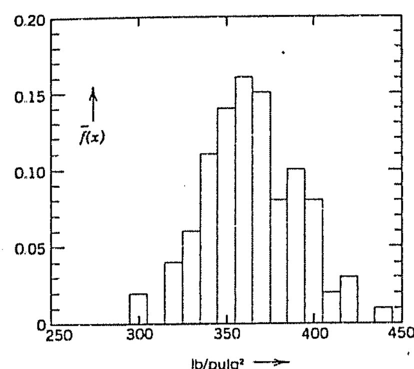


Figura 504. Histograma de frecuencias en la tabla 24.2.

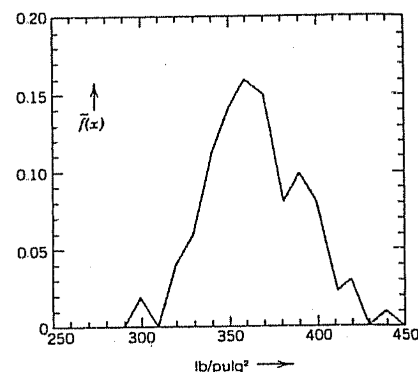


Figura 505. Polígono de frecuencias de la muestra de la tabla 24.2.

Agrupamiento de muestras

Si una muestra consta de demasiados valores muestrales numéricamente diferentes, entonces sus representaciones tabular y gráfica son innecesariamente complicadas, aunque es posible simplificarlas mediante el proceso de **agrupamiento** como sigue.

Si se tiene una muestra, se elige un intervalo conveniente I que contiene a todos los valores muestrales y se subdivide en subintervalos, denominados **intervalos de clase**, cuyos puntos medios se denominan **puntos medios de clase** o **marcas de clase**. El conjunto de valores muestrales en un intervalo de clase se denomina **clase** y su número, **frecuencia absoluta de clase** correspondiente. Al dividir entre n se obtiene la **frecuencia relativa de clase** $\tilde f(x)$, y $\tilde f(x)$, con $\tilde f(x) = 0$ si x no es una marca de clase, se denomina **función de frecuencias de la muestra agrupada**. A partir de ésta, mediante una sumatoria se obtiene la **función de distribución** $\tilde F(x)$ de la muestra agrupada,

$$\tilde F(x) = \sum_{t \leq x} \tilde f(t). \qquad (4^*)$$

Esta expresión se parece a (4), pero debe observarse bien que ahora $\tilde f$ es la función de frecuencias de la muestra ***agrupada***, de modo que $\tilde F(x)$ puede tener saltos sólo en las marcas de clase, no en los valores muestrales proporcionados originalmente; intuitivamente, al agrupar se ha desplazado cada muestra a su marca de clase.

En las tablas 24.3 y 24.4 se presenta un ejemplo típico del proceso de agrupamiento.

Reglas de agrupamiento. Mientras menos clases se elijan, más simple se vuelve la distribución de la muestra agrupada, aunque se pierde más información, ya que los valores muestrales originales dejan de aparecer explícitamente. El agrupamiento debe efectuarse de modo que se eliminen sólo los detalles no esenciales. Obedeciendo las siguientes reglas se evitan complicaciones innecesarias en el uso ulterior de una muestra agrupada.

Tabla 24.3.
Resistencia de 50 lotes de algodón (lb requeridas para romper un buje).

114	118	86	107	87	94	82	81	98	84
120	126	98	89	114	83	94	106	96	111
123	110	83	118	83	96	96	74	91	81
102	107	103	80	109	71	96	91	86	129
130	104	86	121	96	96	127	94	102	87

Tabla 24.4.
Tabla de frecuencias de la muestra de la tabla 24.3 (agrupadas).

Intervalo de clase	Marca de clase x	Frecuencia absoluta	$\tilde f(x)$	$\tilde F(x)$
65– 75	70	2	0.04	0.04
75– 85	80	8	0.16	0.20
85– 95	90	11	0.22	0.42
95–105	100	12	0.24	0.66
105–115	110	8	0.16	0.82
115–125	120	5	0.10	0.92
125–135	130	4	0.08	1.00
		Suma 50	1.00	

1. Todos los intervalos de clase deben tener la misma longitud.

2. Los intervalos de clase deben elegirse de modo que las marcas de clase correspondan a números simples (números con pocos dígitos diferentes de cero).

3. Si un valor muestral x_j coincide con el punto extremo común de dos intervalos de clase, entonces debe considerarse en el intervalo de clase que se extiende de x_j hacia la derecha.

Problemas de la sección 24.3

En cada caso, elaborar una tabla de frecuencias de la muestra dada y representar la muestra por un diagrama de frecuencias de puntos, una gráfica de barras y un histograma.

1. Resistencia [ohms] de resistores

99 100 102 101 98 103 100 102 99 101
100 100 99 101 100 102 99 101 98 100

2. Números que aparecen al lanzar un dado.

3 3 2 1 6 5 6 3 4 6 2 4 1 2 4

3. Tiempo de disparo [s] de un relevador

1.3 1.2 1.4 1.5 1.3 1.3 1.4 1.1 1.5 1.4
1.6 1.3 1.5 1.1 1.4 1.2 1.3 1.5 1.4 1.4

4. Contenido de carbono [%] del carbón

86 87 86 81 77 85 87 86 85 87
82 84 83 79 82 73 86 84 83 83

5. Resistencia a la tensión [kg/mm²] de planchas de acero

43 44 45 46 44 43 41 41 44 44 43 44 42 45 43
45 42 44 44 42 45 41 44 44 43 44 46 41 43 45

6. Número de hojas de papel sobre y bajo el número deseado de 100 hojas por paquete en un proceso de empacado.

1 2 0 1 0 0 −1 0 0 1

7. Millas por galón de gasolina requerida por seis automóviles del mismo modelo

15.0 15.5 14.5 15.0 15.5 15.0

8. Peso de sacos llenos [g] en un proceso de llenado automático

200 203 199 198 201 200 201 201

9. Tiempo de espera [min, redondeados] de un conmutador para un tren en cierto transporte subterráneo (metro)

3 1 5 3 3 4 1 0 2 2

10. Graficar la función de frecuencias acumuladas de la muestra en el problema 3.
11. Trazar el diagrama de barras, el histograma y el polígono de frecuencias de la muestra agrupada en la tabla 24.4.
12. Trazar el histograma de las siguiente muestra de vidas útiles [horas] de focos.

Vida útil	Frecuencia absoluta	Vida útil	Frecuencia absoluta	Vida útil	Frecuencia absoluta
950–1050	4	1350–1450	51	1750–1850	20
1050–1150	9	1450–1550	58	1850–1950	9
1150–1250	19	1550–1650	53	1950–2050	3
1250–1350	36	1650–1750	37	2050–2150	1

13. Agrupar la muestra de la tabla 24.1 usando intervalos de clase con puntos medios 300, 320, 340, · · · . Elaborar la tabla de frecuencias correspondiente. Trazar el histograma y compararlo con el de la figura 504. Graficar la función de frecuencias acumuladas.
14. Agrupar la muestra que se observa en la tabla 24.3, usando intervalos de clase con puntos medios 75, 85, 95, · · · . Elaborar la tabla de frecuencias correspondiente. Trazar el histograma y compararlo con el del problema 11.
15. La menor de 1500 mediciones fue 10.8 y la mayor, 11.9 cm. Sugerir intervalos de clase para agrupar estos datos.

24.4 MEDIA Y VARIANCIA DE LA MUESTRA

Para poblaciones se han definido números, denominados **parámetros** (la media μ y la variancia σ^2 por encima de todos; ver la sección 23.5) que caracterizan propiedades importantes de la distribución. Para las muestras es posible hacer lo mismo, como sigue.

Media de la muestra. La *media* $\bar{x}$ de una muestra $x_1, x_2, \cdots, x_n$ se define como

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n). \tag{1}$$

Es la suma de todos los valores muestrales, dividida entre el tamaño n de la muestra. Resulta evidente que mide el tamaño promedio de los valores muestrales.

Variancia de la muestra. La *variancia* s^2 de una muestra $x_1, x_2, \cdots, x_n$ se define como

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}[(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]. \tag{2}$$

Es la suma de los cuadrados de las desviaciones de los valores muestrales con respecto a la media $\bar{x}$, dividida entre $n - 1$. Mide la dispersión de los valores muestrales y es positiva, excepto por el caso raro en que todos los valores muestrales son iguales (y entonces son iguales a $\bar{x}$). La raíz cuadrada positiva de la variancia de la muestra s^2 se denomina **desviación estándar** de la muestra y se denota por s.

Ejemplo 1. Media y variancia de la muestra.

Diez clavos elegidos al azar tienen las longitudes [pulg.]

0.80 0.81 0.81 0.82 0.81 0.82 0.80 0.82 0.81 0.81.

Encontrar la media y la variancia de esta muestra.

Solución. Por (1), se observa que la media de la muestra es

$$\bar{x} = \tfrac{1}{10}(0.80 + 0.81 + 0.81 + 0.82 + \cdots + 0.81) = 0.811 \text{ [pulg]}.$$

Al aplicar (2), entonces se obtiene la variancia de la muestra

$$s^2 = \tfrac{1}{9}[(0.800 - 0.811)^2 + \cdots + (0.810 - 0.811)^2] = 0.000\,054 \text{ [pulg}^2].$$

Este cálculo se vuelve más simple si se consideran juntos los valores muestrales iguales. Así,

$$\bar{x} = \tfrac{1}{10}(2 \cdot 0.80 + 5 \cdot 0.81 + 3 \cdot 0.82) = 0.811.$$

Entre paréntesis se tiene la suma de los tres valores muestrales *numéricamente diferentes* $x_1 = 0.80$, $x_2 = 0.81$, $x_3 = 0.82$, cada uno multiplicado por su frecuencia absoluta. De manera semejante,

$$s^2 = \tfrac{1}{9}[2(0.800 - 0.811)^2 + 5(0.810 - 0.811)^2 + 3(0.820 - 0.811)^2] = 0.000\,054. \blacksquare$$

El ejemplo ilustra cómo es posible calcular $\bar{x}$ y s^2 a partir de la distribución de frecuencias $\tilde{f}(x)$ de la muestra. Si una muestra de n valores contiene precisamente m valores muestrales ***numéricamente diferentes***

$$x_1, \qquad x_2, \qquad \cdots, \qquad x_m$$

(en donde $m \leqq n$), entonces las frecuencias relativas correspondientes son

$$\tilde{f}(x_1), \qquad \tilde{f}(x_2), \qquad \cdots, \qquad \tilde{f}(x_m)$$

y las frecuencias absolutas correspondientes necesarias en el cálculo son

$$a(x_1) = n\tilde{f}(x_1), \qquad a(x_2) = n\tilde{f}(x_2), \qquad \cdots, \qquad a(x_m) = n\tilde{f}(x_m).$$

Se observa que ahora (1) asume la forma

$$(3) \qquad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} x_j a(x_j), \qquad a(x_j) = n\tilde{f}(x_j),$$

y que (2) asume la forma

$$(4) \qquad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{m} (x_j - \bar{x})^2 a(x_j).$$

Observar que en (1) y (2) se suma sobre *todos* los valores muestrales, mientras que ahora se suma sobre los valores muestrales *numéricamente diferentes*. Las frecuencias absolutas $a(x_j)$ son números enteros, mientras que las frecuencias relativas $\tilde{f}(x_j)$ pueden ser números mezclados, por ejemplo, si $n = 23$ o $n = 84$, etc.

Aquí termina el análisis sobre obtención y manejo de muestras en preparación para las siguientes secciones, en las que se abordará la inferencia estadística de muestras a poblaciones mediante métodos estadísticos.

Problemas de la sección 24.4

1. Calcular la media y la variancia de la muestra del problema 2, sección 24.3, usando (1), (2) o (3), (4).
2. Calcular la media y la variancia de la muestra 3, 4, 10, 4, 4. Observar la gran contribución de 10 a s^2 y hacer un comentario.
3. Trazar un histograma de la muestra 8, 2, 4, 10 y adivinar $\bar{x}$ y s mediante la inspección del histograma. Luego calcular $\bar{x}$, s^2 y s.
4. Calcular la media y la variancia de la muestra del problema 4, sección 24.3.
5. A fin de ilustrar que s^2 mide la dispersión, calcular s^2 para las dos muestras 109, 110, 111 y 105, 110, 115 y comparar los resultados.
6. Demostrar que $\bar{x}$ está entre los valores muestrales menor y mayor.

7. Demostrar que $s^2 = 0$ si y sólo si todos los valores muestrales son iguales.
8. **(Origen de trabajo)** Si $x_j^* = x_j + c$, donde $j = 1, \cdots, n$ y c es cualquier constante, demostrar que

$$\bar{x} = c + \bar{x}^* \qquad \left(\bar{x}^* = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^*\right), \qquad s^2 = s^{*2}$$

en donde s^{*2} es la variancia de las x_j^*. (En la práctica, c se elige de modo que las x_j^* sean pequeñas en valor absoluto. Geométricamente, ésto corresponde a un desplazamiento del origen y se denomina *método del origen de trabajo*.)

9. Aplicar el método del origen de trabajo a la muestra del ejemplo 1.
10. **(Codificación total)** Si $x_j = c_1x_j^* + c_2$, donde $j = 1, \cdots, n$ y c_1 y c_2 son constantes, demostrar que

$$\bar{x} = c_1\bar{x}^* + c_2, \qquad s^2 = c_1^2 s^{*2}$$

donde $\bar{x}$ y s^{*2} significan lo mismo que en el problema 8. (Esto se denomina *método de codificación total*. Resulta evidente que es valioso en cálculos efectuados con calculadoras de bolsillo, por ejemplo, para comprobaciones rápidas.)

11. Usando el método del origen de trabajo, calcular la media de la muestra en el problema 1 de la sección 24.3.
12. Aplicar codificación total a la muestra del ejemplo 1.
13. **(Rango de una muestra)** La diferencia entre los valores muestrales mayor y menor en una muestra se denomina *rango de la muestra*. Encontrar el rango de la muestra en el ejemplo 1.
14. Una ventaja del rango es que puede calcularse más fácilmente que s^2. ¿Puede pensar el lector en una desventaja?
15. **(Percentil, mediana)** El p-ésimo **percentil** de una muestra es un número Q_p tal que por lo menos p% de los valores muestrales son menores o iguales que Q_p y también por lo menos $(100 - p)$% de tales valores son mayores o iguales que Q_p. Si existe más de un número así (en cuyo caso hay un intervalo de ellos), entonces el p-ésimo percentil se define como el promedio de los números (punto medio de ese intervalo). En particular, Q_{50} se denomina **cuartil medio o mediana** y se denota por $\tilde{x}$. Encontrar $\tilde{x}$ para la muestra en la tabla 24.2 (sección 24.3).
16. Los percentiles Q_{25} y Q_{75} de una muestra se denominan **cuartiles inferior** y **superior** de la muestra, respectivamente, y $Q_{75} - Q_{25}$, que es una medida de la dispersión, se denomina **rango intercuartil**. Encontrar Q_{25}, Q_{75}, y $Q_{75} - Q_{25}$ para la muestra de la tabla 24.2.
17. Hacer lo mismo que en los problemas 15 y 16 para la muestra de la tabla 24.3.
18. **(Moda)** Una *moda* de una muestra es un valor muestral que ocurre con más frecuencia en la muestra. Encontrar la media, la mediana y la moda de la siguiente muestra. Hacer un comentario.

Valor total en el mercado de las reservas propias ($):	100	1000	100,000
Frecuencia absoluta (= número de propietarios):	100	90	20

19. Calcular la media y la variancia de la muestra no agrupada de la tabla 24.3 (sección 24.3) y de la muestra agrupada de la tabla 24.4, y comparar los resultados.
20. Si se está agrupando una muestra, en general cambia su media. Demostrar que el cambio no puede exceder $L/2$, en donde L es la longitud de cada intervalo de clase.

24.5 ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

Al inicio de esta sección se analizarán las tareas prácticas más importantes en estadística, así como los métodos estadísticos correspondientes. El primero de ellos es la estimación puntual de **parámetros**, es decir, cantidades que aparecen en una distribución, como p en la distribución binomial y μ y σ en la distribución normal.

Una **estimación puntual** de un parámetro es un número (punto en la recta real), que se calcula a partir de una muestra dada y sirve como una aproximación del valor exacto desconocido del parámetro. Una **estimación de intervalo** es un intervalo (*"intervalo de confianza"*) que se obtiene de una muestra; tales estimaciones serán consideradas en la siguiente sección. La estimación de parámetros reviste gran importancia práctica en muchas aplicaciones.

Como una aproximación de la media μ de una población es posible considerar la media x de una muestra correspondiente. Así se obtiene la estimación $\hat{\mu} = x$ para μ, es decir,

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \tag{1}$$

en donde n es el tamaño de la muestra. De manera semejante, una estimación $\hat{\sigma}^2$ para la variancia de una población es la variancia s^2 de una muestra correspondiente, es decir,

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2. \tag{2}$$

Resulta evidente que (1) y (2) son estimaciones de parámetros para distribuciones en las que μ o σ^2 aparecen explícitamente como parámetros, como en las distribuciones normal y de Poisson. Para la distribución binomial, $p = \mu/n$ [ver (3) en la sección 23.6]. Por (1), para p se obtiene entonces la estimación

$$\hat{p} = \frac{\bar{x}}{n}. \tag{3}$$

Se menciona que (1) es un caso especial del denominado **método de momentos**. En este método los parámetros a estimar se expresan en términos de los momentos de la distribución (ver la sección 23.5). En las fórmulas resultantes, tales momentos se sustituyen por los momentos correspondientes de la muestra. Así se obtienen las estimaciones. Aquí, el **k-ésimo momento de una muestra** $x_1, \cdots, x_n$ es

$$\boxed{m_k = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^k.}$$

Método de máxima probabilidad

Otro método para obtener estimaciones es el **método de máxima probabilidad** de R. A. Fisher [*Messenger Math.* **41** (1912), 155-160]. A fin de explicarlo, se considerará

una variable aleatoria discreta (o continua) X cuya función de probabilidad (o densidad) $f(x)$ depende de un solo parámetro y se considerará una muestra correspondiente de n valores independientes $x_1, \cdots, x_n$. Entonces, para el caso discreto la probabilidad de que una muestra de tamaño n conste precisamente de tales n valores es

$$\boxed{l = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n).} \tag{4}$$

Para el caso continuo, la probabilidad de que la muestra conste de valores en los intervalos pequeños $x_i \leqq x \leqq x_i + \leqq x$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ es

$$f(x_1)\Delta x\, f(x_2)\Delta x \cdots f(x_n)\Delta x = l(\Delta x)^n. \tag{5}$$

Como $f(x_i)$ depende de θ, la función l depende de $x_1, \cdots, x_n$ y θ. Se supone que $x_1, \ldots, x_n$ están dados y son fijos. Entonces l es una función de θ, denominada **función de probabilidad**. La idea fundamental del método de máxima probabilidad es muy sencilla, como se muestra enseguida. Se elige esa aproximación para el valor desconocido de θ para el que l es lo más grande posible. Si l es una función diferenciable de θ, entonces una condición necesaria para que l tenga un máximo (no en la frontera) es

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = 0. \tag{6}$$

(Se escribe una derivada *parcial* porque l depende también de $x_1, \ldots, x_n$.) Una solución de (6) dependiente de $x_1, \ldots, x_n$ se denomina **estimación de máxima probabilidad** para θ. Es posible sustituir (6) por

$$\frac{\partial \ln l}{\partial \theta} = 0, \tag{7}$$

debido a que $f(x_j) > 0$, un máximo de l es positivo en general, y $\ln l$ es una función monótona creciente de l. Esto a menudo simplifica los cálculos.

Varios parámetros. Si la distribución de X implica r parámetros $\theta_1, \cdots, \theta_r$, entonces en vez de (6) se tienen las r condiciones $\partial l/\partial\theta_1 = 0, \cdots, l/\partial_r = 0$, y en vez de (7) se tiene

$$\frac{\partial \ln l}{\partial \theta_1} = 0, \quad \cdots, \quad \frac{\partial \ln l}{\partial \theta_r} = 0. \tag{8}$$

Ejemplo 1. Distribución normal.

Encontrar estimaciones de máxima probabilidad para μ y σ en el caso de la distribución normal.

Solución. Por (1), sección 23.7, y (4) se obtiene

$$l = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \left(\frac{1}{\sigma}\right)^n e^{-h} \quad \text{en donde} \quad h = \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2.$$

Al tomar logaritmos se obtiene

$$\ln l = -n \ln \sqrt{2\pi} - n \ln \sigma - h.$$

La primera ecuación en (8) es $\partial \ln l/\partial\mu = 0$, que se escribe como

$$\frac{\partial \ln l}{\partial \mu} = -\frac{\partial h}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0, \quad \text{por tanto,} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0.$$

La solución es la estimación deseada $\hat{\mu}$ para μ; se encuentra

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}.$$

La segunda ecuación en (8) es $\partial \ln l/\partial\mu = 0$, que se escribe como

$$\frac{\partial \ln l}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} - \frac{\partial h}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = 0.$$

Al sustituir por $\hat{\mu}$ y $\hat{\mu}$ despejar σ^2 se obtiene la estimación

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

que se usará en la sección 24.10. Observar que ésto difiere de (2). No es posible analizar criterios respecto a la bondad de las estimaciones, aunque sí se menciona que para n pequeño es preferible la fórmula (2). ∎

Problemas de la sección 24.5

1. Encontrar la estimación de máxima probabilidad para el parámetro de una distribución normal con variancia conocida $\sigma^2 = \sigma_0^2$.
2. Aplicar el método de máxima probabilidad a la distribución normal con $\mu = 0$.
3. **(Distribución binomial)** Deducir una estimación de máxima probabilidad para p.
4. Extender el problema 3 como sigue: Suponer que n ensayos se efectúan m veces y que en los primeros n ensayos A aparece k_1 veces, en los segundos n ensayos A aparece k_2 veces, $\cdots$, en los *m-ésimos* n ensayos A aparece k_m veces. Encontrar una estimación de máxima probabilidad de p con base en esta información.
5. Suponer que en el problema 4 se efectuaron 4 ensayos tres veces y A ocurrió 2, 3, 2 veces, respectivamente. Calcular p.
6. Considerar X = *Número de ensayos independientes hasta que ocurre un evento A*. Demostrar que X tiene la función de probabilidad $f(x) = pq^{x-1}$, $x = 1, 2, \cdots$, donde p es la probabilidad de A en un simple ensayo y $q = 1 - p$. Encontrar la estimación de máxima probabilidad de p correspondiente a un simple valor observado x de X.
7. En el problema 6, encontrar la estimación de máxima probabilidad de p que resulta de una muestra $x_1, \cdots, x_n$.
8. Al lanzar un dado, suponer que el primer seis se obtiene en el séptimo ensayo, y que al lanzarlo de nuevo el primer seis se obtiene en el sexto ensayo. Calcular la probabilidad p de obtener un seis al lanzar una vez ese dado.
9. **(Distribución de Poisson)** Aplicar el método de máxima probabilidad a la distribución de Poisson.

10. **(Distribución uniforme)** Demostrar que en el caso de los parámetros a y b de la distribución uniforme (ver la sección 23.5), la estimación de máxima probabilidad no puede obtenerse al igualar a cero la primera derivada. ¿Cómo es posible obtener estimaciones de máxima probabilidad en este caso?
11. Encontrar la estimación de máxima probabilidad de θ en la densidad $f(x) = \theta e^{-\theta x}$ si $x \geqq 0$ y $f(x) = 0$ si $x < 0$.
12. En el problema 11, encontrar la media μ, sustituirla en $f(x)$, encontrar la estimación de máxima probabilidad de μ, y demostrar que es idéntica a la estimación de que puede obtenerse a partir de eso para θ en el problema 11.
13. Calcular $\hat{\theta}$ en el problema 11 a partir de la muestra 1.9, 0.4, 0.7, 0.6, 1.4. En los mismos ejes graficar la función de distribución de la muestra $\tilde{F}(x)$ y la función de distribución $F(x)$ de la variable aleatoria, con $\theta = \hat{\theta}$. ¿Coinciden razonablemente? (En la sección 24.10 se considerará la bondad de ajuste de manera sistemática.)
14. Hacer la misma tarea que en el problema 13 si la muestra dada es 0.4, 0.7, 0.2, 1.1, 0.1.
15. Usando la tabla A9 del apéndice 5 y el método explicado en el problema 6 de la sección 24.2, obtener una muestra de tamaño 20 a partir de la distribución con densidad $f(x) = 0.5e^{-0.5x}$ si $x > 0$, $f(x) = 0$ si $x < 0$, y comparar las funciones de distribución de la muestra y de la población (como en el problema 13).

24.6 INTERVALOS DE CONFIANZA

La última sección se dedicó a las estimaciones puntuales de parámetros, y a continuación se analizarán las **estimaciones por intervalos**, empezando con una motivación general.

Siempre que se usan fórmulas matemáticas de aproximación, es necesario tratar de determinar cuánto puede desviarse cuando mucho el valor aproximado del valor verdadero desconocido. Por ejemplo, en el caso de los métodos de integración numérica existen "fórmulas de error" a partir de las cuales es posible calcular el máximo error posible (es decir, la diferencia entre el valor verdadero y el valor aproximado). Suponer que en cierto caso se obtienen 2.47 como valor aproximado de una integral dada y $\pm$ 0.02 como la máxima desviación posible respecto al valor exacto desconocido. Entonces se tiene la certeza de que los valores $2.47 - 0.02 = 2.45$ y $2.47 + 0.02 = 2.49$ "*incluyen*" el valor exacto desconocido; es decir, 2.45 es menor o igual que dicho valor y 2.49 es mayor que o igual que dicho valor.

Al estimar un parámetro θ, el problema correspondiente debe ser la determinación de dos cantidades numéricas que dependen de los valores muestrales e incluyen con certeza el valor desconocido del parámetro. Sin embargo, ya se sabe que a partir de una muestra no es posible obtener conclusiones 100% verídicas sobre una población correspondiente. Así, es necesario tener más modestia y modificar la tarea como sigue.

Elegir una probabilidad γ *próxima a* 1 (*por ejemplo*, $\gamma = 95\%$, 99% *u otra semejante*). *Luego, determinar dos cantidades* Θ_1 y Θ_2 *tales que la probabilidad de que* Θ_1 *y* Θ_2 *incluyan el valor exacto desconocido del parámetro* θ *sea igual a* γ.

Aquí la idea es sustituir el requisito imposible "con certeza" por el alcanzable de "con una probabilidad preasignada próxima a 1".

Los valores numéricos de estas dos cantidades deben calcularse a partir de una muestra dada $x_1, \cdots, x_n$. Para lograr lo anterior, los n valores muestrales se consideran como valores observados de n variables aleatorias $X_1, \cdots, X_n$ (con la misma distribu-

ción). Esta es la idea crucial. Entonces θ_1 y θ_2 son funciones de estas variables aleatorias y, por consiguiente, también son variables aleatorias. Por tanto, el requisito puede escribirse como

$$P(\Theta_1 \leqq \theta \leqq \Theta_2) = \gamma.$$

Si se conocen tales funciones Θ_1 y Θ_2 y se cuenta con una muestra, entonces a partir de lo anterior es posible calcular un valor θ_1 de Θ_1 y un valor θ_2 de Θ_2. El intervalo con puntos extremos θ_1 y θ_2 se denomina **intervalo de confianza**[1] o *estimaciones del intervalo* del parámetro desconocido θ, y se denota por

$$\boxed{\text{CONF}\,\{\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2\}.}$$

Los valores θ_1 y θ_2 se denominan **límites de confianza inferior y superior** para θ, respectivamente. El número γ se denomina **nivel de confianza.** Se acostumbra elegir = 95%, 99% y algunas veces, 99.9%

Resulta evidente que si se desea obtener una muestra y determinar un intervalo de confianza correspondiente, entonces γ es la probabilidad de obtener un intervalo que incluya el valor exacto desconocido del parámetro.

Por ejemplo, si se elige $\gamma = 95\%$, entonces es posible esperar que *aproximadamente* el 95% de las muestras que puedan obtenerse produzcan intervalos de confianza que contengan el valor θ, mientras que el 5% restante no lo incluya. Por tanto, la proposición "el intervalo de confianza incluye a θ" será correcta en *aproximadamente* 19 de 20 casos, mientras que en el caso restante será falsa.

Al elegir $\gamma = 99\%$ en vez de 95% es de esperar que la proposición sea correcta inclusive en *aproximadamente* 99 de 100 casos. Sin embargo, más tarde se verá que los intervalos correspondientes a = 99% son más grandes que los correspondientes a = 95%. Esta es la desventaja de incrementar γ.

Elección de γ. ¿Qué elegir en un caso concreto? Esta no es una cuestión matemática, sino que debe contestarse desde el punto de vista de la aplicación al considerar el riesgo que debe afrontarse al tomar una decisión falsa: ¿se trata del "problema" de mojarse o tomar un paraguas, o se trata de una cuestión de vida o muerte?

Resulta evidente que la incertidumbre implicada en este método y en los métodos que se analizarán proviene del proceso de muestreo, de modo que el experto en estadística debe estar preparado para asumir su responsabilidad en la comisión de equivocaciones. Sin embargo, esta persona no se encuentra en peores condiciones que un juez o un banquero, quienes están sujetos a las leyes del azar. Por el contrario, el experto en estadística posee la ventaja de que puede *medir* sus posibilidades de cometer una equivocación.

[1] La teoría y terminología modernas de los intervalos de confianza fueron desarrolladas por J. Neyman [*Annals of Mathematical Statistics* 6 (1935), 111-116]. Ver también la nota de pie de página en la siguiente sección.
En matemáticas, $\theta_1 \leqq \theta_2$ significa que está entre θ_1 y θ_2 y, a fin de evitar malentendidos, parece razonable caracterizar un intervalo de confianza por medio de un símbolo especial, como CONF.

Distribución normal: Intervalos de confianza para μ y σ^2

A continuación se considerarán métodos para obtener intervalos de confianza para la media (tablas 24.5, 24.6) y la variancia (tabla 24.7) de la **distribución normal**. La teoría correspondiente se explicará en la última parte de esta sección.

Ejemplo 1. Intervalo de confianza para μ de la distribución normal con σ^2 conocida.

Determine un intervalo de confianza de 95% para la media de una distribución normal con variancia σ^2 = 9, usando una muestra de n = 100 valores con media x = 5.

Solución. Primer paso. Se requiere $\gamma = 0.95$.
Segundo paso. La c correspondiente es igual a 1.960; ver la tabla 24.5.
Tercer paso. Se cuenta con x = 5.
Cuarto paso. Se requiere k = 1.960 · 3/ 100 = 0.588. Por tanto, $x - k = 4.412$, $x + k = 5.588$ y el intervalo de confianza es

$$\text{CONF}\,\{4.412 \leqq \mu \leqq 5.588\}.$$

Algunas veces lo anterior se escribe como $\mu = 5 \pm 0.588$, aunque en este libro no se usará esta notación, que puede prestarse a interpretaciones erróneas. ∎

Tabla 24.5.
Determinación de un intervalo de confianza para la media μ de una distribución normal con variancia conocida σ^2

Primer paso. Elegir un nivel de confianza (95%, 99% u otro semejante).

Segundo paso. Determinar el c correspondiente:

γ	0.90	0.95	0.99	0.999
c	1.645	1.960	2.576	3.291

Tercer paso. Calcular la media $\bar{x}$ de la muestra $x_1, \ldots, x_n$.

Cuarto paso. Calcular $k = \sigma/\sqrt{n}$. El intervalo de confianza para μ es

(1) $$\text{CONF}\,\{\bar{x} - k \leqq \mu \leqq \bar{x} + k\}.$$

Ejemplo 2. Tamaño de muestra necesario para un intervalo de confianza de longitud prescrita.

¿Qué tan grande debe ser n en el último ejemplo si se desea obtener un intervalo de confianza del 95% de longitud $L = 0.4$?

Solución. El intervalo (1) tiene la longitud $L = 2k = 2c\sigma/\sqrt{n}$. Al despejar n se obtiene

$$n = (2c\sigma/L)^2.$$

En este caso la respuesta es $n = (2 \cdot 1.960 \cdot 3/0.4)^2 = 870$.

En la figura 506 se muestra cómo decrece L cuando aumenta n y que para $\gamma = 99\%$ el intervalo de confianza es sustancialmente más grande que para $\gamma = 95\%$ (y el tamaño de la muestra n). ∎

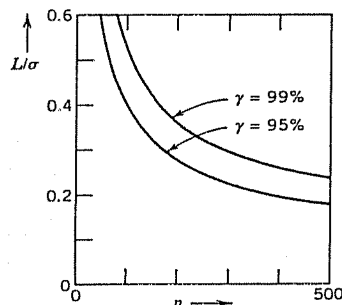


Figura 506. Longitud del intervalo de confianza (1)(medido en múltiplos de σ) como función del tamaño n de la muestra para $\gamma = 95\%$ y $\gamma = 99\%$.

Intervalo de confianza para la media si se desconoce la variancia. Hasta el momento se ha supuesto que se conocen las variancias. Si esto ya no es cierto, como en casi todas las aplicaciones, toda la teoría cambia, aunque los aspectos técnicos siguen siendo bastante semejantes. Así, usando menos información (se desconoce σ^2), es necesario esperar intervalos algo más grandes (lo que es cierto). Podría esperarse que la variancia de la muestra sea de utilidad (lo que también es cierto). En la tabla 24.6 se presentan los pasos. Este k difiere del k en la tabla 24.5 y c depende ahora de n y es necesario determinarlo a partir de la tabla A10 del apéndice 5. Esa tabla contiene valores z correspondientes a valores dados de la función de distribución

$$F(z) = K_m \int_{-\infty}^{z} \left(1 + \frac{u^2}{m}\right)^{-(m+1)/2} du$$

de la denominada **distribución t** de Student.[2] Aquí, m (= 1, 2, $\cdots$) es un parámetro denominado **número de grados de libertad** de la distribución. La constante K_m es tal que $F(\infty) = 1$. Por integración resulta que $K_m = \Gamma(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2})/[\sqrt{m\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2}m)]$ en donde Γ es la función gama (ver (24) en el apéndice 3).

Tabla 24.6.
Determinación de un intervalo de confianza para la media de una distribución normal con variancia desconocida σ^2

Primer paso. Elegir un nivel de confianza γ (95%, 99% u otro semejante).

Segundo paso. Determinar la solución c de la ecuación

(2) $$F(c) = \tfrac{1}{2}(1 + \gamma)$$

[2] Seudónimo de WILLIAM SEALY GOSSET (1876-1937), matemático inglés, quien descubrió la distribución t en 1907-1908.

a partir de la tabla de la distribución t con $n - 1$ grados de libertad (Tabla A10 del apéndice 5; n = tamaño de la muestra).

Tercer paso. Calcular la media $\bar{x}$ y la variancia s^2 de la muestra $x_1, \cdots, x_n$.

Cuarto paso. Calcular $k = sc/\sqrt{n}$. El intervalo de confianza es

(3) $$\text{CONF}\,\{\bar{x} - k \leqq \mu \leqq \bar{x} + k\}.$$

Ejemplo 3. Intervalos de confianza μ para de la distribución normal con σ^2 desconocida.

Usar la muestra de la tabla 24.2, sección 24.3, para determinar un intervalo de confianza del 99% para la media μ de la población correspondiente, suponiendo que la población es normal. (Esta suposición se justificará en la sección 24.10.)

Solución. Primer paso. Se requiere $\gamma = 0.99$.
Segundo paso. Como $n = 100$, se obtiene $c = 2.63$.
Tercer paso. Los cálculos dan $\bar{x} = 364.70$ y $s = \sqrt{720.1} = 26.83$.
Cuarto paso. Se encuentra $k = 26.83 \cdot 2.63/10 = 7.06$. Por tanto, el intervalo de confianza es

$$\text{CONF}\,\{357.64 \leqq \mu \leqq 371.76\}.$$

Por comparación, si se conociera y su valor fuese igual a 26.83, entonces la tabla 24.5 proporcionaría el valor $k = 2.576 \cdot 26.83\sqrt{100} = 6.91$, y CONF $\{357.79 \leqq \mu \leqq 371.61\}$. Esto difiere, aunque poco, del resultado precedente porque n es grande. Para n más pequeño la diferencia sería considerable, como se ilustra en la figura 507.

Intervalo de confianza para la variancia de la distribución normal. Ésta es la tercera tarea. En la tabla 24.7 se presentan los pasos, que son semejantes a los de las tablas 24.5 y 24.6, aunque ahora es necesario determinar dos números c_1 y c_2. Ambos se obtienen de la tabla A11 del apéndice 5, que contiene valores z correspondientes a los valores dados de la función de distribución $F(x) = 0$ si $z < 0$ y

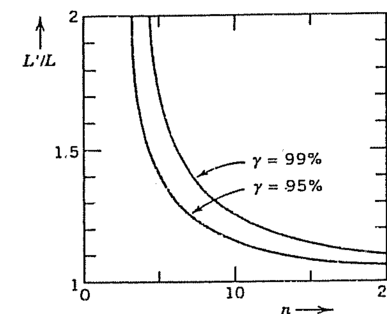


Figura 507. Razón de las longitudes L' y L de los intervalos de confianza (3) y (1) con $\gamma = 95\%$ y $\gamma = 99\%$ como función del tamaño de muestra n para s y σ iguales.

$$F(z) = C_m \int_0^z e^{-u/2} u^{(m-2)/2}\, du \quad \text{si} \quad z \geqq 0.$$

Ésta es la función de distribución de la denominada **distribución** χ^2 (*distribución ji cuadrada*); aquí, m (= 1, 2, $\cdots$) es un parámetro denominado **número de grados de libertad** de la distribución, y $C_m = 1/\left[2^{(m/2)}\Gamma\left(\frac{1}{2}m\right)\right]$

Ejemplo 4. Intervalo de confianza para la variancia de la distribución normal.

Usar la muestra de la tabla 24.2, sección 24.3 para determinar un intervalo de confianza del 95% para la variancia de la población correspondiente.

Solución. Primer paso. Se requiere $\gamma = 0.95$.
Segundo paso. Para $n - 1 = 99$, por interpolación lineal se encuentran $c_1 = 73.3$ y $c_2 = 128$.
Tercer paso. A partir de la tabla 24.2 se calcula $99s^2 = 71\,291$.
Cuarto paso. El intervalo de confianza es

$$\text{CONF}\{556 \leqq \sigma^2 \leqq 973\}.$$ ∎

Otras distribuciones. Los intervalos de confianza para la media y la variancia de otras distribuciones pueden obtenerse aplicando los métodos previos y ***muestras suficientemente grandes***. En términos *prácticos*, si la muestra indica que el sesgo de la distribución desconocida es pequeño, entonces deben considerarse muestras de tamaño $n = 20$ por lo menos a fin de obtener intervalos de confianza para μ y muestras de tamaño $n = 50$ por lo menos a fin de obtener intervalos de confianza para σ^2. La razón de este método se explicará al final de esta sección.

Tabla 24.7.
Determinación de un intervalo de confianza para la variancia σ^2 de una distribución normal, cuya media no requiere ser conocida

Primer paso. Elegir un nivel de confianza γ(95%, 99% u otro semejante).

Segundo paso. Determinar las soluciones c_1 y c_2 de las ecuaciones

(4) $$F(c_1) = \tfrac{1}{2}(1 - \gamma), \qquad F(c_2) = \tfrac{1}{2}(1 + \gamma)$$

a partir de la tabla de la distribución ji cuadrada con $n - 1$ grados de libertad (Tabla A11 del apéndice 5; n = tamaño de la muestra).

Tercer paso. Calcular $(n - 1)s^2$, en donde s^2 es la variancia de la muestra $x_1, \cdots, x_n$.

Cuarto paso. Calcular $k_1 = (n - 1)s^2/c_1$ y $k_2 = (n - 1)s^2/c_2$. El intervalo de confianza es

(5) $$\text{CONF}\{k_2 \leqq \sigma^2 \leqq k_1\}.$$

Fundamento teórico para la tabla 24.5

A continuación se analizará la teoría que justifica los métodos para obtener intervalos de confianza, usando la siguiente idea sencilla pero muy importante.

Hasta el momento, los valores $x_1, \cdots, x_n$ de una muestra se han considerado como n valores observados de una variable aleatoria simple X. Tales n valores también pueden considerarse como observaciones simples de n variables aleatorias $X_1, \cdots, X_n$ que tienen la misma distribución (la distribución de X) y son independientes, porque se supone que los valores muestrales son independientes.

Para deducir (1) en la tabla 24.5 se requiere el

Teorema 1 (Suma de variables aleatorias normales independientes)

Suponer que $X_1, \cdots, X_n$ son variables aleatorias normales independientes con medias $\mu_1, \cdots, \mu_n$ y variancias $\mu_1^2, \cdots, \mu_n^2$, respectivamente. Entonces la variable aleatoria

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

es normal con media

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n$$

y variancia

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2.$$

Las proposiciones sobre μ y σ se concluyen de manera inmediata de los teoremas 1 y 3 en la sección 23.8. La demostración de que X es normal puede encontrarse en la obra citada en el apéndice 1 como referencia [G3].

Con base en este teorema, en el teorema 1 de la sección 23.7 y en el teorema 2(b) de la sección 23.5, se obtiene el siguiente teorema sobre la distribución de la suma de variables aleatorias normales independientes distribuidas idénticamente.

Teorema 2. *Si $X_1, \cdots, X_n$ son variables aleatorias normales independientes, cada una con media μ y variancia σ^2, entonces la variable aleatoria*

(6) $$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$$

es normal con media μ y variancia σ^2/n, y la variable aleatoria

(7) $$Z = \sqrt{n}\,\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}$$

es normal con media 0 y variancia 1.

Deducción de (1). A partir de la motivación general presentada al inicio de esta sección, se recuerda que el objetivo es encontrar dos variable aleatorias Θ_1 y Θ_2 tales que

(8) $$P(\Theta_1 \leqq \mu \leqq \Theta_2) = \gamma,$$

en donde γ es elegido, y la muestra proporciona valores observados θ_1 de Θ_1 y θ_2 de Θ_2, que conducen luego a un intervalo de confianza CONF $\{\theta_1 \leq \mu \leq \theta_2\}$. En este caso, lo anterior puede lograrse como sigue. Se elige un número γ entre 0 y 1 y a partir de la tabla A8, apéndice 5, se determina c de modo que $P(-c \leq Z \leq c) = \gamma$. (Si $\gamma = 0.90$, etc., los valores de c se obtienen en la tabla 24.5.) La desigualdad $-c \leq Z \leq c$ con Z dado por (7) es

$$-c \leqq \sqrt{n}\,(\bar{X} - \mu)/\sigma \leqq c$$

y es posible transformarla en una desigualdad para μ. De hecho, al multiplicar por $\sigma/\sqrt{n}$ se obtiene $-k \leq \bar{X} - \mu \leq k$, en donde $k = c\sigma/\sqrt{n}$. Al multiplicar por −1 y sumar $\bar{X}$ se obtiene

(9) $$\bar{X} + k \geqq \mu \geqq \bar{X} - k.$$

Así, $P(-c \leq Z \leq c) = \gamma$ es equivalente a $P(\bar{X} - k \leq \mu \leq \bar{X} + k) = \gamma$. Esta expresión es de la forma (8) con $\Theta_1 = \bar{X} - k$ y $\Theta_2 = \bar{X} + k$. Con las suposiciones establecidas, lo anterior significa que con probabilidad γ las variables aleatorias $\bar{X} - k$ y $\bar{X} + k$ asumirán valores que incluyen la media desconocida μ. Al considerar los valores muestrales $x_1, \cdots, x_n$ de la tabla 24.5 como valores observados de n variables aleatorias normales independientes $X_1, \cdots, X_n$, se observa que la media $\bar{x}$ de la muestra es un valor observado de (6), y al insertar este valor en (9) se obtiene (1).

Fundamento teórico para la tabla 24.6

Para deducir (3) en la tabla 24.6 se requiere el

Teorema 3. *Sean $X_1, \cdots, X_n$ variables aleatorias normales independientes con la misma media y la misma variancia σ^2. Entonces la variable aleatoria*

(10) $$T = \sqrt{n}\,\frac{\bar{X} - \mu}{S}$$

tiene una distribución t con n - 1 grados de libertad; aquí X está dada por (6) *y*

(11) $$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X})^2.$$

La demostración de este teorema se encuentra en la obra citada en el apéndice 1 como referencia [G3].

Deducción de (3). Es semejante a la deducción de (1). Se elige un número entre 0 y 1 y a partir de la tabla A10, apéndice 5, se determina un número c con $n - 1$ grados de libertad de modo que

(12) $$P(-c \leqq T \leqq c) = F(c) - F(-c) = \gamma.$$

Como la distribución t es simétrica, se tiene $F(-c) = 1 - F(c)$, y (12) asume la forma (2). Al transformar $-c \leq T \leq c$ en (12) como antes se obtiene

(13) $$\bar{X} - K \leqq \mu \leqq \bar{X} + K \qquad \text{en donde} \qquad K = cS/\sqrt{n},$$

y (12) se vuelve $P(\bar{X} - K \leq \mu \leq \bar{X} + K) = \gamma$. Al insertar los valores observados $\bar{x}$ de $\bar{X}$ y s^2 de S^2 en (13) se obtiene (3).

Fundamento teórico para la tabla 24.7

Para deducir (5) en la tabla 24.7 se requiere el

Teorema 4. *Con las hipótesis del teorema 3, la variable aleatoria*

(14) $$Y = (n - 1)\frac{S^2}{\sigma^2}$$

con S^2 dada por (11) *tiene una distribución ji cuadrada con $n - 1$ grados de libertad.*

La demostración puede consultarse en la obra citada en el apéndice 1 como referencia [G3].

Deducción de (5). Es semejante a la deducción de (1) y (3). Se elige un número γ entre 0 y 1 y se determinan c_1 y c_2 a partir de la tabla A11, apéndice 5, de modo que [ver (4)]

$$P(Y \leqq c_1) = F(c_1) = \tfrac{1}{2}(1 - \gamma), \qquad P(Y \leqq c_2) = F(c_2) = \tfrac{1}{2}(1 + \gamma).$$

Al restar se obtiene

$$P(c_1 \leqq Y \leqq c_2) = P(Y \leqq c_2) - P(Y \leqq c_1) = \gamma.$$

Al transformar $c_1 \leqq Y \leqq c_2$ con Y dado por (14) en una desigualdad para σ^2, se obtiene

$$\frac{n-1}{c_2}S^2 \leqq \sigma^2 \leqq \frac{n-1}{c_1}S^2.$$

Al insertar el valor observado s^2 de S^2 se obtiene (5).

Intervalos de confianza para otras distribuciones

En el caso de otras distribuciones también es posible obtener intervalos de confianza aplicando los métodos de las tablas 24.5 y 24.7, aunque en este caso es necesario usar muestras grandes. Lo anterior se concluye a partir del siguiente teorema fundamental.

Teorema 5 (Teorema del límite central)

Sean $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ *variables aleatorias independientes que tienen la misma función de distribución y por consiguiente la misma media* μ *y la misma variancia* σ^2. *Sea* $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$. *Entonces la variable aleatoria*

(15) $$Z_n = \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

es asintóticamente normal *con media 0 y variancia 1; es decir, la función de distribución* $F_n(x)$ *de* Z_n *satisface*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du.$$

Una demostración puede consultarse en la obra citada en el apéndice 1 como referencia [G3].

Se sabe que si $X_1, \cdots, X_n$ son variables aleatorias independientes con la misma media μ y la misma variancia σ^2, entonces su suma $X = X_1 + \cdots + X_n$ tiene las siguientes propiedades.

(A) X tiene media $n\mu$ y variancia $n\sigma^2$ (por los teoremas 1 y 3 en la sección 23.8)
(B) Si tales variables son normales, entonces X es normal (por el teorema 1).

Si tales variables no son normales, entonces (B) no se cumple, pero si n es grande, entonces X es aproximadamente normal (ver el teorema 5) y esto justifica la aplicación de los métodos para la distribución normal a otras distribuciones, aunque en tal caso es necesario usar muestras grandes.

Problemas de la sección 24.6

1. ¿Por qué en la mayor parte de los casos las estimaciones de intervalos son más útiles que las estimaciones puntuales?
2. Encontrar un intervalo de confianza del 95% para la media μ de una población normal con desviación estándar 5.00, usando la muestra 32, 24, 20, 38, 30.
3. Determinar un intervalo de confianza del 99% para la media μ de una población normal con desviación estándar 2.2, usando la muestra 28, 24, 31, 27, 22.
4. Determinar un intervalo de confianza del 95% para la media μ de una población normal con variancia $\sigma^2 = 9$, usando una muestra de tamaño 100 con media 38.25.
5. ¿Qué sucede a la longitud del intervalo en el problema 4 si el tamaño de la muestra se reduce a 25?
6. Obtener un intervalo de confianza del 99% para la media de una población normal con variancia $\sigma^2 = 0.36$ a partir de la figura 506, usando una muestra de tamaño 290 con media 16.30. (Este problema simplemente debe ayudar a comprender el significado de la figura.)
7. ¿Qué tamaño de muestra es necesario a fin de obtener un intervalo de confianza del 95% (1) de longitud (a) 2σ, (b) σ?

Suponiendo que las poblaciones de las cuales se han tomado las siguientes muestras son normales, determinar un intervalo de confianza del 99% para la media μ de la población.

8. 325, 320, 325, 335.
9. Una muestra de las longitudes de 20 tornillos, con media 10.20 cm y variancia 0.04 cm².
10. El punto de inflamación (°F) del aceite Diesel (2-D) 124, 127, 126, 122, 124.
11. Encontrar un intervalo de confianza del 95% para el porcentaje de automóviles en cierta carretera que tienen mal ajustados los frenos, usando una muestra aleatoria de 500 automóviles detenidos en un retén situado en la carretera, de los cuales 87 tienen mal ajustados los frenos.
12. Encontrar un intervalo de confianza del 99% para el parámetro p de la distribución binomial, usando el resultado de Pearson en el último renglón de la tabla 23.1 de la sección 23.2.

Suponiendo que las poblaciones de las cuales se han tomado las siguientes muestras son normales, determinar un intervalo de confianza del 95% para la variancia σ^2 de la población.

13. Una muestra de tamaño 30 con variancia 0.0007.
14. El esfuerzo máximo a la tensión (klb/pulg²) de acero de aleación acero (Maraging H) a temperatura ambiente: 251, 255, 258, 253, 253, 252, 250, 252, 255, 256.
15. La energía media (keV) de un grupo retardado de neutrones (Grupo 3, vida media 6.2 s), para la fisión del uranio^{235}: 435, 451, 430, 444, 438.
16. La emisión de monóxido de carbono (gramos por milla) de cierto tipo de automóvil para pasajeros (con velocidad de crucero de 55 mph): 17.3, 17.8, 18.0, 17.7, 18.2, 17.4, 17.6, 18.1.
17. Si X es normal con media 27 y variancia 16, ¿qué distribuciones tienen $-X$, $3X$ y $5X - 2$?
18. Si X_1 y X_2 son variables aleatorias normales independientes con medias 23 y 4 y variancias 3 y 1, respectivamente, ¿qué distribución tiene $4X_1 - X_2$?
19. Una máquina llena cajas que pesan Y lb con X lb de sal, en donde X y Y son normales con medias 100 lb y 5 lb y desviaciones estándar 1 lb y 0.5 lb, respectivamente. ¿Qué porcentaje de cajas llenas que pesen entre 104 lb y 106 lb es de esperarse?
20. Si el peso X de sacos de cemento está normalmente distribuido con una media de 40 kg y una desviación estándar de 2 kg, ¿cuántos sacos puede transportar un camión de modo que la probabilidad de que la carga total exceda 2000 kg sea de 5%?

24.7 PRUEBA DE HIPÓTESIS. DECISIONES

El concepto de intervalos de confianza recientemente analizado y aplicado es característico de la estadística moderna, y el otro concepto igualmente importante (e inclusive más) es el de la prueba de hipótesis. Aquí, una **hipótesis** estadística es una suposición sobre la distribución de una variable aleatoria, por ejemplo, que una cierta distribución tenga una media de 20.3, etc. Una **prueba** estadística de una hipótesis es un procedimiento en el que la muestra se usa para determinar si es posible "**no rechazar**" ("**aceptar**") la hipótesis, es decir, actuar como si fuese verdadera, o bien, "**rechazarla**", es decir, actuar como si fuese falsa.

Las pruebas se aplican con bastante frecuencia, y primero es necesario preguntarse por qué son importantes. Bien: a menudo tienen que tomarse decisiones en situaciones en que influyen las variaciones debidas al azar. Si tiene que elegirse entre, por ejemplo, dos posibilidades, a menudo la decisión podría basarse en el resultado de alguna prueba.[3]

[3] Alrededor de 1930, los expertos en estadística JERZY NEYMAN (estadunidense; 1894-1981) y EGON SHARPE PEARSON (inglés; 1895-1980), hijo de Karl Pearson (ver la nota de pie de página 6), iniciaron el desarrollo de una teoría sistemática de las pruebas.

Por ejemplo, si se desea usar cierto torno para producir tornillos cuyo diámetro debe estar entre límites dados y se permite que cuando mucho haya el 2% de tornillos defectuosos, entonces es posible tomar una muestra de 100 tornillos producidos en ese torno y usarlos para probar la hipótesis $\sigma^2 = \sigma_0^2$ de que la variancia σ^2 de la población correspondiente tiene cierto valor σ_0^2, que se elige de modo que pueda esperarse que no haya más del 2% de defectuosos. Una **alternativa** significativa en este caso es $\sigma^2 > \sigma_0^2$. Dependiendo del resultado de la prueba, no se rechaza la hipótesis $\sigma^2 = \sigma_0^2$ (y en consecuencia, se utiliza ese torno) o se le rechaza, afirmando que $\sigma^2 > \sigma_0^2$ y se utiliza un mejor torno. En este caso se dice que la prueba indica una **desviación significativa** de σ^2 con respecto de σ^2, es decir, una desviación que no es simplemente provocada por la inevitable influencia de los factores del azar, sino por la falta de precisión del torno.

En otros casos, es posible que se desee comparar dos cosas, por ejemplo, dos medicamentos distintos, dos métodos para realizar cierto trabajo, la exactitud de dos métodos de medición, la calidad de los artículos producidos con dos herramientas diferentes, etc. Dependiendo del resultado de una prueba idónea, se decide administrar uno de los dos medicamentos, introducir un mejor método de trabajo, etc.

Las siguientes son fuentes típicas de hipótesis.

1. La hipótesis proviene de un requisito de calidad. (La experiencia sobre la calidad alcanzable puede adquirirse produciendo un mayor número de artículos con cuidado especial.)
2. La hipótesis se basa en valores conocidos de experiencias pasadas.
3. La hipótesis resulta de una teoría que se desea verificar.
4. La hipótesis es una conjetura pura causada por observaciones ocasionales.

Se comenzará con un ejemplo introductorio sencillo que ilustrará los conceptos básicos.

Ejemplo 1. Prueba de una hipótesis.

El nacimiento de un solo bebé puede considerarse como un experimento con dos resultados posibles, a saber, H: *Nacimiento de un niño* y N: *Nacimiento de una niña*. Intuitivamente, debe sentirse que ambos resultados son más o menos equiprobables. Sin embargo, en la literatura especializada a menudo se afirma que los nacimientos de niños son un tanto más frecuentes que los de niñas. Con base en esta situación, desea probarse la hipótesis de que los dos resultados H y N tienen la misma probabilidad. Si la probabilidad del resultado H se denota por p, entonces la hipótesis a probar es $p = 50\% = 0.5$. Debido a las afirmaciones mencionadas, se elige la alternativa $p > 0.5$.

Para la prueba se usa una muestra de $n = 3000$ bebés de una ciudad con aproximadamente 250 000 habitantes; 1 578 de tales bebés eran niños.

Si la hipótesis es verdadera, se espera que en una muestra de $n = 3000$ nacimientos haya *aproximadamente* 1 500 niños. Si la alternativa se cumple, entonces en promedio se esperan más de 1500 niños. Por tanto, si el número de niños observados en la realidad es mucho mayor que 1500, entonces este hecho puede usarse como una indicación de que la hipótesis puede ser falsa, y rechazarla.

Para realizar la prueba se procede como sigue. Primero se determina un valor crítico c. Debido a la alternativa, c será mayor que 1 500. (Un poco más adelante se proporcionará un método para determinar c). Luego, si el número de niños observados es mayor que c, se rechaza la hipótesis. Si ese número no es mayor que c, no se rechaza la hipótesis.

La cuestión fundamental ahora es cómo debe elegirse c, es decir, en dónde debe trazarse la línea divisoria entre las pequeñas desviaciones aleatorias y las grandes desviaciones significativas. Personas diferentes pueden tener distintas opiniones, y para contestar la pregunta deben usarse argumentos matemáticos, que en este caso son muy sencillos, como se mostrará a continuación.

c se determina de modo que si la hipótesis es verdadera, entonces la probabilidad de observar más de c niños en la muestra de 3000 nacimientos sencillos es un número muy pequeño, denominado α. Se acostumbra tomar $\alpha = 1\%$ o 5%. Al elegir $\alpha = 1\%$ (o 5%) se corre el riesgo de que aproximadamente en 1 de 100 casos (en 20, casos, respectivamente) se rechace la hipótesis aun cuando sea verdadera. Más tarde se volverá a este punto. Se elegirá $\alpha = 1\%$ y se considerará la variable aleatoria

$$X = \textit{Número de niños en 3000 nacimientos.}$$

Suponiendo que la hipótesis es verdadera, el valor crítico c se obtiene a partir de la ecuación

$$(1) \qquad P(X > c)_{p=0.5} = \alpha = 0.01.$$

(Esta suposición se indica por medio del subíndice $p = 0.5$.) Si el valor observado 1578 es mayor que c, se rechaza la hipótesis. Si $1578 \leq c$, no se rechaza la hipótesis.

Para determinar c a partir de (1) debe conocerse la distribución de X. Para el objetivo que se persigue, la distribución binomial es un modelo suficientemente exacto. Por tanto, si la hipótesis es verdadera, entonces X tiene una distribución binomial con $p = 0.5$ y $n = 3000$. Esta distribución puede aproximarse por la distribución normal con media $\mu = np = 1500$ y variancia $\sigma^2 = npq = 750$; ver la sección 23.7. [Para simplificar se hará caso omiso del término 0.5 en (11), sección 23.7.] La curva de la densidad se muestra en la figura 508. Entonces, aplicando (1) se obtiene

$$P(X > c) = 1 - P(X \leqq c) \approx 1 - \Phi\left(\frac{c - 1500}{\sqrt{750}}\right) = 0.01.$$

En la tabla A8 del apéndice 5 se obtiene $(c - 1500)/\sqrt{750} = 2.326$. Por tanto, $c = 1564$. Como $1578 > c$, se rechaza la hipótesis y se afirma que $p > 0.5$, es decir, se afirma que el nacimiento de niños es más frecuente que el de niñas. Así se completa la prueba.

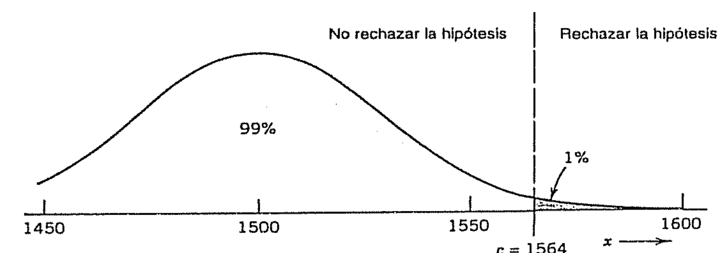


Figura 508. Densidad (aproximada) de X en el ejemplo 1 si la hipótesis es verdadera. Valor crítico $c = 1564$.

Términos estándares

La **hipótesis** a probar algunas veces se denomina **hipótesis nula**, y una contrasuposición (como $p > 0.5$ en el ejemplo 1) se denomina *hipótesis alternativa* o, brevemente, **alternativa**. El número α (o 100 α %) se denomina **nivel de significancia** de la prueba y c se denomina **valor crítico**. La región que contiene los valores para los que se rechaza la hipótesis se denomina **región de rechazo** o **región crítica**. La región de valores para los cuales no se rechaza la hipótesis se denomina **región de aceptación**. Una elección frecuente de α es 5%.

Clases de alternativas (figura 509)

Sea θ un parámetro desconocido en una distribución, y suponer que se desea probar la hipótesis $\theta = \theta_0$. Entonces hay tres tipos principales de alternativas, a saber,

(2) $$\theta > \theta_0$$

(3) $$\theta < \theta_0$$

(4) $$\theta \neq \theta_0.$$

(2) y (3) se denominan **alternativas unilaterales**, y (4) se denomina **alternativa bilateral**. (2) es del tipo considerado en el ejemplo 1 (en donde $\theta_0 = p = 0.5$ y $\theta = p > 0.5$); c está a la derecha de θ_0 y la región de rechazo se extiende desde c hasta ∞(figura 509, parte superior). Esta prueba se denomina **prueba lateral derecha**. En el caso de (3), el número c está a la izquierda de θ_0, la región de rechazo se extiende desde c hasta $-\infty$ (figura 509, parte central) y la prueba se denomina **prueba lateral izquierda**. Las pruebas de ambos tipos se denominan **pruebas unilaterales**. En el caso de (4) se tienen dos valores críticos c_1 y c_2 ($> c_1$), la región de rechazo se extiende desde c_1 hasta $-\infty$ y desde c_2 hasta ∞, y la prueba se denomina **prueba bilateral**.

Los tres tipos de alternativas revisten importancia práctica. Por ejemplo, (3) puede aparecer en relación con la prueba de la resistencia de un material. θ_0 puede ser entonces la resistencia requerida, y la alternativa caracteriza una debilidad indeseable. Por supuesto, se acepta el caso de que el material sea más resistente que lo requerido, y por consiguiente no es necesario prestarle atención especial. (4) puede ser importante, por ejemplo, en relación con el diámetro de un eje. Así, θ_0 puede ser el diámetro requerido, y ejes más delgados son tan malos como los más gruesos, de

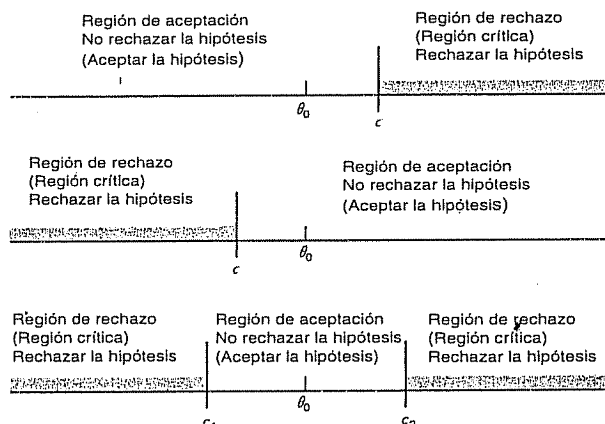


Figura 509. Prueba en el caso de la alternativa (2) (parte superior de la figura), alternativa (3) (parte central) y alternativa (4).

modo que es necesario observar las desviaciones indeseables con respecto a θ_0 en ambas direcciones.

Tipos de errores en las pruebas

Las pruebas casi siempre implican **riesgos de tomar decisiones falsas:**

(I) Rechazar una hipótesis verdadera **(error del tipo I),**
(II) Aceptar una hipótesis falsa **(error del tipo II).**

Lo anterior es evidente porque a partir de muestras no es posible obtener conclusiones absolutamente verdaderas sobre poblaciones. No pueden *evitarse* estos errores, aunque a continuación se mostrará que es posible calcular las probabilidades α y β, respectivamente, de su ocurrencia; lo que es más importante, existen formas y medios para elegir niveles de riesgos idóneos (es decir, valores de α y β) que es posible afrontar dependiendo de la naturaleza del problema. (Recuerde por la sección 24.6: ¿Se trata de una cuestión de mojarse o no, o se trata de un problema de vida o muerte?) Lo anterior se analizará de manera sistemática para una prueba de una hipótesis $\theta = \theta_0$ contra la alternativa que es un solo número[4] θ_1, para simplificar. Se hace $\theta_1 > \theta_0$, de modo que se tiene una prueba lateral derecha. Para una prueba lateral izquierda o para una prueba bilateral el análisis es bastante semejante.

Se elige un $c > \theta_0$ crítico (como en la parte superior de la figura 509, aplicando métodos que serán analizados más tarde). A partir de una muestra dada $x_1, \cdots, x_n$, entonces es posible calcular un valor

$$\hat{\theta} = g(x_1, \cdots, x_n)$$

con una g idónea (cuya elección constituye una cuestión importante en el análisis ulterior; por ejemplo, se toma $g = (x_1 + \cdots + x_n)/n$ en el caso en que θ es la media). Si $\hat{\theta} > c$, se rechaza la hipótesis. Si $\hat{\theta} > c$, se acepta. Aquí, el valor $\hat{\theta}$ puede considerarse como un valor observado de la variable aleatoria

$$\hat{\Theta} = g(X_1, \cdots, X_n)$$

debido a que x_j puede considerarse como un valor observado de $X_j, j = 1, \cdots, n$. En esta prueba hay dos posibilidades de cometer un error, como sigue.

Error del tipo I (ver la tabla 24.8). La hipótesis es verdadera pero se rechaza (por tanto, se acepta la alternativa), porque Θ asume un valor $\hat{\theta} > c$. Resulta evidente que la probabilidad de cometer tal error es igual a

(5) $$\boxed{P(\hat{\Theta} > c)_{\theta = \theta_0} = \alpha.}$$

[5] Si la prueba en el siguiente ejemplo muestra que las variancias difieren significativamente, entonces elegir dos muestras no demasiado pequeñas del mismo tamaño $n_1 = n_2 = n$ (> 30, por ejemplo), usar el hecho de que (12) es un valor observado de una variable alcatoria aproximadamente normal con media 0 y variancia 1, y proceder como en el ejemplo 2.

α se denomina **nivel de significancia** de la prueba, como ya se mencionó.

Error del tipo II (ver la tabla 24.8). La hipótesis es falsa pero se acepta porque $\hat{\theta}$ asume un valor $\hat{\theta} \leqq c$. La probabilidad de cometer tal error se denota por β; así,

(6) $$P(\hat{\Theta} \leqq c)_{\theta=\theta_1} = \beta.$$

Tabla 24.8. Errores del tipo I y del tipo II en la prueba de una hipótesis $\theta = \theta_0$ contra una alternativa $\theta = \theta_1$.

		Verdad desconocida	
		$\theta = \theta_0$	$\theta = \theta_1$
Aceptada	$\theta = \theta_0$	True decision $P = 1 - \alpha$	Error del tipo II $P = \beta$
	$\theta = \theta_1$	Error del tipo I $P = \alpha$	Decisión verdadera $P = 1 - \beta$

$\eta = 1 - \beta$ se denomina **poder** de la prueba. Resulta evidente que esta es la probabilidad de evitar cometer un error del tipo II.

Las fórmulas (5) y (6) muestran que tanto α como β dependen de c, y sería conveniente elegir c de modo que estas probabilidades de cometer errores sean lo más pequeñas posible. Sin embargo, en la figura 510 se muestra que estos son requisitos contradictorios porque, a fin de que α decrezca es necesario desplazar c a la derecha, pero entonces crece β. En la práctica primero se elige α (5%, y algunas veces 1%), luego se determina c y finalmente se calcula β. Si β es grande, de modo que el poder $\eta = 1 - \beta$ es pequeño, entonces debe repetirse la prueba, eligiendo una muestra más grande, por razones que se presentarán dentro de poco.

Si la alternativa no es un solo número sino que es de la forma (2)–(4), entonces β se vuelve una función de θ. Esta función $\beta(\theta)$ se denomina **característica de operación** (CO) de la prueba y su curva se denomina **curva CO**. Resulta evidente que en

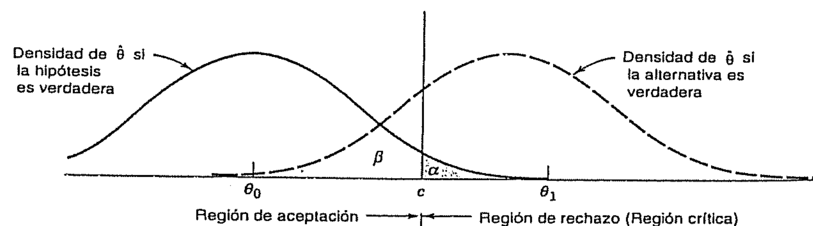


Figura 510. Ilustración de los errores del tipo I y II al probar la hipótesis $\theta = \theta_0$ contra una alternativa $\theta = \theta_1$ ($> \theta_0$).

este caso $\eta = 1 - \beta$ también depende de θ, y esta función $\eta(\theta)$ se denomina **función de poder** de la prueba.

Por supuesto, a partir de una prueba que conduce a la aceptación de cierta hipótesis θ_0 *no* se concluye que esta es la única hipótesis posible o la mejor hipótesis posible. Por tanto, las expresiones **"no rechazar"** o **"dejar de rechazar"** son quizá mejores que el término **"aceptar"**.

Pruebas en el caso de la distribución normal

Los siguientes ejemplos explicarán pruebas de hipótesis importantes desde el punto de vista práctico.

Ejemplo 2. Prueba para la media de la distribución normal con variancia conocida.

Sea X una variable aleatoria normal con variancia $\sigma^2 = 9$. Usar una muestra de tamaño $n = 10$ con media $\bar{x}$ para probar la hipótesis $\mu = \mu_0 = 24$ contra los tres tipos de alternativas, a saber

$$(a)\quad \mu > \mu_0 \qquad (b)\quad \mu < \mu_0 \qquad (c)\quad \mu \neq \mu_0.$$

Solución. Se elige el nivel de significancia $\alpha = 0.05$. Se obtendrá una estimación de la media a partir de

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n).$$

Si la hipótesis es verdadera, $\bar{X}$ es normal con media $\mu = 24$ y variancia $\sigma^2/n = 0.9$, ver el teorema 2, sección 24.6. Por tanto, el valor crítico c puede obtenerse a partir de la tabla A8 en el apéndice 5.

Caso (a). c se determina a partir de $p(\bar{X} > c)_{\mu=24} = \alpha = 0.05$, es decir,

$$P(\bar{X} \leqq c)_{\mu=24} = \Phi\left(\frac{c-24}{\sqrt{0.9}}\right) = 1 - \alpha = 0.95.$$

La tabla A8, apéndice 5 da $(c-24)/\sqrt{0.9} = 1.645$, y $c = 25.56$, que es mayor que μ_0, como en la parte superior de la figura 509. Si $\bar{x} \leqq 25.56$, se acepta la hipótesis. Si $\bar{x} > 25.56$, se rechaza. El poder de la prueba es (figura 511)

(7)
$$\eta(\mu) = P(\bar{X} > 25.56)_\mu = 1 - P(\bar{X} \leqq 25.56)_\mu$$
$$= 1 - \Phi\left(\frac{25.56 - \mu}{\sqrt{0.9}}\right) = 1 - \Phi(26.94 - 1.05\mu).$$

Caso (b). El valor crítico c se obtiene a partir de la ecuación

$$P(\bar{X} \leqq c)_{\mu=24} = \Phi\left(\frac{c-24}{\sqrt{0.9}}\right) = \alpha = 0.05.$$

La tabla A8, apéndice 5 da $c = 24 - 1.56 = 22.44$. Si $\bar{x} \geqq 22.44$, se acepta la hipótesis. Si $\bar{x} < 22.44$, se rechaza. El poder de la prueba es

(8) $$\eta(\mu) = P(\bar{X} \leqq 22.44)_\mu = \Phi\left(\frac{22.44 - \mu}{\sqrt{0.9}}\right) = \Phi(23.65 - 1.05\mu).$$

Caso (c). Como la distribución normal es simétrica, se eligen c_1 y c_2 equidistantes de $\mu = 24$, por ejemplo, $c_1 = 24 - k$ y $c_2 = 24 + k$, y k se determina a partir de

$$P(24 - k \leqq \overline{X} \leqq 24 + k)_{\mu=24} = \Phi\left(\frac{k}{\sqrt{0.9}}\right) - \Phi\left(-\frac{k}{\sqrt{0.9}}\right) = 1 - \alpha = 0.95.$$

La tabla A8, apéndice 5 da $k/\sqrt{0.9} = 1.960$, $k = 1.86$. Por tanto, $c_1 = 24 - 1.86 = 22.14$ y $c_2 = 24 + 1.86 = 25.86$. Si $\bar{x}$ no es menor que c_1 y no es mayor que c_2, se acepta la hipótesis. En caso contrario se rechaza. El poder de la prueba es (figura 511)

$$\eta(\mu) = P(\overline{X} < 22.14)_\mu + P(\overline{X} > 25.86)_\mu = P(\overline{X} < 22.14)_\mu + 1 - P(\overline{X} \leqq 25.86)_\mu$$

(9) $$= 1 + \Phi\left(\frac{22.14 - \mu}{\sqrt{0.9}}\right) - \Phi\left(\frac{25.86 - \mu}{\sqrt{0.9}}\right)$$

$$= 1 + \Phi(23.34 - 1.05\mu) - \Phi(27.26 - 1.05\mu).$$

Por consiguiente, la característica de operación $\beta(\mu) = 1 - \eta(\mu)$ (ver antes) es (figura 512)

$$\beta(\mu) = \Phi(27.26 - 1.05\mu) - \Phi(23.34 - 1.05\mu).$$

Si se toma una muestra más grande, por ejemplo de tamaño $n = 100$ (en vez de 10), entonces $\sigma^2/n = 0.09$ (en lugar de 0.9) y los valores críticos son $c_1 = 23.41$ y $c_2 = 24.59$, como puede comprobarse fácilmente. Así, la característica de operación de la prueba es

$$\beta(\mu) = \Phi\left(\frac{24.59 - \mu}{\sqrt{0.09}}\right) - \Phi\left(\frac{23.41 - \mu}{\sqrt{0.09}}\right)$$

$$= \Phi(81.97 - 3.33\mu) - \Phi(78.03 - 3.33\mu).$$

En la figura 512 se muestra que la curva CO correspondiente es más pronunciada que para $n = 10$. Lo anterior significa que el incremento de n mejoró la prueba. En cualquier caso práctico, n se elige lo más pequeño posible, aunque tan grande que la prueba muestre desviaciones entre μ y μ_0 que revistan interés práctico. Por ejemplo, si se tiene interés en desviaciones de ± 2 unidades, por la figura 512 se observa que $n = 10$ es demasiado pequeño porque cuando $\mu = 24 - 2 = 22$ o $\mu = 24 + 2 = 26$, entonces β es casi el 50%. Por otra parte, se observa que $n = 100$ basta para ese fin.

Ejemplo 3. Prueba para la media de la distribución normal con variancia desconocida.

Se midió la resistencia a la tensión de una muestra de $n = 16$ cuerdas de cáñamo (con diámetro de 3 pulgadas). La media de la muestra fue $\bar{x} = 4482$ kg, y su desviación estándar fue $s = 115$ kg (N. C. Wiley, 41st Annual Meeting of the American Society for Testing Materials). Suponiendo que la resistencia a la tensión es una variable aleatoria normal, pobar la hipótesis $\mu_0 = 4500$ Kg contra la alternativa

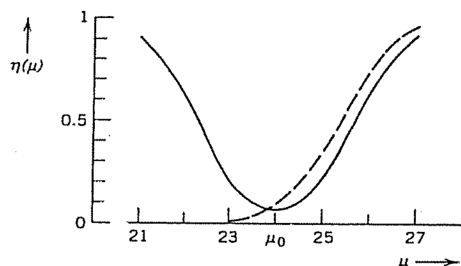


Figura 511. Poder ( ) en el ejemplo 2, caso (*a*) (línea discontinua) y caso (*c*).

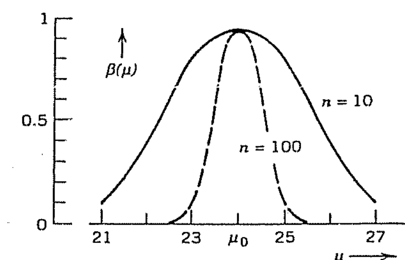


Figura 512. Curvas de la característica de operación (curvas CO) en el ejemplo 2, caso (*c*), para dos tamaños de muestra diferentes *n*.

$\mu_1 = 4400$ kg. Aquí, μ_0 puede ser un valor proporcionado por el fabricante, mientras que μ_1 puede ser resultado de alguna experiencia previa.

Solución. Se elige el nivel de significancia $\alpha = 5\%$. Si la hipótesis es verdadera, entonces por el teorema 3 de la sección 24.6 se concluye que la variable aleatoria

$$T = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu_0}{S} = 4\,\frac{\overline{X} - 4500}{S}$$

tiene una distribución t con $n - 1 = 15$ grados de libertad. La prueba es lateral izquierda. El valor crítico c se obtiene a partir de la ecuación

$$P(T < c)_{\mu_0} = \alpha = 0.05.$$

La tabla A10 del apéndice 5 da $c = -1.75$. A partir de la muestra, como un valor observado de T se obtiene $t = 4(4482 - 4500)/115 = -0.626$. Se ve que $t > c$ y se acepta la hipótesis. Para obtener valores numéricos del poder de la prueba se requieren tablas denominadas tablas t no centrales de Student; esta cuestión no será abordada aquí. ∎

Ejemplo 4. Prueba para la variancia de la distribución normal.

Usar una muestra de tamaño $n = 15$ y la variancia de la muestra $s^2 = 13$ de una población normal para probar la hipótesis $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 10$ contra la alternativa $\sigma^2 = \sigma_1^2 = 20$.

Solución. Se elige el nivel de significancia $\sigma = 5\%$. Si la hipótesis es verdadera, entonces

$$Y = (n - 1)\,\frac{S^2}{\sigma_0^2} = 14\,\frac{S^2}{10} = 1.4S^2$$

tiene una distribución ji cuadrada con $n - 1 = 14$ grados de libertad, por el teorema 4 de la sección 24.6. Por

$$P(Y > c) = \alpha = 0.05, \qquad \text{es decir,} \qquad P(Y \leqq c) = 0.95,$$

y la tabla A11 del apéndice 5 con 14 grados de libertad se obtiene $c = 23.68$. Este es el valor crítico de Y. Por tanto, a $S^2 = \sigma_0^2 Y/(n - 1) = 0.714Y$ corresponde el valor crítico $c^* = 0.714 \cdot 23.68 = 16.91$. Como $s^2 < c^*$, se acepta la hipótesis

Si la alternativa es verdadera, la variable

$$Y_1 = 14\frac{S^2}{\sigma_1^2} = 0.7S^2$$

tiene una distribución ji cuadrada con 14 grados de libertad. Por tanto, el poder de la prueba es

$$\eta = P(S^2 > c^*)_{\sigma^2=20} = P(Y_1 > 0.7c^*)_{\sigma^2=20} = 1 - P(Y_1 \leqq 11.84)_{\sigma^2=20} \approx 62\%$$

y se observa que el riesgo del tipo II es muy grande, a saber, 38%. A fin de disminuir este riesgo debe incrementarse el tamaño de la muestra. ∎

Ejemplo 5. Comparación de las medias de dos distribuciones normales.

Usando una muestra $x_1, \cdots, x_{n_1}$ de una distribución normal con media desconocida μ_1 y una muestra $y_1, \cdots, y_{n_2}$ de otra distribución normal con media desconocida μ_2, desea probarse la hipótesis de que las medias son iguales, $\mu_1 = \mu_2$, contra una alternativa, por ejemplo, $\mu_1 > \mu_2$. No es necesario conocer las variancias, aunque se supone que son iguales.[5] Dos casos revisten importancia práctica:

Caso A. La muestras son del mismo tamaño. Además, cada valor de la primera muestra corresponde precisamente a un valor de la otra, ya que de la misma persona o cosa resultan valores correspondientes (**comparación pareada**); por ejemplo, dos mediciones de la misma cosa por dos métodos diferentes, o dos mediciones de los dos ojos del mismo animal; de manera más general, pueden provenir de pares de individuos o cosas *semejantes*, por ejemplo, gemelos idénticos, pares de neumáticos delanteros usados del mismo automóvil, etc. Entonces, deben formarse las diferencias de valores correspondientes y, aplicando el método del ejemplo 3, probar la hipótesis de que la población que corresponde a las diferencias tiene media 0. Si puede elegirse, ese método es mejor que el que se proporciona a continuación.

Caso B. Las dos muestras son independientes y no necesariamente tienen el mismo tamaño. Entonces es posible proceder como se indica a continuación; se supone que la alternativa es $\mu_1 > \mu_2$. Se elige un nivel de significancia α. Luego se calculan las medias de las muestras $\bar{x}$ y $\bar{y}$, así como $(n_1 - 1)s_1^2$, y $(n_2 - 1)s_2^2$, en donde s_1^2 y s_2^2 son las variancias de las muestras. Usando la tabla A10, apéndice 5 con $n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad, ahora c se determina partir de

$$P(T \leqq c) = 1 - \alpha. \tag{10}$$

Por último, se calcula

$$t_0 = \sqrt{\frac{n_1 n_2(n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}\,\frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}}. \tag{11}$$

Puede demostrarse que este es un valor observado de una variable aleatoria que tiene una distribución t con $n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad, siempre que la hipótesis sea verdadera. Si $t_0 \leqq c$, se acepta la hipótesis. Si $t_0 > 0$, se rechaza.

Si la alternativa es $\mu_1 \neq \mu_2$, entonces (10) debe sustituirse por

$$P(T \leqq c_1) = 0.5\alpha, \qquad P(T \leqq c_2) = 1 - 0.5\alpha. \tag{10*}$$

Observar que para muestras del mismo tamaño $n_1 = n_2 = n$, la fórmula (11) se reduce a

$$t_0 = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}. \tag{12}$$

[5] Después del trabajo pionero del experto en estadística y biólogo inglés KARL PEARSON (1857-1936), fundador de la escuela inglesa de estadística, y de W. S. GOSSET (ver la nota de pie de página en la sección 24.6), el experto en estadística inglés Sir RONALD AYLMER FISHER (1890-1962), profesor de eugenesia en Londres (1933-1943) y de genética en Cambridge, Inglaterra (1943-1957), tuvo una gran influencia en el desarrollo ulterior de la estadística moderna.

Para ilustrar los cálculos se considerarán las dos muestras

	105	108	86	103	103	107	124	105
y	89	92	84	97	103	107	111	97

que indican el rendimiento relativo de soldadores de hoja de lata en dos condiciones de trabajo diferentes (J. J. B. Worth, *Journal of Industrial Engineering* 9 (1958), 249-253). Suponiendo que las poblaciones correspondientes son normales y tienen la misma variancia, se probará la hipótesis $\mu_1 = \mu_2$ contra la alternativa $\mu_1 \neq \mu_2$. (La igualdad de las variancias se probará en el siguiente ejemplo.)

Solución. Se encuentra

$$\bar{x} = 105.125, \quad \bar{y} = 97.500, \quad s_1^2 = 106.125, \quad s_2^2 = 84.000.$$

Se elige el nivel de significancia $\alpha = 5\%$. Por (10*), con $0.5 = 2.5\%$, $1 - 0.5\alpha = 97.5\%$ y la tabla A10 del apéndice 5 con 14 grados de libertad, se obtiene $c_1 = -2.15$ y $c_2 = 2.15$. Al aplicar la fórmula (12) con $n = 8$ el obtiene el valor

$$t_0 = \sqrt{8}\cdot 7.625/\sqrt{190.125} = 1.56.$$

Como $c_1 \leqq t_0 \leqq c_2$, se acepta la hipótesis $\mu_1 = \mu_2$ de que bajo ambas condiciones el rendimiento medio es el mismo.

El caso A es válido para el ejemplo, ya que los dos primeros valores muestrales corresponden a un cierto tipo de trabajo, los dos siguientes se obtuvieron en otro tipo de trabajo, etc. Así, es posible usar las diferencias

16 16 2 6 0 0 13 8

de valores muestrales correspondientes y el método del ejemplo 3 para probar la hipótesis $\mu = 0$, donde μ es la media de la población correspondiente a las diferencias. Como alternativa lógica se toma $\mu = 0$. La media de la muestra es $\bar{d} = 7.625$, y la variancia de la muestra es $s^2 = 45.696$. Por tanto

$$t = \sqrt{8}\,(7.625 - 0)/\sqrt{45.696} = 3.19.$$

Por $P(T \leq c_1) = 2.5\%$, $P(T \leq c_2) = 97.5\%$ y la tabla A10 del apéndice 5 con $n - 1 = 7$ grados de libertad se obtiene $c_1 = -2.37$, $c_2 = 2.37$ y se rechaza la hipótesis porque $t = 3.19$ no está entre c_1 y c_2. Por tanto, en esta prueba, en la que se usó más información (aunque las mismas muestras), indica que la diferencia en el rendimiento es significativa.

Ejemplo 6. Comparación de las variancias de dos distribuciones normales.

Utilizando las dos muestras del último ejemplo, probar la hipótesis $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$; suponer que las poblaciones correspondientes son normales y la naturaleza del experimento sugiere la alternativa $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

Solución. Se encuentran $s_1^2 = 106.125$, $s_2^2 = 84.000$. Se toma el nivel de significancia $\alpha = 5\%$. Usando $P(V \leq c) = 1 - \alpha = 95\%$ y la tabla A12 del apéndice 5, con $(n_1 - 1, n_2 - 1) = (7, 7)$ grados de libertad, se determina $c = 3.79$. Por último, se calcula $v_0 = s_1^2/s_2^2 = 1.26$. Como $v_0 \leq c$, se acepta la hipótesis. Si $v_0 > c$, debe rechazarse.

Esta prueba se justifica por el hecho de que v_0 es un valor observado de una variable aleatoria que presenta la denominada ***distribución F*** con $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ grados de libertad, en el supuesto de que la hipótesis es verdadera. (La demostración se encuentra en la obra citada en el apéndice 1 como referencia [G3].) La distribución F con (m, n) grados de libertad fue introducida por R. A. Fisher[6] y tiene la función de distribución $F(z) = 0$ si $z < 0$ y

$$F(z) = K_{mn}\int_0^z t^{(m-2)/2}(mt + n)^{-(m+n)/2}\,dt \qquad (z \geqq 0), \tag{13}$$

en donde $K_{mn} = m^{m/2}n^{n/2}\Gamma(1/2m + 1/2n)/\Gamma(1/2m)\Gamma(1/2n)$. (Con respecto a Γ, consultar el apéndice 3.) ∎

Esta larga sección contiene las ideas y conceptos fundamentales sobre prueba de hipótesis, junto con aplicaciones típicas, y quizá el estudiante quiera repasarla rápidamente antes de continuar, ya que en las siguientes secciones se abordarán una adaptación de tales ideas a tareas que revisten gran importancia práctica y pruebas resultantes en relación con el control de calidad, la aceptación (o rechazo) de bienes producidos, etc.

Problemas de la sección 24.7

1. Probar $\mu = 0$ contra $\mu > 0$, suponiendo normalidad y usando la muestra 1, −1, 1, 3, −8, 6, 0 (desviaciones del azimut [múltiplos de 0.01 radianes] en alguna revolución de un satélite). Elegir $\alpha = 5\%$.
2. Aplicando los datos de Buffon de la tabla 23.1 (sección 23.2), probar la hipótesis de que la moneda es legal, es decir, que las caras y las cruces tienen la misma probabilidad de ocurrencia, contra la alternativa de que las caras son más probables que las cruces. (Elegir $\alpha = 5\%$.)
3. Realizar la misma prueba que en el problema 2, usando los datos de Pearson de la tabla 23.1.
4. Suponiendo normalidad y una variancia conocida $\sigma^2 = 4$, probar la hipótesis $\mu = 30.0$ contra la alternativa (a) $\mu = 28.5$, (b) $\mu = 30.7$, usando una muestra de tamaño 10 con media $\bar{x} = 28.5$ y eligiendo $\alpha = 5\%$.
5. ¿Cómo cambia el resultado del problema 4(a) si se usa una muestra más pequeña, por ejemplo, de tamaño 4, y los otros datos ($\bar{x} = 28.5$, $\alpha = 5\%$) permanecen iguales?
6. Determinar el poder de la prueba en el problema 4(a).
7. ¿Cuál es la región de rechazo en el problema 4 en el caso de una prueba bilateral con $\mu = 5\%$?
8. Usando el ejemplo 1 de la sección 24.4, probar la hipótesis $\mu = 0.80$ pulg (la longitud indicada en la caja) contra la alternativa $\mu \neq 0.80$ pulg. (Suponer normalidad y elegir $\alpha = 5\%$.)
9. Una empresa vende aceite en latas que contienen 1000 g de aceite por lata, y tiene interés en conocer si el peso medio difiere de manera significativa con respecto a 1000 g en el nivel del 5%, en cuyo caso la máquina llenadora tiene que ajustarse. Establecer una hipótesis y una alternativa y ejecutar la prueba, suponiendo normalidad y usando una muestra de 20 operaciones de llenado que tiene una media de 996 g y desviación estándar de 5 g.
10. Si una muestra de 50 neumáticos de cierto tipo tiene una vida útil de 32 000 millas y desviación estándar de 4 000 millas, ¿puede afirmar el fabricante que la vida media verdadera de tales neumáticos es superior a 30 000 millas? Establecer y probar una hipótesis correspondiente a un nivel del 5%, suponiendo normalidad.
11. Si al efectuar mediciones simultáneas de voltaje eléctrico usando dos tipos distintos de voltímetro se obtienen las diferencias (en volts) 0.8, 0.2, -0.3, 0.1, 0.0, 0.5, 0.7, 0.2, ¿puede afirmarse al nivel del 5% que no existe diferencia significativa en la calibración de los dos tipos de instrumento? (Suponer normalidad.)

[6] Después del trabajo pionero del experto en estadística y biólogo inglés KARL PEARSON (1857-1936), fundador de la escuela inglesa de estadística, y de W. S. GOSSET (ver la nota de pie de página en la sección 24.6), el experto en estadística inglés Sir RONALD AYLMER FISHER (1890-1962), profesor de eugenesia en Londres (1933-1943) y de genética en Cambridge, Inglaterra (1943-1957), tuvo una gran influencia en el desarrollo ulterior de la estadística moderna.

12. Si un medicamento estándar cura aproximadamente al 70% de las personas que padecen cierta enfermedad y un nuevo medicamento curó a 148 de los 200 primeros pacientes en los que se experimentó, ¿es posible concluir que el nuevo medicamento es mejor? (Elegir $\alpha = 5\%$.)
13. Suponer que en el pasado la desviación estándar de los pesos de ciertos paquetes de 25.0 oz llenados por una máquina era de 0.4 oz. Probar la hipótesis H_0: $\sigma = 0.4$ contra la alternativa H_1: $\sigma > 0.4$ (un incremento indeseable), usando una muestra de 10 paquetes con desviación estándar 0.5 oz y suponiendo normalidad. (Elegir $\alpha = 5\%$.)
14. Suponer que en un equipo eléctrico que opera con baterías es menos costoso reemplazar todas las baterías a intervalos fijos que reemplazar cada batería individualmente cuando pierde poder, en el supuesto de que la desviación estándar de la vida útil es menor que cierto límite, por ejemplo, menor que 5 horas. Establecer y aplicar una prueba idónea, usando una muestra de 28 valores de vidas útiles con desviación estándar $s = 3.5$ horas y suponiendo normalidad; elegir $\alpha = 5\%$.
15. La marca de gasolina A fue usada en 9 automóviles semejantes bajo condiciones idénticas. La muestra correspondiente de 9 valores (millas por galón) tuvo una media de 20.2 y desviación estándar de 0.5. En las mismas condiciones, con la marca de gasolina B de alta potencia se obtuvo una muestra de 10 valores con media 21.8 y desviación estándar 0.6. ¿El millaje de B es significativamente mejor que el de A? (Probar al nivel del 5%; suponer normalidad.)
16. Las dos muestras 50, 90, 100, 90, 110, 80 y 110, 110, 120, 110, 130, 110, 120 son valores de las diferencias de temperaturas (°C) del hierro en dos etapas de la fundición, tomadas de dos crisoles diferentes. ¿La variancia de la primera población es mayor que la de la segunda? (Suponer normalidad. Elegir $\alpha = 5\%$.)
17. Usando muestras de tamaños 10 y 16 con variancias $s_1^2 = 50$ y $s_2^2 = 30$, y suponiendo normalidad de las poblaciones correspondientes, probar la hipótesis H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ contra la alternativa $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$. Elegir $\alpha = 5\%$.
18. Suponiendo normalidad y variancias iguales, y usando muestras independientes con $n_1 = 9$, $\bar{x} = 12$, $s_1 = 2$, $n_2 = 9$, $\bar{y} = 15$, $s_2 = 2$, probar H_0: $\mu_1 = \mu_2$ contra $\mu_1 \neq \mu_2$; elegir $\alpha = 5\%$.
19. Demostrar que para una distribución normal los dos tipos de errores en una prueba de la hipótesis H_0: $\mu = \mu_0$ contra la alternativa H_1: $\mu = \mu_1$ pueden hacerse tan pequeños como se quiera (no cero) al tomar una muestra suficientemente grande.
20. Graficar las curvas CO en el ejemplo 2, casos (*a*) y (*b*).

24.8 CONTROL DE CALIDAD

Las ideas sobre pruebas pueden adaptarse y extenderse de varias maneras a fin de atender necesidades prácticas necesarias en ingeniería y otros campos. Esto se mostrará en las secciones restantes para algunas de las tareas más importantes que pueden resolverse por métodos estadísticos. Como primera área de problemas, se analizará el control de calidad industrial.

Ningún proceso de producción es tan perfecto que todos los productos sean completamente iguales. Siempre existe una pequeña variación causada por un gran número de pequeños factores incontrolables y, por tanto, debe considerarse como una variación aleatoria. Es importante asegurarse de que los productos tienen valores requeridos (por ejemplo, longitud, resistencia o cualquier propiedad que puede ser importante en un caso particular). Con este fin se ejecuta una prueba de la hipótesis de que los productos tienen la propiedad requerida, por ejemplo $\mu = \mu_0$, en donde μ_0 es un valor requerido. Si se hace esto después de que se ha producido un lote completo (por ejemplo, un lote de 10 000 tornillos), la prueba dirá qué tan buenos o qué tan

malos son los productos, pero es evidente que es demasiado tarde para modificar los resultados indeseables. Es mucho mejor efectuar la prueba mientras se está realizando el proceso de producción. Lo anterior se lleva a cabo a intervalos regulares de tiempo (por ejemplo, cada 30 minutos o cada hora) y recibe el nombre de **control de calidad**. En cada ocasión se toma una muestra del mismo tamaño, en la práctica, de 3 a 10 artículos. Si se rechaza la hipótesis, se suspende el proceso de producción y se busca el problema que provoca la desviación.

Si se detiene el proceso de producción, aun cuando se esté llevando a cabo correctamente, se comete un error del tipo I. Si no se suspende el proceso, aun cuando algo no marche bien, se comete un error del tipo II (ver la sección 24.7).

El resultado de cada prueba se marca en forma gráfica sobre lo que se conoce como **diagrama de control**. Este procedimiento fue propuesto por W. A. Shewhart en 1924 y hace particularmente eficaz al control de calidad.

Diagrama de control para la media

En la parte superior de la figura 513 se proporcionan una ilustración y un ejemplo de un diagrama de control. En este diagrama de control para la media se indican el **límite inferior de control** LIC, la **recta central de control** RC y el **límite superior de control** LSC. Los dos **límites de control** corresponden a los valores críticos c_1 y c_2 del caso (*c*) del ejemplo 2 en la sección 24.7. Tan pronto como una media de la muestra cae fuera del intervalo definido por los límites de control, se rechaza la hipótesis y se afirma que el proceso de producción está "fuera de control", es decir, se afirma que ha ocurrido una desviación en el nivel del proceso. Es necesario hacer algo siempre que un punto se sale de los límites.

Si los límites de control se eligen demasiado holgados, no es posible detectar desviaciones del proceso. Por otra parte, si los límites de control se consideran demasiado restringidos, no es posible dejar avanzar el proceso debido a la búsqueda frecuente de problemas inexistentes. El nivel de significancia usual es $\alpha = 1\%$. Con base en el teorema 2 de la sección 24.6 y en la tabla A8 del apéndice 5, se observa que en el caso de la distribución normal los límites de control correspondientes para la media son

$$(1) \qquad \text{LSC} = \mu_0 - 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad \text{LIC} = \mu_0 + 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Aquí se supone que se conoce σ. En caso de que no se conozca σ, es posible calcular las desviaciones estándar de las 20 o 30 primeras muestras y tomar su media aritmética como una aproximación de σ. La línea quebrada que une las medias de la figura 513 es meramente para mostrar los resultados de manera efectiva.

Diagrama de control para la variancia

Además de la media, a menudo se controlan la variancia, la desviación estándar o el intervalo de variación ("rango"). A fin de establecer un diagrama de control para la variancia en el caso de una distribución normal puede aplicarse el método del ejemplo 4 de la sección 24.7 para determinar los límites de control. Se acostumbra utilizar sólo un límite de control, a saber, un límite superior de control. A partir del ejemplo 4 de la sección 24.7, se observa que este límite es

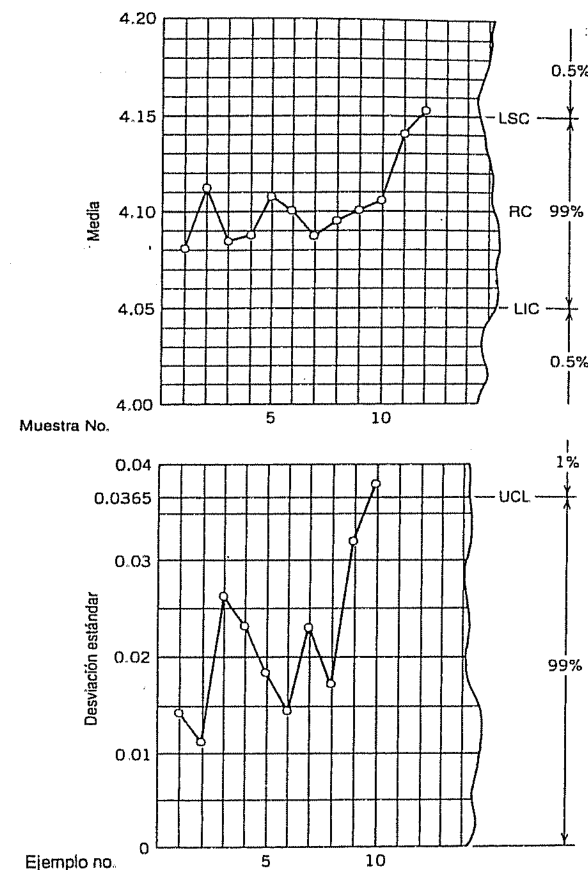


Figura 513. Diagramas de control para la media (parte superior de la figura) y la desviación estándar en el caso de la muestra de la tabla 24.9.

$$(2) \qquad \text{LSC} = \frac{\sigma^2 c}{n-1}$$

en donde c se obtiene de la ecuación

$$P(Y > c) = \alpha, \qquad \text{es decir,} \qquad P(Y \leqq c) = 1 - \alpha$$

y la tabla de la distribución ji cuadrada (tabla A11 en el apéndice 5) con $n - 1$ grados de libertad; aquí α(5% o 1%, por ejemplo) es la probabilidad de que un valor observado s^2 de S^2 en una muestra sea mayor que el límite superior de control.

Tabla 24.9.
Doce muestras de cinco valores cada una
(diámetro de pequeños cilindros, medidos en milímetros)

Número de muestra	Valores muestrales					$\bar{x}$	s	R
1	4.06	4.08	4.08	4.08	4.10	4.080	0.014	0.04
2	4.10	4.10	4.12	4.12	4.12	4.112	0.011	0.02
3	4.06	4.06	4.08	4.10	4.12	4.084	0.026	0.06
4	4.06	4.08	4.08	4.10	4.12	4.088	0.023	0.06
5	4.08	4.10	4.12	4.12	4.12	4.108	0.018	0.04
6	4.08	4.10	4.10	4.10	4.12	4.100	0.014	0.04
7	4.06	4.08	4.08	4.10	4.12	4.088	0.023	0.06
8	4.08	4.08	4.10	4.10	4.12	4.096	0.017	0.04
9	4.06	4.08	4.10	4.12	4.14	4.100	0.032	0.08
10	4.06	4.08	4.10	4.12	4.16	4.104	0.038	0.10
11	4.12	4.14	4.14	4.14	4.16	4.140	0.014	0.04
12	4.14	4.14	4.16	4.16	4.16	4.152	0.011	0.02

Si se deseara un diagrama de control para la variancia con ambos límites de control, LSC y LIC, entonces estos límites serían

(3) $$\text{LIC} = \frac{\sigma^2 c_1}{n-1} \quad \text{y} \quad \text{LSC} = \frac{\sigma^2 c_2}{n-1}$$

en donde c_1 y c_2 se obtienen de las ecuaciones

(4) $$P(Y \leqq c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{y} \quad P(Y \leqq c_2) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

y la tabla A11 en el apéndice 5 con $n - 1$ grados de libertad.

Diagrama de control para la desviación estándar

De manera semejante, a fin de establecer un diagrama de control para la desviación estándar se necesita un límite superior de control

(5) $$\text{LSC} = \frac{\sigma\sqrt{c}}{\sqrt{n-1}}$$

que se obtiene a partir de (2). Por ejemplo, en la tabla 24.9 se tiene $n = 5$. Suponiendo que la población correspondiente es normal con desviación estándar $\sigma = 0.02$ y tomando $\sigma = 1\%$, entonces con base en la ecuación

$$P(Y \leqq c) = 1 - \alpha = 99\%$$

y la tabla A11 en el apéndice 5 con 4 grados de libertad, se obtiene el valor crítico $c = 13.28$ y, por (5), el valor correspondiente

$$\text{LSC} = \frac{0.02\sqrt{13.28}}{\sqrt{4}} = 0.0365,$$

que se muestra en la parte inferior de la figura 513.

A partir de (3) se obtiene un diagrama de control para la desviación estándar, con límites de control tanto superior como inferior.

Diagrama de control para el intervalo de variación ("rango")

En vez de controlar la variancia o la desviación estándar, a menudo se controla el **rango** R (= mayor valor muestral menos menor valor muestral). Puede demostrarse que en el caso de la distribución normal la desviación estándar es proporcional a la esperanza de la variable aleatoria R^* para la cual R es un valor observado, por ejemplo, $\sigma = \lambda_n E(R^*)$, en donde el factor de proporcionalidad λ_n depende del tamaño de la muestra n y tiene los valores

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda_n = \sigma/E(R^*)$	0.89	0.59	0.49	0.43	0.40	0.37	0.35	0.34	0.32

n	12	14	16	18	20	30	40	50
$\lambda_n = \sigma/E(R^*)$	0.31	0.29	0.28	0.28	0.27	0.25	0.23	0.22

Como R depende sólo de dos valores muestrales, proporciona menos información sobre la muestra que s. Resulta evidente que mientras mayor sea el tamaño n de la muestra, más información se pierde al usar R en vez de s. Una regla empírica es usar s cuando n es mayor que 10.

Problemas de la sección 24.8

1. Suponer que una máquina para llenar latas con aceite lubricante se ajusta de modo que genere llenados que constituyen una población normal con media igual a 1 gal y desviación estándar de 0.03 gal. Establecer un diagrama de control del tipo mostrado en la figura 513 para controlar la media (es decir, encontrar LIC y LSC), suponiendo que el tamaño de la muestra es 6.
2. **(Diagrama de control tres sigma)** Demostrar que, en el problema 1, el requisito del nivel de significancia $\alpha = 0.3\%$ conduce a LIC = $\mu - 3\sigma/\sqrt{n}$ y LSC = $+ 3\sigma/\sqrt{n}$ y encontrar los valores numéricos correspondientes.
3. ¿Qué tamaño de muestra debe tomarse en el problema 1 si se desea que LIC y LSC estén un poco más próximos entre sí, por ejemplo, LSC − LIC = 0.05, sin modificar el nivel de significancia?
4. ¿Cómo cambia el significado de los límites de control (1) si se aplica un diagrama de control con estos límites en el caso de una población que no es normal?
5. ¿Cómo debe modificarse el tamaño de la muestra al controlar la media de una población normal, si se desea que LSC − LIC disminuya hasta la mitad de su valor original?
6. ¿Qué LSC y LIC deben usarse, en vez de (1), si en lugar de $\bar{x}$ se emplea la suma $x_1 + \cdots, + x_n$ de los valores muestrales? Determinar estos límites en el caso de la figura 513.

7. De un lote de producción de tornillos se tomaron 10 muestras de tamaño 2. Los valores (longitud en milímetros) son

Muestra número	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Longitud	27.4	27.4	27.5	27.3	27.9	27.6	27.6	27.8	27.5	27.3
	27.6	27.4	27.7	27.4	27.5	27.5	27.4	27.3	27.4	27.7

Suponiendo que la población es normal con media 27.5 y variancia 0.024 y usando (1), establecer un diagrama de control para la media y trazar la gráfica de las medias de las muestras sobre tal diagrama.

8. Graficar las medias de las 10 muestras siguientes (espesor de arandelas, valores codificados) sobre un diagrama de control para medias, suponiendo que la población es normal con media 5 y desviación estándar 1.55.

Tiempo	8:00	8:30	9:00	9:30	10:00	10:30	11:00	11:30	12:00	12:30
Valores muestrales	3	3	5	7	7	4	5	6	5	5
	4	6	2	5	3	4	6	4	5	2
	8	6	5	4	6	3	4	6	6	5
	4	8	6	4	5	6	6	4	4	3

9. Trazar la gráfica de los intervalos de variación de las muestras del problema 8, sobre un diagrama de control de los mismos.

10. Trazar la gráfica de $\lambda_n = \sigma/E(R^*)$ como una función de n. ¿Cuál es la razón por la que λ_n es una función monótona decreciente de n?

11. Dado que la presencia de un punto fuera de los límites de control para la media indica problemas, ¿con qué frecuencia se estaría cometiendo la equivocación de buscar problemas inexistentes si se utilizan (a) límites una sigma, (b) límites dos sigmas? (Suponer normalidad.)

12. ¿Cómo se indicaría el desgaste progresivo de la herramienta en la operación de un torno automático por medio de un diagrama de control para la media? Contestar la misma pregunta para un cambio repentino en la posición de la herramienta en esa operación.

13. **(Número de defectuosos)** Encontrar fórmulas para LSC, RC y LIC (correspondientes a límites 3 σ) en el caso de un diagrama de control para el número de defectuosos, suponiendo que en un estado de control estadístico la fracción de defectuosos es p.

14. **(Diagrama de control de atributos)** De una población de recipientes se tomaron 20 muestras de tamaño 100. Los números de defectuosos (recipientes con fugas) en esas muestras (en el orden observado) fueron

3 7 6 1 4 5 4 9 7 0 5 6 13 4 9 0 2 1 12 8

Por experiencia previa se sabía que la fracción promedio de defectuosos es $p = 5\%$ siempre que el proceso de producción se desarrolle correctamente. Utilizando la distribución binomial, establecer un *diagrama de fracción de defectuosos* (también denominado **diagrama** p), es decir, considerar LIC = 0 y determinar el LSC para la fracción de defectuosos (en porcentaje), usando los límites de tres sigma, donde σ^2 es la variancia de la variable aleatoria X = *Fracción de defectuosos en una muestra de tamaño* 100. ¿El proceso está dentro de los límites de control?

15. **(Número de defectos por unidad)** Se utiliza un diagrama, denominado *diagrama c* o *diagrama de defectos por unidad*, para el control del número X de defectos por unidad (por ejemplo, el número de defectos por 10 metros de papel, el número de remaches perdidos en el ala de un avión, etc.) (a) Establecer fórmulas para RC, LIC y LSC correspondientes a $\mu \pm 3\sigma$, suponiendo que X tiene una distribución de Poisson. (b) Calcular RC, LIC y LSC en un proceso de control del número de imperfecciones en vidrio laminado; suponer que este número es 2.5 por lámina en promedio cuando el proceso está bajo control.

24.9 MUESTREO DE ACEPTACIÓN

El muestreo de aceptación es otro procedimiento de prueba que reviste importancia práctica. Se aplica en la producción en masa cuando un **productor** suministra a un **consumidor** lotes de N artículos. En una situación de este tipo es necesario tomar la decisión de aceptar o rechazar un lote individual (por ejemplo, una caja de tornillos), dependiendo de la calidad del lote. A menudo esta decisión se basa en el resultado de la inspección de una muestra de tamaño n, tomada del lote, y en la determinación del número de artículos defectuosos (denominados por brevedad **defectuosos**) que hay en la muestra, es decir, artículos que no satisfacen las especificaciones (tamaño, color, resistencia o cualquier característica que se considera importante). Si el número de defectuosos x en la muestra no es mayor que un número especificado c ($< n$), se acepta el lote. Si $x > c$, se rechaza el lote. c se denomina *número permisible de defectuosos* o **número de aceptación**. Resulta evidente decir que el productor y el consumidor deben convenir en cierto **plan de muestreo**, es decir, en cierto tamaño n de la muestra y en un número de aceptación c. Un plan de este tipo se denomina **plan de muestreo simple** porque se basa en una sola muestra. Posteriormente se mencionarán *planes de muestreo doble* en los que se utilizan dos muestras.

Sea A el evento de que se acepte un lote. Es evidente que la probabilidad correspondiente $P(A)$ no sólo depende de n y de c, sino también del número de defectuosos en el lote. Sea M este número. Además, el número x de defectuosos en una muestra dada es un valor observado de una variable aleatoria X. Suponer que se muestrea sin reemplazo; entonces X tiene una distribución hipergeométrica (ver la sección 23.6), de modo que

$$(1) \qquad P(A) = P(X \leqq c) = \sum_{x=0}^{c} \binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x} \Big/ \binom{N}{n}.$$

Si $M = 0$ (no hay ningún defectuoso en el lote), entonces X debe asumir el valor 0 y

$$P(A) = \binom{0}{0}\binom{N}{n} \Big/ \binom{N}{n} = 1.$$

Para n y c fijos y M creciente, la probabilidad $P(A)$ disminuye. Si $M = N$ (todos los artículos del lote son defectuosos), entonces X debe asumir el valor n y se tiene $P(A) = P(X \leqq c)$ porque $c < n$.

La razón $\theta = M/N$ se denomina **fracción de artículos defectuosos** en el lote. Observar que $M = N\theta$, y que (1) puede escribirse como

$$(2) \qquad \boxed{P(A;\,\theta) = \sum_{x=0}^{c} \binom{N\theta}{x}\binom{N-N\theta}{n-x} \Big/ \binom{N}{n}.}$$

Dado que θ puede asumir uno de los $N + 1$ valores $0, 1/N, 2/N, \cdots, N/N$, entonces la probabilidad $P(A)$ está definida únicamente para estos valores. Para n y c fijos, la gráfica de $P(A)$ puede trazarse como una función de θ. Éstos son $N + 1$ puntos. Así, por estos puntos puede hacerse pasar una curva suave que se denomina **curva característica de operación** (curva CO) del plan de muestreo considerado.

Ejemplo 1. Plan de muestreo simple.

Suponer que ciertas brocas se empacan en cajas de 20 y se aplica el siguiente plan de muestreo simple: se extrae una muestra de dos brocas y la caja correspondiente se acepta si y sólo si las dos están en buenas condiciones. En este caso, $N = 20$, $n = 2$, $c = 0$ y (2) asume la forma

$$P(A;\theta) = \binom{20\theta}{0}\binom{20-20\theta}{2}\Big/\binom{20}{2} = \frac{(20-20\theta)(19-20\theta)}{380}.$$

Los valores numéricos son

θ	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	$\cdots$
$P(A;\theta)$	1.00	0.90	0.81	0.72	0.63	$\cdots$

En la figura 514 se muestra la curva CO.

En la mayor parte de los casos prácticos, θ es pequeño (menor que 10%). En muchos casos, el tamaño N del lote es muy grande (1000, 10 000, etc.), de modo que la distribución hipergeométrica dada en (1) y (2) puede aproximarse por la distribución binomial con $p = \theta$. Entonces, si n es tal que $n\theta$ es moderado (por ejemplo, menor que 20), esa distribución puede aproximarse por la distribución de Poisson con media $\mu = n\theta$. Así, por (2) se tiene que

$$(3) \qquad P(A;\theta) \sim e^{-\mu}\sum_{x=0}^{c}\frac{\mu^x}{x!} \qquad (\mu = n\theta).$$

Ejemplo 2. Plan de muestreo simple. Distribución de Poisson.

Suponer que para lotes grandes se utiliza el siguiente plan de muestreo simple: se toma una muestra de tamaño $n = 20$. Si contiene no más de un defectuoso, se acepta el lote. Si la muestra contiene dos o más defectuosos, el lote se rechaza. En este plan, por (3) se obtiene

$$P(A;\theta) \sim e^{-20\theta}(1 + 20\theta).$$

En la figura 515 se muestra la curva CO correspondiente. ∎

Errores en el muestreo de aceptación

Debido a que el muestreo de aceptación es una prueba, como acaba de verse, es necesario preguntarse cómo encaja en el círculo de ideas sobre las pruebas; en particular, debe averiguarse qué sucede con respecto a los errores y analizarse el problema práctico relacionado de elegir n y c.

En el muestreo de aceptación, el productor y el consumidor tienen intereses diferentes. El productor puede establecer que la probabilidad de rechazar un lote "bueno" o "aceptable" sea un número pequeño, denominado α. El consumidor (comprador) puede demandar que la probabilidad de aceptar un lote "malo" o "inaceptable" sea un número pequeño β. De modo más preciso, suponer que las dos partes acuerdan que un lote en el que θ no sea mayor que un cierto número θ_0 es **aceptable**, en tanto que un lote en el que θ es mayor o igual que cierto número θ_1, es **inaceptable**. Entonces, α es la probabilidad de rechazar un lote con $\theta \leqq \theta_0$ y se denomina **riesgo del productor**. Esto corresponde a un error del tipo I en la prueba de una hipótesis (sección 24.7). β es la probabilidad de aceptar un lote con $\theta \geqq \theta_1$ y recibe el nombre de **riesgo del consumidor**. Esto corresponde a un error del tipo II en la sección 24.7. En la figura 516 se muestra un ejemplo ilustrativo. θ_0 se denomina **nivel de calidad aceptable** (NCA) y θ_1

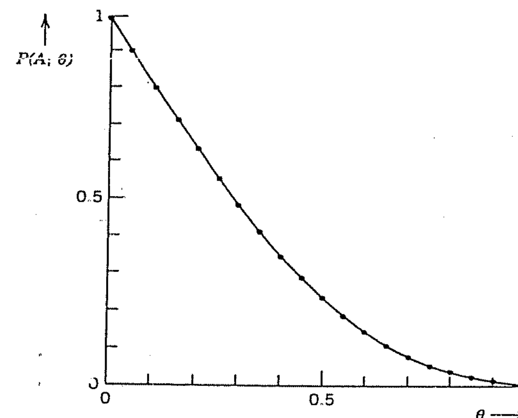


Figura 514. Curva CO del plan de muestreo simple con $n = 2$ y $c = 0$ para lotes de tamaño $N = 20$.

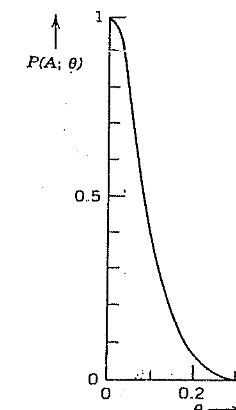


Figura 515. Curva CO del ejemplo 2.

es el **porcentaje de tolerancia de defectuosos del lote** (PTDL) o **nivel de calidad rechazable** (NCR). Un lote con $\theta_0 < \theta < \theta_1$ puede denominarse *lote indiferente*.

Con base en la figura 516 se observa que los puntos $(\theta_0, 1 - \alpha)$ y (θ_1, β) están sobre la curva CO. Es posible demostrar que para lotes grandes pueden elegirse θ_0, θ_1 $(>\theta_0)$, α y β y, luego, determinar n y c tales que la curva CO pase muy cerca de esos puntos establecidos. Se han publicado planes de muestreo para α, β, θ_0 y θ_1 especificados; consultar la obra citada en el apéndice 1 como referencia [G5].

Este análisis sobre las relaciones conceptuales entre el muestreo de aceptación y las pruebas en general puede completarse y resumirse en la siguiente tabla:

Muestreo de aceptación	Prueba de hipótesis
Nivel de calidad aceptable (NCA) $\theta = \theta_0$	Hipótesis $\theta = \theta_0$
Porcentaje de tolerancia de defectuosos por lote (PTDL) $\theta = \theta_1$	Alternativa $\theta = \theta_1$
Número permisible de defectuosos c	Valor crítico c
Riesgo α del productor de rechazar un lote con $\theta \leqq \theta_0$	Probabilidad α de cometer un error del tipo I (nivel de significancia)
Riesgo β del consumidor de aceptar un lote con $\theta \geqq \theta_1$	Probabilidad β de cometer un error del tipo II

Rectificación

El procedimiento de muestreo por sí mismo no protege al consumidor suficientemente bien. De hecho, si se permite al productor volver a presentar un lote rechazado sin decir que éste ya ha sido rechazado, entonces inclusive lotes malos serán acepta-

dos finalmente. Para proteger al consumidor contra ésta y otras posibilidades, el productor puede acordar con el consumidor que un lote rechazado sea **rectificado**, es decir, que se inspeccione el 100%, artículo por artículo, y que todos los artículos defectuosos en el mismo se eliminen y reemplacen por no defectuosos.[7] Suponer que una planta produce 100 θ% artículos defectuosos y que se rectifican los lotes rechazados. Entonces, K lotes de tamaño N contienen KN artículos, $KN\theta$ de los cuales son defectuosos. $KP(A;\theta)$ de los lotes se aceptan; éstos contienen un total de $KPN\theta$ artículos defectuosos. Los lotes rechazados y rectificados no contienen artículos defectuosos. Por tanto, después de la rectificación, la fracción de defectuosos en los K lotes es igual a $KPN\theta/KN = \theta P(A;\theta)$. A esta función de θ se la denomina **calidad saliente promedio** (CSP) y se denota por CSP(θ). Así,

$$\text{(4)} \qquad \boxed{\mathrm{AOQ}(\theta) = \theta P(A;\theta).}$$

Dado un plan de muestreo, a partir de $P(A;\theta)$ y la curva CO pueden obtenerse fácilmente esta función y su gráfica, la *curva de calidad saliente promedio* (curva CSP). En la figura 517 se muestra un ejemplo.

Es evidente que CSP(0) = 0. También, CSP(1) = 0 porque $P(A; 1) = 0$. Por ésto y CSP $\geqq 0$ se concluye que esta función debe tener un máximo en algún $\theta = \theta^*$. El valor correspondiente CSP(θ^*) se denomina **límite de la calidad saliente promedio** (LCSP). Ésta es la peor calidad promedio que es de esperar se acepte con el procedimiento de rectificación.

Resulta que varios planes de muestreo simple pueden corresponder al mismo LCSP; ver la obra citada en el apéndice 1 como referencia [G5]. Por tanto, si el LCSP es todo lo que preocupa al consumidor, el productor tiene cierta libertad para elegir un plan de muestreo y es posible que elija un plan que minimice la cantidad de muestreo, es decir, el número de artículos inspeccionados por lote. Este número es

$$nP(A;\theta) + N(1 - P(A;\theta))$$

en donde el primer término corresponde a los lotes aceptados y el último a los rechazados y rectificados; de hecho la rectificación requiere la inspección de todos los N artículos del lote y $1 - P(A;\theta)$ es la probabilidad de rechazar un lote.

Planes de muestreo doble. Por último, se mencionará que es posible ahorrar trabajo de inspección aplicando un *plan de muestreo doble*, en donde la muestra de tamaño n se divide en dos muestras de tamaños n_1 y n_2 (en donde $n_1 + n_2 = n$). Si el lote es muy bueno o muy malo, entonces es posible que se decida aceptar o rechazar utilizando sólo una muestra, de modo que la otra resulta necesaria en el caso de un lote de calidad intermedia únicamente. La referencia [G5] contiene planes de muestreo doble aplicando inspección de rectificación del tipo siguiente (en donde x_1 y x_2 son los números de defectuosos en esas dos muestras).

1. Si $x_1 \leqq c_1$, se acepta el lote. Si $x_1 > c_2$, se rechaza el lote.

2. Si $c_1 < x_1 \leqq c_2$, usar también la segunda muestra. Si $x_1 + x_2 \leqq c_2$, se acepta el lote. Si $x_1 + x_2 > c_2$, se rechaza el lote.

[7] Por supuesto, la rectificación es imposible si la inspección es destructiva, o si no merece la pena por ser demasiado costosa en comparación con el valor del lote. El lote rechazado debe entonces venderse a un bajo precio o desecharse.

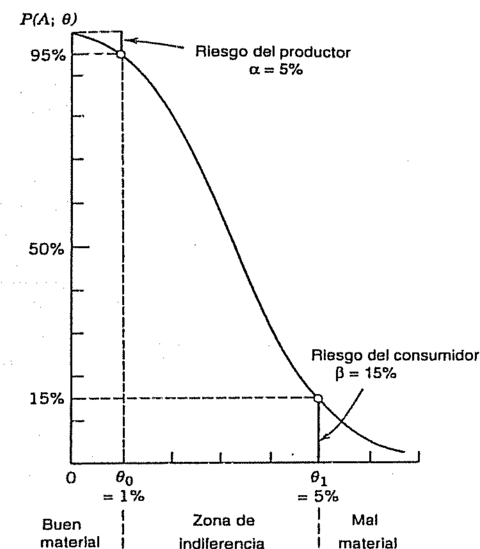


Figura 516. Curva CO, riesgos del productor y del consumidor.

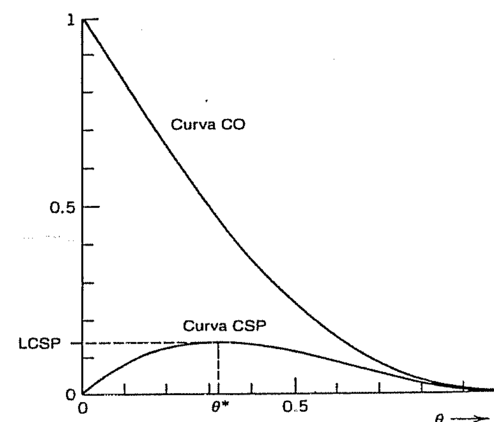


Figura 517. Curva CO y curva CSP para el plan de muestreo de la figura 514.

Problemas de la sección 24.9

1. Grandes lotes de hojas de afeitar se inspeccionan mediante un plan de muestreo simple en el que se usan una muestra de tamaño 20 y el número de aceptación $c = 1$. ¿Cuáles son las probabilidades de aceptar un lote con 1%, 2%, 10% de defectuosos (hojas romas)? Usar la tabla A6 en el apéndice 5. Trazar la gráfica de la curva CO.

2. Grandes lotes de baterías para calculadoras de bolsillo se inspeccionan mediante el siguiente plan: se extraen aleatoriamente $n = 30$ baterías de un lote y se prueban. Si esta muestra contiene cuando mucho $c = 1$ batería defectuosa, se acepta el lote. De lo contrario, se rechaza. Trazar la gráfica de la curva CO del plan, usando la aproximación de Poisson.
3. Trazar la gráfica de la curva CSP del problema 2. Determinar el LCSP, suponiendo que se aplica rectificación.
4. Hacer el trabajo requerido en el problema 2 si $n = 50$ y $c = 0$.
5. En el ejemplo 1, ¿cuáles son los riesgos del productor y del consumidor si NCA es 0.1 y NCR es 0.6?
6. Encontrar la aproximación binomial de la distribución hipergeométrica en el ejemplo 1 y comparar los valores aproximado y exacto.
7. Se extraen muestras de cinco tornillos de un lote con fracción de defectuosos θ. El lote se acepta si la muestra (a) no contiene ningún tornillo defectuoso, (b) contiene cuando mucho un tornillo defectuoso. Usando la distribución binomial, encontrar, trazar y comparar las curvas CO.
8. Calcular $P(A; \theta)$ en el ejemplo 1 si el tamaño de la muestra se incrementa de $n = 2$ a $n = 3$, y los otros datos permanecen iguales. Calcular $P(A; 0.10)$ y $P(A; 0.20)$ y comparar con el ejemplo 1.
9. ¿Por qué es imposible que una curva CO tenga una porción vertical que separe la buena calidad de la mala calidad?
10. Graficar y comparar planes de muestreo con $c = 1$ y valores crecientes de n, por ejemplo, $n = 2, 3, 4$. (Usar la distribución binomial.)
11. De cada lote se extraen muestras de tres fusibles y un lote se acepta si en la muestra correspondiente se encuentra no más de un fusible defectuoso. Elaborar una crítica de este plan de muestreo. En particular, determinar la probabilidad de aceptar un lote que sea 50% defectuoso. (Usar la distribución binomial.)
12. Si en un plan de muestreo simple para grandes lotes de bujías para automóvil el tamaño de la muestra es 100 y se desea que NCA sea 5% y el riesgo del productor 2%, ¿qué números de aceptación c elegiría el lector? (Usar la aproximación normal.)
13. ¿Cuál es el riesgo del consumidor en el problema 12 si se desea que NCR sea 12%?
14. Trazar la gráfica de las curvas CO y CSP del plan de muestreo simple para grandes lotes con $n = 5$ y $c = 0$, y encontrar el LCSP.
15. Encontrar los riesgos en el plan de muestreo simple con $n = 5$ y $c = 0$, suponiendo que el NCA es $\theta_0 = 1\%$ y el NCR es $\theta_1 = 15\%$.

4.10 BONDAD DE AJUSTE. PRUEBA χ^2

Hasta el momento se han analizado pruebas para parámetros desconocidos (μ, σ, etc.) en distribuciones de las que se conocía el tipo o éste no importaba porque se contaba con una gran muestra, de modo que por el teorema del límite central (sección 24.6) también era posible aplicar a otras distribuciones métodos diseñados para la distribución normal (¡con la precaución idónea!). Sin embargo, ¿qué puede hacerse si se desea probar si una distribución es de cierto tipo, por ejemplo, normal? Esto significa que se desea probar que cierta función $F(x)$ es la función de distribución de una distribución a partir de la cual se tiene una muestra $x_1, \cdots, x_n$. Esta importante tarea práctica se denomina prueba de la **bondad de ajuste**: ¿Qué tan bien la función de distribución muestral $\widetilde{F}(x)$ se ajusta a la función de distribución hipotética $F(x)$?

Resulta evidente que la función de distribución muestral $\widetilde{F}(x)$ es una aproximación de $F(x)$, y si se aproxima a $F(x)$ "suficientemente bien", entonces se acepta la

hipótesis de que $F(x)$ es la función de distribución de la población. Si $\widetilde{F}(x)$ se desvía "demasiado" de $F(x)$, se rechaza la hipótesis.

Para tomar esta decisión, debe saberse cuánto puede diferir $\widetilde{F}(x)$ de $F(x)$ si la hipótesis es verdadera. Por tanto, primero debe introducirse una cantidad que mida la desviación de $\widetilde{F}(x)$ con respecto $F(x)$ y es necesario conocer la distribución de probabilidad de esta cantidad, en el supuesto de que la hipótesis es verdadera. Luego se procede como se indica a continuación: se determina un número c tal que, si la hipótesis es verdadera, una desviación mayor que c tiene una pequeña probabilidad preasignada. Sin embargo, si ocurre una desviación mayor que c, se tiene una razón para dudar de que la hipótesis es verdadera, por lo que es rechazada. Por otra parte, si la desviación no excede a c, de modo que $\widetilde{F}(x)$ es una aproximación suficientemente buena de $F(x)$, se acepta la hipótesis. Por supuesto, si se acepta la hipótesis, esto significa que no se tiene evidencia suficiente como para rechazarla y no se excluye la posibilidad de que existan otras funciones que no se rechazarían en la prueba. En este sentido, la situación es bastante semejante a la expuesta en la sección 24.7.

Tabla 24.10. Prueba de ji cuadrada para la hipótesis de que $F(x)$ es la función de distribución de una población a partir de la cual se tomó una muestra $x_1, \cdots, x_n$

Primer paso. Subdividir el eje x en K intervalos $I_1, I_2, \cdots, I_K$ de modo que cada intervalo contenga por lo menos 5 valores de la muestra dada $x_1, \cdots, x_n$. Determinar el número b_j de valores muestrales en el intervalo I_j, en donde $j = 1, \cdots, K$. Si un valor muestral está en un punto frontera común de dos intervalos, sumar 0.5 a cada uno de los dos b_j correspondientes.

Segundo paso. Usando $F(x)$, calcular la probabilidad p_j de que la variable aleatoria X en consideración asuma cualquier valor en el intervalo I_j, en donde $j = 1, \cdots, K$. Calcular

$$e_j = np_j.$$

(Éste es el número de valores muestrales teóricamente esperados en I_j si la hipótesis es verdadera.)

Tercer paso. Calcular la desviación

$$\chi_0^2 = \sum_{j=1}^{K} \frac{(b_j - e_j)^2}{e_j}. \quad (1)$$

Cuarto paso. Elegir un nivel de significancia (5%, 1% u otro semejante).

Quinto paso. Determinar la solución c de la ecuación

$$P(\chi^2 \leqq c) = 1 - \alpha$$

a partir de la tabla de la distribución ji cuadrada con $K - 1$ grados de libertad (tabla A11, apéndice 5). Si se desconocen r parámetros de $F(x)$ y se utilizan sus estimaciones de máxima probabilidad (sección 24.5), entonces usar $K - r - 1$ grados de libertad (en vez de $K - 1$).

Si χ_0^2 c, aceptar la hipótesis. Si $\chi_0^2 > c$, rechazar la hipótesis.

En la tabla 24.10 se presenta una prueba de este tipo, que fue introducida por R. A. Fisher. Esta prueba se justifica por el hecho de que si la hipótesis es verdadera, entonces χ_0^2 es un valor observado de una variable aleatoria cuya función de distribución se aproxima a la de la distribución ji cuadrada con $K - 1$ grados de libertad (o con $K - r - 1$ grados de libertad, si se estiman r parámetros) conforme n tiende a infinito. El requisito de que cuando menos cinco valores muestrales deben estar en cada intervalo, mencionado en la tabla 24.10, es un resultado del hecho de que, para n finito, esa variable aleatoria sólo tiene aproximadamente una distribución ji cuadrada. En la obra citada en el apéndice 1 como referencia [G3] puede consultarse una demostración de lo anterior. Si la muestra es tan pequeña que no puede cumplirse este requisito, es posible continuar con la prueba, aunque entonces el resultado debe usarse con mucho cuidado.

Ejemplo 1. Prueba de normalidad.

Probar si la población de la cual se tomó la muestra de la tabla 24.2, sección 24.3, es normal.

Solución. Las estimaciones de máxima probabilidad para μ y σ^2 son $\hat{\mu} = \bar{x} = 364.7$ y $\tilde{\sigma}^2 = 712.9$. El cálculo de la tabla 24.11 da $\chi_0^2 = 2.790$. Se toma $\alpha = 5\%$. Como $K = 10$ y se estimaron $r = 2$ parámetros, es necesario usar la tabla A11, apéndice 5, con $K - r - 1 = 7$ grados de libertad, con lo que se encuentra $c = 14.07$ como la solución de $P(\chi^2 \leqq c) = 95\%$. Como $\chi_0^2 < c$, se acepta la hipótesis de que la población es normal. ∎

Tabla 24.11. Cálculos en el ejemplo 1.

x_j	$\frac{x_j - 364.7}{26.7}$	$\Phi\left(\frac{x_j - 364.7}{26.7}\right)$	e_j	b_j	Términos en (1)
$-\infty \cdots 325$	$-\infty \cdots -1.49$	$0.0000 \cdots 0.0681$	6.81	6	0.096
$325 \cdots 335$	$-1.49 \cdots -1.11$	$0.0681 \cdots 0.1335$	6.54	6	0.045
$335 \cdots 345$	$-1.11 \cdots -0.74$	$0.1335 \cdots 0.2296$	9.61	11	0.201
$345 \cdots 355$	$-0.74 \cdots -0.36$	$0.2296 \cdots 0.3594$	12.98	14	0.080
$355 \cdots 365$	$-0.36 \cdots 0.00$	$0.3594 \cdots 0.5000$	14.06	16	0.268
$365 \cdots 375$	$0.00 \cdots 0.39$	$0.5000 \cdots 0.6517$	15.17	15	0.002
$375 \cdots 385$	$0.39 \cdots 0.76$	$0.6517 \cdots 0.7764$	12.47	8	1.602
$385 \cdots 395$	$0.76 \cdots 1.13$	$0.7764 \cdots 0.8708$	9.44	10	0.033
$395 \cdots 405$	$1.13 \cdots 1.51$	$0.8708 \cdots 0.9345$	6.37	8	0.417
$405 \cdots \infty$	$1.51 \cdots \infty$	$0.9345 \cdots 1.0000$	6.55	6	0.046
					$\chi_0^2 = 2.790$

Problemas de la sección 24.10

1. Si al lanzar un dado 180 veces se obtuvo $1, \cdots, 6$ con las frecuencias absolutas 25, 31, 33, 27, 29, 35, ¿es posible afirmar en el nivel del 5% que el dado es legal?
2. Resolver el problema 1 si la muestra es 39, 22, 41, 26, 20, 32.
3. En un experimento clásico, R. Wolf lanzó un dado 20 000 veces y obtuvo $1, \cdots, 6$ con las frecuencias absolutas 3407, 3631, 3176, 2916, 3448, 3422. Probar si el dado era legal, usando $\alpha = 5\%$.

4. Si al lanzar 100 veces una moneda se obtienen 40 caras y 60 cruces, ¿es posible afirmar en el nivel del 5% que la moneda es legal?
5. Si al lanzar 10 veces una moneda se obtiene la misma razón que en el problema 4 (4 caras y 6 cruces), ¿la conclusión es la misma que en ese problema? Primero hacer una conjetura, luego realizar los cálculos.
6. Un fabricante afirma que en el proceso de producción de hojas de afeitar, sólo el 2.5% de éstas son romas. Probar tal afirmación contra la alternativa de que son romas más del 2.5%, usando una muestra de 400 hojas en las que 17 son romas. (Usar $\alpha = 5\%$.)
7. En una tabla de dígitos aleatorios, los dígitos pares y los impares deben aparecer *aproximadamente* con la misma frecuencia, Probar este hecho usando como muestra los 50 dígitos del renglón 0 de la tabla A9, apéndice 5. (Usar $\alpha = 5\%$.)
8. Al lanzar 50 veces una moneda, ¿cuál sería el número mínimo de caras (mayor que 25) que conduciría al rechazo de la hipótesis de que la moneda es legal, en el nivel del 5%?
9. Entre las 13 hrs y las 14 hrs de cinco días consecutivos (de lunes a viernes), cierta gasolinera atendió a 92, 60, 66, 62 y 90 clientes, respectivamente. Probar la hipótesis de que el número esperado de clientes durante esa hora es el mismo en esos días.) (Usar $\alpha = 5\%$.)
10. De una gran producción de remaches de cada una de tres máquinas se tomaron tres muestras de 200 remaches cada una. Los números de remaches defectuosos en las muestras fueron 7, 8 y 12. ¿Es significativa esta diferencia? (Usar $\alpha = 5\%$.)
11. Usando la muestra que se proporciona, probar que la población correspondiente tiene una distribución de Poisson. x es el número de partículas alfa por intervalos de 7.5 segundos observadas por E. Rutherford y H. Geiger en uno de sus experimentos clásicos realizados en 1910, y $a(x)$ es la frecuencia absoluta (= número de periodos durante los cuales se observaron exactamente x partículas).

x	$a(x)$	x	$a(x)$	x	$a(x)$
0	57	5	408	10	10
1	203	6	273	11	4
2	383	7	139	12	2
3	525	8	45	$\geqq 13$	0
4	532	9	27		

12. ¿Puede afirmarse que el tráfico en los tres carriles de una autopista (en una dirección) es aproximadamente el mismo en cada uno de ellos si al contar se obtienen 910, 850, 720 automóviles en los carriles derecho, de enmedio e izquierdo, respectivamente durante el mismo intervalo?
13. Si se sabe que el 25% de ciertas varillas de acero producidas por un proceso estándar se romperían al someterlas a una carga de 5 000 lb, ¿puede afirmarse que un nuevo proceso produce la misma razón de ruptura si se encuentra que en una muestra de 80 varillas producidas por el nuevo proceso, 27 se rompieron al someterlas a la carga mencionada?
14. ¿Era normal la muestra de la tabla 24.4, sección 24.3, tomada de una población normal?
15. Comprobar los cálculos en el ejemplo 1.

24.11 PRUEBAS NO PARAMÉTRICAS

Las **pruebas no paramétricas**, también denominadas *pruebas sin distribución*, son válidas para cualquier distribución; por tanto, son prácticas en casos en los que el tipo de distribución es desconocido, o se conoce pero de modo que no se cuenta con ningu-

na prueba diseñada específicamente para estos casos. En esta sección se explicará la idea básica de tales pruebas, que se basan en "*estadísticos de orden*" y son muy sencillas. Si pudiera elegirse, las pruebas diseñadas para una distribución específica, por lo general proporcionan mejores resultados que las pruebas no paramétricas; por ejemplo, esto es válido para las pruebas en la sección 24.7 para la distribución normal.

Se analizarán dos pruebas en términos de ejemplos típicos. Al deducir las distribuciones usadas en la prueba, es esencial que las distribuciones de las que se muestrea sean continuas. (Las pruebas no paramétricas también pueden deducirse para distribuciones discretas, aunque es algo más complicado.)

Ejemplo 1. Prueba del signo para la mediana.

Una **mediana** es una solución $x = \tilde{\mu}$ de la ecuación $F(x) = 0.5$, en donde F es la función de distribución.

Suponer que ocho operadores de radio fueron sometidos a una prueba, primero en recintos sin aire acondicionado y después en recintos con aire acondicionado durante el mismo periodo de tiempo, y que las diferencias de los errores (con aire acondicionado menos sin aire acondicionado) fueron

$$9 \quad 4 \quad 0 \quad 6 \quad 4 \quad 0 \quad 7 \quad 11.$$

Probar la hipótesis $\tilde{\mu} = 0$ (es decir, que el aire acondicionado no tiene ningún efecto sobre los resultados) contra la alternativa $\tilde{\mu} > 0$ (es decir, que en los recintos sin aire acondicionado se obtienen rendimientos inferiores).

Solución. Se elige el nivel de significancia $\alpha = 5\%$. Si la hipótesis es verdadera, entonces la probabilidad p de obtener una diferencia positiva es la misma que para una diferencia negativa. Por tanto, en este caso, $p = 0.2$, y la variable aleatoria

$$X = \textit{Número de valores positivos entre n valores}$$

tiene una distribución binomial con $p = 0.5$. La muestra dada tiene 8 valores. Se omiten los valores 0, que no contribuyen a la decisión. Entonces quedan seis valores, todos positivos. Como

$$P(X = 6) = \binom{6}{6} (0.5)^6 (0.5)^0 = 0.0156 = 1.56\% < \alpha,$$

entonces se rechaza la hipótesis y se afirma que el número de errores cometidos en los recintos sin aire acondicionado es significativamente superior, de modo que es necesario considerar la instalación de aire acondicionado. ∎

Ejemplo 2. Prueba para una tendencia arbitraria.

Se utiliza cierta máquina para cortar trozos de alambre. Cinco trozos consecutivos tienen las longitudes

$$29 \quad 31 \quad 28 \quad 30 \quad 32.$$

Usando esta muestra, probar la hipótesis de que **no hay tendencia alguna**, es decir, que la máquina no tiende a producir trozos cada vez más largos o cada vez más cortos. Suponer que el tipo de máquina sugiere la alternativa de que hay una *tendencia positiva*, es decir, la tendencia de cortar trozos cada vez más largos.

Solución. Se cuenta el número de **transposiciones** en la muestra, es decir, el número de veces en los que un valor mayor precede a uno menor:

29 precede a 28 (1 transposición),

31 precede a 28 y a 30 (2 transposiciones).

Los tres valores muestrales restantes siguen en orden creciente. Por tanto, en la muestra existen $1 + 2 = 3$ transposiciones. A continuación se considera la variable aleatoria

$$T = \textit{Número de transposiciones}.$$

Si la hipótesis es verdadera (no hay tendencia), entonces cada una de las $5! = 120$ permutaciones de los cinco elementos 1 2 3 4 5 tiene la misma probabilidad (1/120). Estas permutaciones se disponen según su número de transposiciones:

$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$	
1 2 3 4 5	1 2 3 5 4	1 2 4 5 3	1 2 5 4 3	
	1 2 4 3 5	1 2 5 3 4	1 3 4 5 2	
	1 3 2 4 5	1 3 2 5 4	1 3 5 2 4	
	2 1 3 4 5	1 3 4 2 5	1 4 2 5 3	
		1 4 2 3 5	1 4 3 2 5	
		2 1 3 5 4	1 5 2 3 4	
		2 1 4 3 5	2 1 4 5 3	
		2 3 1 4 5	2 1 5 3 4	etc.
		3 1 2 4 5	2 3 1 5 4	
			2 3 4 1 5	
			2 4 1 3 5	
			3 1 2 5 4	
			3 1 4 2 5	
			3 2 1 4 5	
			4 1 2 3 5	

Con base en lo anterior se obtiene

$$P(T \leqq 3) = \tfrac{1}{120} + \tfrac{4}{120} + \tfrac{9}{120} + \tfrac{15}{120} = \tfrac{29}{120} = 24\%.$$

Por tanto, se acepta la hipótesis.

Los valores de la función de distribución de T en el caso en que no hay tendencia se muestran en la tabla A13, apéndice 5. El método y aquellos valores se refieren a distribuciones *continuas*. Entonces, teóricamente es posible esperar que todos los valores de una muestra sean diferentes. En la práctica, algunos valores muestrales todavía pueden ser iguales debido al redondeo. Si m valores son iguales, se suma $m(m-1)/4$ (= valor medio de las transposiciones en el caso de las permutaciones de m elementos), es decir, 1/2 por cada par de valores iguales, 3/2 por cada terna, etc.

Problemas de la sección 24.11

1. ¿Son mejores los filtros para aire del tipo A que los del tipo B si en diez ensayos los A dieron aire más limpio que los B en siete casos, los B dieron aire más limpio que los A en 1 caso, mientras que en dos de los ensayos los resultados para los A y los B fueron prácticamente iguales?
2. Probar si un interruptor termostático está ajustado correctamente a 20°C contra la alternativa de que su ajuste es demasiado bajo. Usar una muestra de 9 valores, de los cuales 8 son menores que 20°C y 1 es mayor que 20°C.
3. Probar $\tilde{\mu} = 0$ contra $\tilde{\mu} > 0$, usando $1, -1, 1, 3, -8, 6, 0$ (desviaciones del azimut [múltiplos de 0.01 radianes] en alguna revolución de un satélite).
4. A cada uno de 10 pacientes se les administraron dos sedantes diferentes A y B. En la tabla siguiente se muestra el efecto (aumento del tiempo de sueño, medido en horas). Aplicando la prueba del signo, investigar si la diferencia es significativa.

A	1.9	0.8	1.1	0.1	−0.1	4.4	5.5	1.6	4.6	3.4
B	0.7	−1.6	−0.2	−1.2	−0.1	3.4	3.7	0.8	0.0	2.0
Diferencia	1.2	2.4	1.3	1.3	0.0	1.0	1.8	0.8	4.6	1.4

5. Suponiendo que las poblaciones correspondientes a las muestras del problema 4 son normales, aplicar la prueba explicada en el ejemplo 3, sección 24.7.
6. ¿Un proceso de producción de tubos de plástico de longitud $\tilde{\mu} = 2$ metros, requiere ajuste si en una muestra, 4 tubos tienen la longitud exacta, 15 son más cortos y 3 son más largos que 2 metros? (Usar la aproximación normal de la distribución binomial; ver la sección 23.7.)
7. Realizar las cálculos del problema 6 sin usar el teorema del límite de De Moivre-Laplace.
8. Plantear una prueba del signo para el cuartil inferior q_{25} (definido por la condición $F(q_{25}) = 0.25$).
9. ¿Cómo procedería el lector en la prueba del signo si la hipótesis es $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$ (cualquier número) en vez de $\tilde{\mu} = 0$?
10. ¿Los aumentos en el precio de la leche conducen a una disminución en las ventas si las cifras diarias [galones] (ordenadas según el aumento diario a los precios) son como se muestra a continuación?

79 76 42 60 65 49 34 56 28

11. ¿La reacción de un proceso químico depende de la temperatura? (Probar contra una tendencia positiva.)

Temperatura [°C]	10	20	30	40	60	80
Reacción kg/min	0.6	1.1	0.9	1.6	1.2	2.0

12. Probar la hipótesis de que para cierto tipo de voltímetro las lecturas son independientes de la temperatura T[°C], contra la alternativa de que tienden a aumentar con T. Usar una muestra de valores obtenidos al aplicar una tensión constante:

Temperatura T [°C]	10	20	30	40	50
Lectura V [volts]	99.5	101.1	100.4	100.8	101.6

13. En un experimento de alimentos para cerdos, se registraron las siguientes ganancias en peso [Kg] de 10 animales (ordenadas según cantidades crecientes de alimento suministradas diariamente):

20 17 19 18 23 16 25 28 24 22.

Probar que no hay tendencia contra una tendencia positiva.

14. ¿La cantidad de fertilizante incrementa el rendimiento de trigo X [kg/parcela]? Usar una muestra de valores ordenados según cantidades cada vez mayores de fertilizante:

41.4 43.3 39.6 43.0 44.1 45.6 44.5 46.7.

15. Aplicar la prueba del ejemplo 2 a los datos siguientes (x = contenido de disulfuro de un cierto tipo de lana, medido en porcentaje del contenido en las fibras no reducidas; y = contenido de agua de saturación de la lana, medido en porcentaje).

x	10	15	30	40	50	55	80	100
y	50	46	43	42	36	39	37	33

24.12 PARES DE MEDICIONES. AJUSTE DE RECTAS

Hasta el momento se han estudiado experimentos aleatorios en los cuales se observó una sola cantidad (variable aleatoria) y se obtuvieron muestras cuyos valores eran simples números. En esta última sección del capítulo se analizarán experimentos en los que se observan o miden dos cantidades de manera simultánea, de modo que se obtienen muestras de *pares* de valores $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$. En la práctica es posible distinguir entre dos tipos de experimentos, como se muestra a continuación.

1. En el **análisis de correlación**, las dos cantidades son variables aleatorias y se tiene interés en las relaciones existentes entre ellas. Algunos ejemplos son la relación (se dice "correlación") entre el desgaste X y el desgaste Y de los neumáticos delanteros de un automóvil, entre las calificaciones X y Y de los estudiantes en matemáticas y física, respectivamente, entre la dureza X de las placas de acero en el centro y la dureza Y cerca de los bordes, etc. (No se analizará esta rama de la estadística.)

2. En el **análisis de regresión**, una de las dos variables, por ejemplo x, puede considerarse como una variable ordinaria porque puede medirse sin error apreciable o porque es posible asignarle valores deseados. x se denomina **variable independiente** o, algunas veces, **variable controlada** porque es posible controlarla (fijarla en valores elegidos). La otra, Y, es una variable aleatoria, y se tiene interés en la dependencia de Y con respecto a x. Ejemplos típicos son la dependencia de la presión sanguínea Y con respecto a la edad x de una persona o, como se dirá a continuación, la regresión de Y sobre x, la regresión de la ganancia de peso Y de ciertos animales sobre la ración diaria de alimento x, la regresión de la conductividad calorífica Y del corcho sobre el peso específico x del mismo, etc.

En general, en un experimento usualmente se eligen $x_1, \cdots, x_n$ y luego se observan los valores correspondientes $y_1, \cdots, y_n$ de Y, de modo que se obtiene una muestra $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$. Así, en análisis de regresión la dependencia de Y sobre x es una dependencia de la media μ de Y sobre x, es decir, tal que $\mu = \mu(x)$ es una función en el sentido usualmente aceptado. La curva de $\mu(x)$ se denomina **curva de regresión** de Y sobre x.

En esta sección se analizará el caso más sencillo, el de una recta cuando

$$\mu(x) = \kappa_0 + \kappa_1 x. \tag{1}$$

Entonces, es posible que se desee situar las valores muestrales como n puntos en el plano xY, ajustar una recta que pase por ellos y usar esta recta con el fin de estimar $\mu(x)$ en valores de x que revisten interés, de modo que se sepa qué valores de Y pueden esperarse para tales valores de x. No es posible ajustar a "simple vista" la recta, ya que sería subjetivo; es decir, los resultados de personas distintas serán diferentes, especialmente si los puntos están dispersos. Así pues, se requiere un método matemático con el que se obtenga un resultado único dependiente sólo de los n puntos. Un procedimiento ampliamente usado es el **método de los mínimos cuadrados** desarrollado por Gauss. En la situación que se está manejando, este método puede plantearse como sigue:

Principio de los mínimos cuadrados. *La recta debe ajustarse a través de los puntos dados, de modo que la suma de los cuadrados de las distancias de esos puntos a la recta sea mínima, en donde la distancia se mide en la dirección vertical* (*la dirección* y).

A fin de obtener unicidad, se requiere una condición adicional. Para ver esto, considerar la muestra (0, 1), (0, −1). Entonces todas las rectas $y = k_1 x$ con cualquier k_1 satisfacen el principio. (¿Puede el lector ver por qué?) La siguiente suposición implica la unicidad, como se verá.

Suposición general (A1)

Los valores $x_1, \cdots, x_n$ en la muestra dada $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ no son todos iguales.

A partir de una muestra dada $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$, a continuación se determinará una recta por mínimos cuadrados. La ecuación de esta recta se escribe como

$$(2) \qquad y = k_0 + k_1 x$$

y se denomina **recta de regresión de la muestra** porque es la contraparte de la recta de regresión de la población.

Así la distancia vertical (medida en la dirección y) de un punto (x_j, y_j) de la muestra a la recta (2) se define como

$$|y_j - k_0 - k_1 x_j| \qquad \text{(ver Fig. 518).}$$

Por tanto, la suma de los cuadrados de tales distancias es

$$(3) \qquad q = \sum_{j=1}^{n} (y_j - k_0 - k_1 x_j)^2.$$

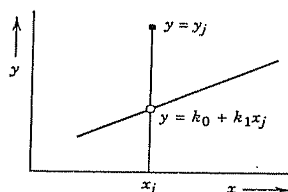


Figura 518. Distancia vertical del punto (x_j, y_j) a la recta $y = k_0 + k_1 x$.

En el método de mínimos cuadrados ahora es necesario determinar k_0 y k_1 de modo que q sea mínimo. Por cálculo se sabe que una condición necesaria para lo anterior es

$$(4) \qquad \frac{\partial q}{\partial k_0} = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial q}{\partial k_1} = 0.$$

Se verá que, a partir de esta condición, para la **recta de regresión de la muestra** se obtiene la fórmula

$$(5) \qquad \boxed{y - \bar{y} = k_1 (x - \bar{x})}$$

en donde $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son las medias de los valores x y y en la muestra de este caso,

$$(6) \qquad \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \qquad \text{y} \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}(y_1 + \cdots + y_n),$$

y la pendiente k_1, denominada **coeficiente de regresión**, se define como

$$(7) \qquad \boxed{k_1 = \frac{s_{xy}}{s_1^{\,2}}}$$

en donde la "**covariancia de la muestra**" está dada por

$$(8) \qquad s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y}) = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{j=1}^{n} x_j y_j - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \right) \right]$$

y

$$(9) \qquad s_1^{\,2} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right)^2 \right].$$

Por (5) se observa que la recta de regresión de la muestra pasa por el punto $(\bar{x}, \bar{y})$, por el que está determinada, junto con el coeficiente de regresión (7). Para la muestra de este caso, es posible denominar a s^2 *variancia* de los valores x [de manera semejante a (2) en la sección 24.4], aunque es necesario tener en cuenta que x no es una variable aleatoria, sino una variable ordinaria.

Deducción de (5) y (7). Al derivar (3) y aplicar (4), primero se obtiene

$$\frac{\partial q}{\partial k_0} = -2 \sum (y_j - k_0 - k_1 x_j) = 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial k_1} = -2 \sum x_j (y_j - k_0 - k_1 x_j) = 0$$

en donde se suma sobre j desde 1 hasta n. Luego se divide entre 2, cada una de las dos sumatorias se escribe como tres sumatorias y se consideran las que contienen a y_j y $x_j y_j$ a la derecha. Así se obtienen las "**ecuaciones normales**"

$$(10) \qquad \boxed{\begin{aligned} n k_0 + k_1 \sum x_j &= \sum y_j \\ k_0 \sum x_j + k_1 \sum x_j^2 &= \sum x_j y_j. \end{aligned}}$$

Éste es un sistema lineal de dos ecuaciones en las dos incógnitas k_0 y k_1. El determinante de sus coeficientes es [ver (9)]

$$\begin{vmatrix} n & \sum x_j \\ \sum x_j & \sum x_j^2 \end{vmatrix} = n \sum x_j^2 - \left(\sum x_j \right)^2 = n(n-1) s_1^{\,2} = n \sum (x_j - \bar{x})^2$$

que es diferente de cero debido a la suposición (A1), de modo que el sistema tiene una solución única. Al dividir la primera ecuación entre n y aplicando (6), se obtiene

$k_0 = \bar{y} - k_1\bar{x}$. Junto con $y = k_0 + k_1x$, lo anterior da (5). Para obtener (7), el sistema se resuelve aplicando la regla de Cramer o por eliminación, con lo que se encuentra

$$k_1 = \frac{n\sum x_j y_j - \sum x_i \sum y_j}{n(n-1)s_1^2}. \tag{11}$$

Tabla 24.12.
Regresión de la disminución del volumen y [%] de piel sobre la presión x atmósferas

ENTR

Valores dados		Valores auxiliares	
x_j	y_j	x_j^2	x_jy_j
4,000	2.3	16,000,000	9,200
6,000	4.1	36,000,000	24,600
8,000	5.7	64,000,000	45,600
10,000	6.9	100,000,000	69,000
28,000	19.0	216,000,000	148,400

(C. E. Weir, *Journ. Res. Nat. Bureau of Standards* 45 (1950), 468.)

Así se obtiene (7)–(9) y se completa la deducción.

[El estudiante puede demostrar la igualdad de las dos expresiones en (8) y (9); ver el problema 10.] ∎

Ejemplo 1. Recta de regresión.

Se midió la diminución en el volumen y [%] de piel para ciertos valores fijos de alta presión x [atmósferas]. Los resultados se muestran en las dos primeras columnas de la tabla 24.12. Encontrar la recta de regresión de y sobre x.

Solución. Se ve que $n = 4$ y se obtienen los valores $\bar{x} = 28\,000/4 = 7\,000$, $\bar{y} = 19.0/4 = 4.75$.

$$s_1^2 = \frac{1}{3}\left(216\,000\,000 - \frac{28\,000^2}{4}\right) = \frac{20\,000\,000}{3}$$

$$s_{xy} = \frac{1}{3}\left(148\,400 - \frac{28\,000 \cdot 19}{4}\right) = \frac{15\,400}{3}.$$

Por tanto, $k_1 = 15\,400/20\,000\,000 = 0.00077$ y la recta de regresión es

$$y - 4.75 = 0.000\,77(x - 7000) \quad \text{or} \quad y = 0.000\,77x - 0.64.$$ ∎

Intervalos de confianza en análisis de regresión

Si se desea obtener intervalos de confianza es necesario establecer suposiciones sobre la distribución de Y (que no se han establecido hasta el momento; ¡los mínimos

cuadrados constituyen un "principio geométrico", en donde no se implican probabilidades!) Se supone normalidad e independencia al muestrear:

Suposición (A2)

Para cada x fija la variable aleatoria Y es normal con media

$$\mu(x) = \kappa_0 + \kappa_1 x \tag{12}$$

y variancia σ^2 independiente de x.

Suposición (A3)

Las n ejecuciones del experimento mediante el que se obtiene una muestra $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ son independientes.

κ_1 en (12) se denomina **coeficiente de regresión** *de la población*, porque puede demostrarse que con las suposiciones (A1)–(A3) la estimación de máxima probabilidad de κ_1 es el coeficiente de regresión k_1 de la muestra definido por (11).

Con las suposiciones (A1)–(A3), ahora es posible obtener un intervalo de confianza para κ_1, como se muestra en la tabla 24.13.

Tabla 24.13. Determinación de un intervalo de confianza para κ_1 en (1) bajo las suposiciones (A1)-(A3)

Primer paso. Elegir un nivel de confianza γ (95%, 99%, u otro semejante).

Segundo paso. Determinar la solución c de la ecuación

$$F(c) = \tfrac{1}{2}(1 + \gamma) \tag{13}$$

a partir de la tabla de la distribución t con n - 2 grados de libertad (tabla A10 en el apéndice 5; n = tamaño de la muestra).

Tercer paso. Usando una muestra $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$, calcular $(n-1)s^2$ a partir de (9), $(n-1)s_{xy}$ a partir de (8), k_1 a partir de (7),

$$(n-1)s_2^2 = \sum_{j=1}^{n} y_j^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)^2, \tag{14}$$

y

$$q_0 = (n-1)(s_2^2 - k_1^2 s_1^2). \tag{15}$$

Cuarto paso. Calcular $K = c\sqrt{q_0/(n-2)(n-1)s_1^2}$. El intervalo de confianza es

$$\text{CONF}\,\{k_1 - K \leqq \kappa_1 \leqq k_1 + K\}. \tag{16}$$

Ejemplo 2. Intervalo de confianza para el coeficiente de regresión.

Usando la muestra de la tabla 24.12, determinar un intervalo de confianza para κ_1 aplicando el método de la tabla 24.13.

Solución. Primer paso. Se elige $\gamma = 0.95$.
Segundo paso. La ecuación (13) asume la forma $F(c) = 0.975$, y la tabla A10 en el apéndice 5 con $n - 2 = 2$ grados de libertad proporciona $c = 4.30$.
Tercer paso. Del ejemplo 1 se tiene $3\,s_1{}^2 = 20\,000\,000$ y $k_1 = 0.00077$. Con base en la tabla 24.12 se calcula

$$3s_2{}^2 = 102.2 - \frac{19^2}{4} = 11.95, \qquad q_0 = 11.95 - 20\,000\,000 \cdot 0.00077^2 = 0.092.$$

Cuarto paso. Así, se obtiene $K = 4.30\sqrt{0.092 / 2 \cdot 20\,000\,000} = 0.000\,206$ y

$$\mathrm{CONF}\{0.00056 \leq \kappa_1 \leq 0.00098\}.$$

Problemas de la sección 24.12

1. Ajustar una recta a simple vista. Calcular la distancia de detención de un automóvil que se desplaza a 35 millas por hora.

x = Velocidad (mph)	20	30	40	50
y = Distancia de detención (pies)	50	95	150	210

En cada caso, encontrar y trazar la recta de regresión de y sobre x.

2. (3, 3.5), (5, 2), (7, 4.5), (9, 3)
3. (−1, 1), (0, 1.7), (1, 3)
4. (11, 22), (15, 18), (17, 16), (20, 9), (22, 10)
5. Número de revoluciones (por minuto) x y potencia y [hp] de un motor diesel.

x	400	500	600	700	750
y	580	1030	1420	1880	2100

6. Deformación x [mm] y dureza de Brinell y [kg/mm²] de cierto tipo de acero.

x	6	9	11	13	22	26	28	33	35
y	68	67	65	53	44	40	37	34	32

En cada caso, encontrar un intervalo de confianza del 95% para el coeficiente de regresión κ_1 usando la muestra dada y considerando que se cumplen las suposiciones (A1) y (A3).

7. x = Humedad del aire [%], y = Dilatación de la gelatina [%].

x	10	20	30	40
y	0.8	1.6	2.3	2.8

8. La muestra del problema 5.
9. La muestra del problema 6.
10. Deducir la segunda expresión para $s_1{}^2$ en (9) a partir de la primera.

Cuestionario y problemas de repaso del capítulo 24

1. ¿Por qué y cómo se aplicó la teoría de probabilidad en estadística?
2. ¿Qué son las estimaciones puntuales? ¿Y las estimaciones por intervalos?

3. ¿Qué significa "prueba estadística"? ¿Qué errores ocurren al ejecutar pruebas?
4. En general, ¿qué sucede con respecto a los errores en las pruebas si se toman muestras más grandes?
5. ¿En qué casos se usó la distribución t?
6. ¿Qué es la prueba χ^2? Proporcionar un simple ejemplo de memoria.
7. ¿Qué son las pruebas no paramétricas? ¿Cuándo es necesario aplicarlas?
8. ¿Qué se entiende por pruebas unilaterales y bilaterales? Proporcionar ejemplos.
9. ¿Qué se entiende por "bondad de ajuste"?
10. El control de calidad es un tipo de prueba. Explicar este hecho.
11. En el muestreo de aceptación se usan principios de pruebas. Explicar este hecho.
12. ¿Qué es el nivel de significancia de una prueba? ¿Cómo debe elegirse?
13. ¿Qué es el poder de una prueba? ¿Qué debe hacerse si es bajo?
14. ¿También es posible aplicar pruebas de la distribución normal a otras distribuciones? Explicar este hecho.
15. De memoria, explicar la idea de estimación de máxima probabilidad.
16. ¿Por qué en general pueden obtenerse mejores resultados en la ejecución de pruebas si se toman muestras más grandes?
17. ¿De qué manera la longitud de un intervalo de confianza depende del tamaño de la muestra? ¿Y del nivel de confianza?
18. ¿Qué es el principio de mínimos cuadrados de Gauss (que descubrió cuando tenía 18 años de edad)?
19. ¿Por qué simplemente no se ajusta a simple vista una recta que pasa por puntos dados?
20. ¿Por qué se toman muestras?
21. Para ilustrar que s^2 mide la dispersión, calcular s^2 para las dos muestras 108, 110, 112 y 100, 110, 120 y comparar los resultados.
22. Trazar un histograma de la muestra 2, 1, 4, 5 y adivinar $\bar{x}$ y s mediante la inspección del histograma. Luego, calcular $\bar{x}$, s^2 y s.

Encontrar la media, la variancia y el intervalo de variación de las muestras:

23. 110 120 100 90 100 110 130 110 90 100
24. 43 51 50 47 46
25. 1.6 1.8 1.7 1.5 1.4 1.2 1.7 1.6

Encontrar las estimaciones de máxima probabilidad de la media y la variancia de una distribución normal, usando la muestra:

26. 5 4 6 5 3 5 7 4 6 5 8 6
27. 12 16 15 17 16 15 16 14 17 10 18 15 16 14 20 18
28. Determinar un intervalo de confianza del 95% para la media μ de una población normal con variancia $\sigma^2 = 16$, usando una muestra de tamaño 400 con media 53.
29. ¿Qué sucede a la longitud del intervalo del problema 28 si se reduce el tamaño de la muestra a 100?
30. Determinar un intervalo de confianza del 99% para la media de una población normal con desviación estándar 2.2, usando la muestra 28, 24, 31, 27, 22.
31. ¿Qué intervalo de confianza se obtiene en el problema 30 si se supone que se desconoce la variancia?
32. Suponiendo normalidad, encontrar un intervalo de confianza del 95% para la variancia a partir de la muestra 145.3, 145.1, 145.4, 146.2.

Suponiendo que las poblaciones a partir de la que se obtuvieron las siguientes muestras son normales, determinar un intervalo de confianza del 95% para la media μ de la población.

33. Contenido de nitrógeno [%] del acero 0.74, 0.75, 0.73, 0.75, 0.74, 0.72.
34. Un muestra de diámetros de 10 empaques con media 4.37 y desviación estándar 0.157 cm.
35. Densidad [g/cm³] del carbón de hulla 1.40, 1.45, 1.39, 1.39, 1.44, 1.38.
36. ¿Qué tamaño de muestra es necesario usar en el problema 34 si se desea obtener un intervalo de confianza de longitud 0.1?
37. El calor específico del hierro se midió 41 veces a una temperatura de 25°C. La muestra tenía una media de 0.106 [cal/g °C] y desviación estándar 0.002 [cal/g °C]. ¿Qué puede afirmarse con una probabilidad de 95% sobre el posible tamaño del error si se usa esa media de la muestra para calcular el verdadero calor específico del hierro?
38. Determinar un intervalo de confianza del 95% para el porcentaje de automóviles que circulan en una autopista y tienen mal ajustados los frenos, usando un muestreo aleatorio de 1000 automóviles detenidos en un retén en esa autopista, de los cuales 188 tienen mal ajustados los frenos.

Suponiendo que las poblaciones a partir de la que se obtuvieron las siguientes muestras son normales, determinar un intervalo de confianza del 99% para la variancia σ^2 de la población.

39. Dureza de Rockwell de brocas para herramienta 64.9, 64.1, 63.8, 64.0
40. Una muestra de tamaño $n = 128$ con variancia $s^2 = 1.921$.
41. Usando una muestra de 10 valores con media 14.5 tomada de una población normal con variancia $\sigma^2 = 0.25$, probar la hipótesis $\mu_0 = 15.0$ contra la alternativa $\mu_1 = 14.5$ en el nivel del 5%.
42. En el problema 41, cambiar la alternativa a $\mu \neq 15.0$ y ejecutar la prueba como antes.
43. Encontrar el poder de la prueba en el problema 41.
44. Usando una muestra de 15 valores con media 36.2 y variancia 0.9, probar la hipótesis $\mu_0 = 35.0$ contra la alternativa $\mu_1 = 37.0$, suponiendo normalidad y tomando $\alpha = 5\%$.
45. Usando una muestra de 20 valores con variancia 8.25 de una población normal, probar la hipótesis $\sigma_0^2 = 5.0$ contra la alternativa $\sigma_1^2 = 8.1$, eligiendo $\alpha = 5\%$.
46. Una empresa vende pintura en botes que contienen 1 kg de pintura por bote, y está interesada en conocer si el peso medio difiere significativamente de 1 kg, en cuyo caso debe ajustarse la máquina llenadora. Establecer una hipótesis y una alternativa y ejecutar la prueba, suponiendo normalidad y usando una muestra de 20 operaciones de llenado que tiene una media de 991 g y desviación estándar de 8 g. (Elegir $\alpha = 5\%$.)
47. Si una muestra de 100 neumáticos de cierto tipo tiene una vida media de 26 000 km y desviación estándar de 2000 km, ¿puede el fabricante afirmar que la verdadera vida media de tales neumáticos es mayor que 25 000 km? Establecer y probar la hipótesis correspondiente eligiendo $\alpha = 1\%$.
48. Tres especímenes de concreto de alta calidad tienen una resistencia a la compresión de 357, 359 y 413 [kg/cm²], y para tres especímenes de concreto normal los valores fueron 346, 358 y 302. Probar la igualdad de las medias de la población, $\mu_1 = \mu_2$, contra la alternativa $\mu_1 > \mu_2$. (Suponer normalidad e igualdad de las variancias. Elegir $\alpha = 5\%$.)
49. Usando muestras de tamaños 10 y 5 con variancias $s_1^2 = 50$ y $s_2^2 = 20$, y suponiendo normalidad de las poblaciones correspondientes, probar la hipótesis H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ contra la alternativa $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$. Elegir $\alpha = 5\%$.
50. Establecer un diagrama de control (encontrar el LIC y el LSC) para la media de una distribución normal (longitud de tornillos) con media 5.00 cm y desviación estándar 0.03 cm, para una muestra de tamaño $n = 8$.
51. En un diagrama de control, ¿qué efecto sobre LSC – LIC se obtiene para la media tiene si se duplica el tamaño de la muestra? ¿Y si se cambia de $\alpha = 1\%$ a $\alpha = 5\%$?

52. Las siguientes muestras de tornillos (longitud en pulgadas) se tomaron de una producción de salida:

Muestra No.	1	2	3	4	5	6	7	8
Longitud	3.49	3.48	3.52	3.50	3.51	3.49	3.52	3.53
	3.50	3.47	3.49	3.51	3.48	3.50	3.50	3.49

Suponiendo que la población es normal con media 3.500 y variancia 0.0004, establecer un diagrama de control para la media y sobre éste trazar la gráfica de las medias de la muestra.

53. Un consumidor verifica empaques por medio de un plan de muestreo simple en el que se usa un tamaño de muestra igual a 40 y un número de aceptación de 1. Usando la tabla A6 del apéndice 5, calcular la probabilidad de aceptación de lotes que contienen los siguientes porcentajes de empaques defectuosos: 0.25%, 0.50%, 1%, 2%, 5%, 10%. Graficar la curva CO. (Usar la aproximación de Poisson.)
54. Lotes de tubos de cobre se inspeccionan según un plan de muestreo simple en el que se usa un tamaño de muestra igual a 30 y un número de aceptación de 1. Graficar la curva CO del plan, usando la aproximación de Poisson.
55. Graficar la curva CSP en el problema 54. Determinar el LCSP, suponiendo que se aplica rectificación.
56. Realizar el trabajo requerido en el problema 54 si $n = 35$ y $c = 0$.
57. Si en cierta semana los clientes que asistieron a un banco de lunes a viernes fueron 2680, 1600, 2020, 2250, 3650, ¿es posible afirmar al nivel del 1% que la variable aleatoria X = *Número de clientes diarios* tiene la misma probabilidad (0.2) para cada día de la semana?
58. Repetir la prueba del problema 57 para el modelo más razonable de que las cinco probabilidades son 0.22, 0.14, 0.16, 0.18, 0.30, respectivamente, eligiendo $\alpha = 1\%$.
59. ¿Una cortadora automática tiene la tendencia de cortar trozos metálicos cada vez más largos si las longitudes de los especímenes subsecuentes [pulg] fueron 10.1, 9.8, 9.9, 10.2, 10.6, 10.5?
60. ¿La muestra 4.8, 4.7, 4.9, 5.1, 4.6, 5.0 (ordenada según cantidades crecientes de irrigación) indica que la producción de maíz por metro cuadrado aumenta con el incremento de irrigación?

Resumen del capítulo 24

Estadística matemática

Para un experimento en el que se observa alguna cantidad (número de defectuosos, estatura de las personas, etc.) hay asociada una variable aleatoria X cuya distribución de probabilidad está definida por una función de distribución

$$F(x) = P(X \leqq x) \qquad \text{(1)} \qquad \text{(Secc. 23.4)}$$

que para cada x proporciona la probabilidad de que X asuma cualquier valor que no exceda x. En estadística se consideran muestras aleatorias $x_1, \cdots, x_n$ de tamaño n mediante la ejecución del experimento n veces (secciones 24.2, 24.3). El objetivo es, a partir de las propiedades de muestras, obtener conclusiones sobre propiedades de la distribución de la X correspondiente (sección 24.1). Lo anterior se lleva a cabo calculando *estimaciones puntuales* o *intervalos de confianza*, o efectuando una *prueba* para **parámetros** (μ y σ^2 en la distribución normal, p en la distribución binomial, etc.), o por medio de una prueba para funciones de distribución.

Una **estimación puntual** (sección 24.5) es un valor aproximado de un parámetro en la distribución de X que se obtiene a partir de una muestra. Por ejemplo, la **media de la muestra** (sección 24.4)

$$(2) \qquad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$$

es una estimación de la media μ de X, y la **variancia de la muestra** (sección 24.4)

$$(3) \qquad \begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{n-1}[(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2] \end{aligned}$$

es una estimación de la variancia σ^2 de X. La estimación puntual puede efectuarse por medio del **método de máxima probabilidad** básico (sección 24.5).

Los **intervalos de confianza** (sección 24.6) son intervalos $\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2$ con puntos extremos calculados a partir de una muestra tal que con una elevada probabilidad γ que puede elegirse (95%, por ejemplo), se obtiene un intervalo que contiene el valor verdadero desconocido del parámetro θ en la distribución de X. Este intervalo se denota por CONF $\{\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2\}$.

En una **prueba** para un parámetro se prueba una *hipótesis* $\theta = \theta_0$ contra una *alternativa* $\theta = \theta_1$ esta notación no guarda ninguna relación con la θ_1 anterior y luego, con base en una muestra, la hipótesis se rechaza (o no se rechaza) en favor de la alternativa (sección 24.7). Como cualquier conclusión sobre X que se obtenga a partir de muestras, lo anterior puede implicar errores que conducen a una decisión falsa, como sigue. Existe una pequeña probabilidad (que es posible elegir, por ejemplo 5% o 1%) de que se rechace una hipótesis verdadera, y existe una probabilidad (que es posible calcular y disminuir tomando muestras más grandes) de que se acepte una hipótesis falsa. α se denomina **nivel de significancia** y $1 - \beta$, **poder** de la prueba. Entre muchas aplicaciones, la prueba se utiliza en **control de calidad** (sección 24.8) y en **muestreo de aceptación** (sección 24.9).

Si se desconoce no solamente un parámetro sino también el tipo de distribución de X, es posible usar la **prueba ji cuadrada** (sección 24.10) para probar la hipótesis de que alguna función $F(x)$ es la función de distribución desconocida de X. Lo anterior se lleva a cabo determinando la discrepancia entre $F(x)$ y la función de distribución $F(x)$ de una muestra dada.

Las **pruebas no paramétricas** o "libres de distribución" son pruebas que se aplican a cualquier distribución, ya que se basan en ideas combinatorias. En la sección 24.11 se analizaron dos de tales pruebas.

Por último, en la sección 24.12 se abordaron muestras que constan de pares de valores, según se presentan si de manera simultánea se consideran dos cantidades, y se proporcionó una introducción al **análisis de regresión**. Una de

estas dos cantidades es una variable ordinaria x y la otra, una variable aleatoria Y cuya media depende de x,

$$\mu(x) = \kappa_0 + \kappa_1 x.$$

A partir de una muestra dada $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ es posible obtener como análoga la **recta de regresión de la muestra**

$$(4) \qquad y - \bar{y} = k_1(x - \bar{x})$$

con $\bar{x} = (x_j)/n$, $y = (y_j)/n$, por medio del **principio de mínimos cuadrados** de Gauss.

Apéndice

1

Bibliografía

Bibliografía general

[1] Abramowitz, M. and I. A. Stegun (eds.), *Handbook of Mathematical Functions*. 10th printing, with corrections. Washington, DC: National Bureau of Standards. (Also New York: Dover.)

[2] Cajori, F., *A History of Mathematics*. 3rd ed. New York: Chelsea.

[3] *CRC Handbook of Mathematical Sciences*. 6th ed. Boca Raton, FL: CRC Press.

[4] Courant, R. and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*. 2 vols. New York: Wiley-Interscience.

[5] Courant, R. and F. John, *Introduction to Calculus and Analysis*. 2 vols. New York: Wiley-Interscience.

[6] Erdélyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*. 3 vols. New York: McGraw-Hill, 1953, 1955.

[7] Hildebrand, F. B., *Advanced Calculus for Applications*. 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

[8] Itô, K. (ed.), *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*. 4 vols. 2nd ed. Cambridge, MA: MIT Press.

[9] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: Wiley.

[10] Magnus, W., F. Oberhettinger and R. P. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*. 3rd ed. New York: Springer.

[11] Sneddon, I. N. (ed.), *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*. Elmsford, NY: Pergamon.

[12] Thomas, G. B. and R. L. Finney, *Calculus and Analytic Geometry*. 8th ed. Reading, MA: Addison-Wesley.

Parte A. Ecuaciones diferenciales ordinarias (capítulos 1-6)

Ver también Parte E: Métodos numéricos

[A1] Birkhoff, G. and G.-C. Rota, *Ordinary Differential Equations*. 4th ed. New York: Wiley.

[A2] Cesari, L., *Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations*. 3rd ed. New York: Springer. 1971.

[A3] Churchill, R. V., *Operational Mathematics*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill.

[A4] Coddington, E. A. and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*. New York: McGraw-Hill.
[A5] Erdélyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger and F. Tricomi, *Tables of Integral Transforms*. 2 vols. New York: McGraw-Hill.
[A6] Ince, E. L., *Ordinary Differential Equations*. New York: Dover.
[A7] Kamke, E., *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. I. Gewöhnliche Differentialgleichungen*. 3rd ed. New York: Chelsea. 1948. (This extremely useful book contains a systematic list of more than 1500 differential equations and their solutions.)
[A8] Oberhettinger, F. and L. Badii, *Tables of Laplace Transforms*. New York: Springer.
[A9] Watson, G. N., *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. 2nd ed. Cambridge: University Press.
[A10] Widder, D. V., *The Laplace Transform*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Parte B. Álgebra lineal, cálculo vectorial (capítulos 7-9)

Ver también Parte E: Métodos numéricos, para libros de álgebra lineal *numérica*

[B1] Bellman, R., *Introduction to Matrix Analysis*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill.
[B2] Gantmacher, F. R., *The Theory of Matrices*. 2 vols., 2nd ed. New York: Chelsea.
[B3] Gohberg, I., P. Lancaster and L. Rodman, *Invariant Subspaces of Matrices with Applications*. New York: Wiley.
[B4] Herstein, I. N., *Topics in Algebra*. 2nd ed. Lexington, MA: Xerox College Publishing.
[B5] Kreyszig, E., *Differential Geometry*. Mineola, NY: Dover.
[B6] Lang, S., *Linear Algebra*. 3rd ed. New York: Springer.
[B7] MacDuffee, C. C., *The Theory of Matrices*. New York: Chelsea.
[B8] Nef, W., *Linear Algebra*. 2nd ed. New York: Dover.
[B9] Wilkinson, J. H., *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Oxford: Clarendon.
[B10] Wilkinson, J. H. and C. Reinsch, *Linear Algebra*. 2nd ed. New York: Springer.

Parte C. Análisis de Fourier y ecuaciones diferenciales parciales (capítulos 10, 11)

Ver también Parte E: Métodos numéricos, para libros de métodos *numéricos* de ecuaciones diferenciales parciales

[C1] Carslaw, H. S. and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*. 2nd ed. Oxford: Clarendon.
[C2] Churchill, R. V. and J. W. Brown, *Fourier Series and Boundary Value Problems*. 4th ed. New York: McGraw-Hill.
[C3] Epstein, B., *Partial Differential Equations*. Malabar, FL: Krieger.
[C4] Erdélyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger and F. Tricomi, *Tables of Integral Transforms*. 2 vols. New York: McGraw-Hill.

[C5] Gilbarg, D. and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. 2nd ed. New York: Springer.
[C6] Gustafson, K. E., *Introduction to Partial Differential Equations and Hilbert Space Methods*. New York: Wiley.
[C7] John, F., *Partial Differential Equations*. 4th ed. New York: Springer.
[C8] Sneddon, I. N., *Elements of Partial Differential Equations*. New York: McGraw-Hill.
[C9] Sommerfeld, A., *Partial Differential Equations in Physics*. New York: Academic Press.
[C10] Szegö, G., *Orthogonal Polynomials*. 4th ed. New York: American Mathematical Society.
[C11] Tolstov, G. P., *Fourier Series*. New York: Dover.
[C12] Widder, D. V., *The Heat Equation*. New York: Academic Press.
[C13] Zauderer, E., *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*. 2nd ed. New York: Wiley.
[C14] Zygmund, A., *Trigonometric Series*. 2nd ed., reprinted with corrections. Cambridge: University Press.

Parte D. Análisis complejo (capítulos 12-17)

[D1] Ahlfors, L. V., *Complex Analysis*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill.
[D2] Ahlfors, L. V. and L. Sario, *Riemann Surfaces*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
[D3] Bieberbach, L., *Conformal Mapping*. New York: Chelsea.
[D4] Henrici, P., *Applied and Computational Complex Analysis*. 3 vols. New York: Wiley.
[D5] Hille, E., *Analytic Function Theory*. 2 vols. 2nd ed. New York: Chelsea.
[D6] Knopp, K., *Theory of Functions*. 2 parts. New York: Dover.
[D7] Knopp, K., *Elements of the Theory of Functions*. New York: Dover.
[D8] Rothe, R., F. Ollendorf and K. Pohlhausen, *Theory of Functions as Applied to Engineering Problems*. New York: Dover.
[D9] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill.
[D10] Titchmarsh, E. C., *The Theory of Functions*. 2nd ed. London: Oxford University Press.
[D11] Weyl, H., *The Concept of a Riemann Surface*. Reading, MA: Addison-Wesley.

Parte E. Análisis numérico (capítulos 18-20)

[E1] Aho, A. V., J. E. Hopcroft and J. D. Ullman, *The Design and Analysis of Computer Algorithms*. Reading, MA: Addison-Wesley.
[E2] Collatz, L., *The Numerical Treatment of Differential Equations*. 3rd ed. New York: Springer.
[E3] Dahlquist, G. and Å. Björck, *Numerical Methods*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
[E4] Davis, P. and P. Rabinowitz, *Methods of Numerical Integration*. 2nd ed. New York: Academic Press.
[E5] DeBoor, C., *A Practical Guide to Splines*. New York: Springer. printed 1991.)
[E6] Dongerra, J. J. et al., *LINPACK Users Guide*. Philadelphia: SIAM Publications.

[E7] Dongerra, J. J. et al., *Solving Linear Systems on Vector and Shared Memory Computers*. Philadelphia: SIAM Publications.

EISPACK, see [E19].

EISPACK 2, see [E9].

[E8] Forsythe, G. E. and W. R. Wasow, *Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations*. New York: Wiley.

[E9] Garbow, B. S. et al., *Matrix Eigensystem Routines: EISPACK Guide Extension*. New York: Springer.

[E10] Golub, G. H. and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*. 2nd ed. Baltimore: Johns Hopkins University Press.

[E11] Hildebrand, F. B., *Introduction to Numerical Analysis*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill.

[E12] IMSL (International Mathematical and Statistical Libraries), *FORTRAN Subroutines for Mathematics and Statistics. User's Manuals, Version 2.0*. 6 vols. Houston, TX: IMSL.

[E13] Isaacson, E. and H. B. Keller, *Analysis of Numerical Methods*. New York: Wiley.

[E14] Knuth, D. E., *The Art of Computer Programming*. 3 vols. 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley.

[E15] Lambert, J. D., *Computational Methods in Ordinary Differential Equations*. New York: Wiley.

LINPACK, see [E6].

[E16] Ostrowski, A., *Solution of Equations in Euclidean and Banach Spaces*. 3rd ed. New York: Academic Press.

[E17] Prenter, P. M., *Splines and Variational Methods*. New York: Wiley, 1989.

[E18] Press, W. H. et al., *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge: University Press.

[E19] Smith, B. T. et al., *Matrix Eigensystems Routines-EISPACK Guide*. 2nd ed. New York: Springer.

[E20] Smith, G. D., *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. 3rd ed. London: Oxford University Press.

[E21] Stetter, H. J., *Analysis of Discretization Methods for Ordinary Differential Equations*. New York: Springer.

[E22] Stewart, G. W., *Introduction to Matrix Computations*. New York: Academic Press.

[E23] Strang, G. and G. J. Fix, *An Analysis of the Finite Element Method*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

[E24] Todd, J. (ed.), *Survey of Numerical Analysis*. New York: McGraw-Hill.

[E25] Todd, J., *Basic Numerical Mathematics*. 2 vols. New York: Academic Press.

[E26] Wilkinson, J. H., *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Oxford: Clarendon. 1965.

[E27] Wilkinson, J. H. and C. Reinsch, *Linear Algebra*. New York: Springer.

Parte F. Optimización, gráficas (capítulos 21, 22)

[F1] Berge, C., *Graphs*. 3rd ed. New York: North-Holland.

[F2] Bondy, J. A. and U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*. New York: North-Holland.

[F3] Christofides, N. et al. (eds.), *Combinatorial Optimization*. New York: Wiley.

[F4] Chvátal, V., *Linear Programming*. San Francisco: Freeman.

[F5] Cook, W. J., W. H. Cunningham, W. R. Pulleyblank and A. Schrijver, *Combinatorial Optimization*. New York: Wiley.

[F6] Dantzig, G. B., *Linear Programming and Extensions*. 2nd ed. Princeton, NJ: Princeton University Press.

[F7] Dixon, L. C. W., *Nonlinear Optimization*. London: English Universities Press.

[F8] Fletcher, R., *Practical Methods of Optimization*. 2nd ed. New York: Wiley.

[F9] Ford, L. R., Jr., and D. R. Fulkerson, *Flows in Networks*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

[F10] Gass, S. I., *Linear Programming, Methods and Applications*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill.

[F11] Gondran, M. and M. Minoux, *Graphs and Algorithms*. New York: Wiley.

[F12] Gotlieb, C. C. and L. R. Gotlieb, *Data Types and Structures*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

[F13] Harari, F., *Graph Theory*. Reading, MA: Addison-Wesley.

[F14] Papadimitriou, C. H. and K. Steiglitz, *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Parte G. Probabilidad y estadística (capítulos 23, 24)

[G1] Anderson, T. W., *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. 2nd ed. New York: Wiley.

[G2] Cochran, W. G., *Sampling Techniques*. 3rd ed. New York: Wiley.

[G3] Cramér, H., *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton: Princeton University Press.

[G4] David, H. A., *Order Statistics*. 2nd ed. New York: Wiley.

[G5] Dodge, H. F. and H. G. Romig, *Sampling Inspection Tables*. 2nd ed. New York: Wiley.

[G6] Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Vol. I. 3rd ed. New York: Wiley.

[G7] Gibbons, J. D., *Nonparametric Statistical Inference*. 2nd ed. New York: Dekker.

[G8] Hooke, R., *How to Tell the Liars from the Statisticians*. New York: Dekker.

[G9] Huber, P. J., *Robust Statistics*. New York: Wiley.

[G10] IMSL, *FORTRAN Subroutines for Mathematics and Statistics. User's Manuals, Verson 2.0*. 6 vols. Houston, TX: IMSL.

[G11] Kendall, M. and A. Stuart, *The Advanced Theory of Statistics*. 3 vols. 4th ed. New York: Macmillan. (Vol. 3 coauthored by K. Ord.) (*See also* [G16].)

[G12] Kreyszig, E., *Introductory Mathematical Statistics. Principles and Methods*. New York: Wiley.

[G13] Maindonald, J. H., *Statistical Computation*. New York: Wiley.

[G14] Pearson, E. S. and H. O. Hartley, *Biometrika Tables for Statisticians*. Vol. I. 3rd ed. Cambridge: University Press.

[G15] Rand Corporation, *A Million Random Digits with 100,000 Normal Deviates*. Glencoe, IL: Free Press.

[G16] Stuart, A. and J. K. Orth, *Kendall's Advanced Theory of Statistics*. Vols. 1, 2. 5th ed. Kent, U.K.: Arnold.

Apéndice

2

Respuestas a los problemas impares

Problemas de la sección 10.1, página 25

1. $2\pi,\ 2\pi,\ \pi,\ \pi,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1$

17. 0 (n par), $2/n$ (n impar)

19. 0

21. $n[(-1)^n e^{-\pi} - 1]/(1 + n^2)$

23. $[(-1)^n e^{\pi} - 1]/(1 + n^2)$

25. $0\ (n = 0),\ \pi/n\ (n = 1, 3, \cdots),\ -\pi/n\ (n = 2, 4, \cdots)$

Problemas de la sección 10.2, página 34

1. $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - + \cdots\right)$

3. $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x + \cdots\right)$

5. $\frac{4}{\pi}\left(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - + \cdots\right)$

7. $2\left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x + - \cdots\right)$

9. $\frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{9}\cos 3x - \frac{1}{16}\cos 4x + - \cdots\right)$

11. $2\left[\left(\frac{\pi^2}{1} - \frac{6}{1^3}\right)\operatorname{sen} x - \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{6}{2^3}\right)\operatorname{sen} 2x + \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{6}{3^3}\right)\operatorname{sen} 3x - + \cdots\right]$

13. $\frac{2}{\pi}\sin x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x - \frac{2}{9\pi}\operatorname{sen} 3x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x + \frac{2}{25\pi}\operatorname{sen} 5x + \cdots$

15. $\frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{9}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{25}\operatorname{sen} 5x - + \cdots\right)$

Problemas de la sección 10.3, página 37

1. $\frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen} \pi x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3\pi x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5\pi x + \cdots\right)$

3. $1 + \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5}\operatorname{sen}\frac{5\pi x}{2} + \cdots\right)$

5. $\frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2}\left(\cos \pi x - \frac{1}{4}\cos 2\pi x + \frac{1}{9}\cos 3\pi x - + \cdots\right)$

7. $\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\left(\cos \pi x + \frac{1}{9}\cos 3\pi x + \cdots\right) + \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{sen} \pi x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\pi x + - \cdots\right)$

9. $-\frac{4}{\pi^2}\left(\cos \pi x + \frac{1}{9}\cos 3\pi x + \cdots\right) + \frac{2}{\pi}\left(2\operatorname{sen} \pi x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\pi x + - \cdots\right)$

11. $1 - \frac{12}{\pi^2}\left(\cos \pi x - \frac{1}{4}\cos 2\pi x + \frac{1}{9}\cos 3\pi x - \frac{1}{16}\cos 4\pi x + - \cdots\right)$

13. $4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\pi x - \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\pi x - \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6\pi x - \cdots\right)$

17. Escribir τ por x en el Ejemplo 1 y hacer $\tau = x - 1$.

Problemas de la sección 10.4, página 42

1. Par: $|x^3|$, $x^2 \cos nx$, $\cosh x$. Impar $x \cos nx$, $\operatorname{senh} x$, $x|x|$.

3. Impar 5. Impar 7. Par 9. Ninguna de ambas cosas 11. Ninguna de ambas cosas

13. $1/(1 - x^2) + x/(1 - x^2)$ 15. $\cosh kx + \operatorname{senh} kx$

25. $\frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\left(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - + \cdots\right)$

27. $\frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{9}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{25}\operatorname{sen} 5x - + \cdots\right)$

29. $\frac{\pi^2}{6} - \frac{4}{\pi}\cos x - \frac{2}{2^2}\cos 2x + \frac{4}{3^3\pi}\cos 3x + \frac{2}{4^2}\cos 4x - \frac{4}{5^3\pi}\cos 5x + \cdots$

31. $\frac{\pi^2}{12} - \cos x + \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{16}\cos 4x - + \cdots$

Problemas de la sección 10.5, página 46

1. $\frac{4k}{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5}\operatorname{sen}\frac{5\pi x}{L} + \cdots\right)$

3. $\frac{2L^2}{\pi}\left[\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{L} + \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3^3\pi^2}\right)\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{L} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}\frac{4\pi x}{L} + \cdots\right]$

5. $\frac{2L}{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{L} + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{L} + \cdots\right)$

7. $\left(1 + \frac{2}{\pi}\right)\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9\pi}\right)\operatorname{sen} 3x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x + \cdots$

9. $\frac{4L}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} - \frac{1}{3^2}\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5^2}\operatorname{sen}\frac{5\pi x}{L} - + \cdots\right)$

11. $\frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{L} + \frac{1}{9}\cos\frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{25}\cos\frac{5\pi x}{L} + \cdots\right)$

13. $\frac{L^2}{3} - \frac{4L^2}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{L} - \frac{1}{4}\cos\frac{2\pi x}{L} + \frac{1}{9}\cos\frac{3\pi x}{L} - \frac{1}{16}\cos\frac{4\pi x}{L} + - \cdots\right)$

15. $\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\cos\frac{\pi x}{L} - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi x}{L} - + \cdots\right)$

17. $a_0 = \frac{1}{L}(e^L - 1)$, $a_n = \frac{2L}{L^2 + n^2\pi^2}[(-1)^n e^L - 1]$

19. $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1\cdot 3}\cos\frac{2\pi x}{L} + \frac{1}{3\cdot 5}\cos\frac{4\pi x}{L} + \frac{1}{5\cdot 7}\cos\frac{6\pi x}{L} + \cdots\right)$

Problemas de la sección 10.6, página 49

1. Use (7).

3. $-\frac{2i}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2n+1}e^{(2n+1)ix}$

5. $i\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{inx}$

7. $\pi + i\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{n}e^{inx}$

9. $\frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}e^{inx}$

Problemas de la sección 10.7, página 52

3. $y = C_1\cos\omega t + C_2\operatorname{sen}\omega t + A(\omega)\operatorname{sen} t$, $A(\omega) = 1/(\omega^2 - 1)$, $A(0.5) = -1{,}33$, $A(0{,}7) = -1{,}96$, $A(0.9) = -5.3$, $A(1{,}1) = 4{,}8$, $A(1.5) = 0.8$, $A(2) = 0.33$, $A(10) = 0.01$

5. $y = C_1\cos\omega t + C_2\operatorname{sen}\omega t + \sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{\omega^2 - n^2}\cos nt$

7. $y = C_1\cos\omega t + C_2\operatorname{sen}\omega t$
$+ \frac{\pi}{2\omega^2} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{\omega^2 - 1}\cos t + \frac{1}{9(\omega^2 - 9)}\cos 3t + \cdots\right)$

9. $y = \frac{1 - n^2}{D}a_n\cos nt + \frac{nc}{D}a_n\operatorname{sen} nt$, $D = (1 - n^2)^2 + n^2c^2$

11. $y = -\frac{3c}{64 + 9c^2}\cos 3t - \frac{8}{64 + 9c^2}\sin 3t$

13. $y = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n c}{n^2D_n}\cos nt - \frac{(-1)^n(1 - n^2)}{n^3D_n}\operatorname{sen} nt\right]$, $D_n = (1 - n^2)^2 + n^2c^2$

15. $I = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nt + B_n\operatorname{sen} nt)$, $A_n = (-1)^{n+1}\frac{240(10 - n^2)}{n^2D_n}$,
$B_n = \frac{(-1)^{n+1}2400}{nD_n}$, $D_n = (10 - n^2)^2 + 100n^2$

Problemas de la sección 10.8, página 56

1. $F = \frac{4}{\pi}\left[\operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \cdots + \frac{1}{N}\operatorname{sen} Nx\right]$ (N impar)

5. $F = 2\left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \cdots + \frac{(-1)^{N+1}}{N}\operatorname{sen} Nx\right)$,
$E^* = 8, 5, 3.6, 2.8, 2.3$

7. $F = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{9}\cos 3x - \cdots + \frac{(-1)^{N+1}}{N^2}\cos Nx\right)$, $E^* \approx 4.14,\ 1.00,\ 0.38,\ 0.18,\ 0.10$

9. $F = \frac{2}{\pi}\text{sen } x + \frac{1}{2}\text{sen } 2x - \frac{2}{9\pi}\text{sen } 3x - \frac{1}{4}\text{sen } 4x + \frac{2}{25\pi}\text{sen } 5x + \cdots$,
$E^* = \frac{\pi^3}{12} - \pi\left[\frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{4} + \frac{4}{81\pi^2} - \frac{1}{16} + \frac{4}{625\pi^2} + \cdots\right]$; 1.311, 0.525, 0.509, 0.313, 0.311

15. Usar la serie de Fourier $\cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$.

Problemas de la sección 10.9, página 65

9. $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\left(1 - \frac{2}{w^2}\right)\text{sen } w + \frac{2}{w}\cos w\right]\frac{\cos wx}{w}\,dw$

11. $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{a\ \text{sen}\, aw}{w} + \frac{\cos aw - 1}{w^2}\right]\cos xw\,dw$

13. $A = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos wv}{1+v^2}\,dv = e^{-w}\ (w > 0)$, $\quad f(x) = \int_0^\infty e^{-w}\cos wx\,dw$

15. $f(ax) = \int_0^\infty A(w)\cos axw\,dw = \int_0^\infty A\left(\frac{p}{a}\right)\cos xp\,\frac{dp}{a}$, en donde $wa = p$.
Si de nuevo se escribe w en vez de p, se concluye el resultado.

17. Al derivar (10) se obtiene $\frac{d^2A}{dw^2} = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f^*(v)\cos wv\,dv$, $f^*(v) = v^2 f(v)$, y se concluye el resultado.

Problemas de la sección 10.10, página 70

1. $\sqrt{2/\pi}\,(\text{sen } 2w - 2\ \text{sen } w)/w$
3. $\sqrt{2/\pi}\,(aw\ \text{sen}\, aw + \cos aw - 1)\,/\,w^2$
7. $e^{-w}\sqrt{\pi/2}$
9. $\sqrt{2/\pi}\,[(2 - w^2)\cos w + 2w\ \text{sen } w - 2]/w^3$
11. $\sqrt{\pi/2}$ si $0 < w < \pi$, $\ 0$ si $w > \pi$
13. $\sqrt{\pi/2}\cos w$ si $|w| < \pi/2$, $\ 0$ si $|w| > \pi/2$
17. $\sqrt{\pi/2}\,e^{-w}\cos w$
19. No

Problemas de la sección 10.11, página 77

1. $1/(1 + iw)\sqrt{2\pi}$
3. $\sqrt{2/\pi}\,(2 - w)^{-1}\,\text{sen }(2 - w)$
5. $[-1 + (1 + iaw)e^{-iaw}]/w^2\sqrt{2\pi}$
7. $i\sqrt{2/\pi}\,(\cos w - 1)/w$

Capítulo 10 (cuestionario y problemas de repaso), página 82

17. $\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\text{sen } x + \frac{1}{3}\text{sen } 3x + \frac{1}{5}\text{sen } 5x + \cdots\right)$

19. $\frac{2}{\pi}\left(\text{sen } x - \frac{2}{2}\text{sen } 2x + \frac{1}{3}\text{sen } 3x + \frac{1}{5}\text{sen } 5x - \frac{2}{6}\text{sen } 6x + \cdots\right)$

21. $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{25}\cos 5x + \cdots\right)$

23. $-\text{sen } x + \frac{1}{2}\text{sen } 2x - \frac{1}{3}\text{sen } 3x + \frac{1}{4}\text{sen } 4x - + \cdots$

25. $\frac{8}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{25}\cos 5x + \cdots\right)$

27. $\frac{\pi^2}{12} - \frac{2}{\pi}\cos x - \frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{2}{3^3\pi}\cos 3x + \frac{1}{4^2}\cos 4x - \cdots$

29. $\frac{8}{\pi}\left(\text{sen } x + \frac{1}{3^3}\text{sen } 3x + \frac{1}{5^3}\text{sen } 5x + \cdots\right)$

31. $-\frac{4}{\pi}\left(\text{sen } \pi x + \frac{1}{3}\text{sen } 3\pi x + \frac{1}{5} 5\pi x + \cdots\right)$

33. $\frac{4}{\pi}\left(\text{sen}\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2}\text{sen } \pi x + \frac{1}{3}\text{sen}\frac{3\pi}{2}x - + \cdots\right)$

35. $\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\left(\cos \pi x + \frac{1}{9}\cos 3\pi x + \cdots\right) - \frac{1}{\pi}\left(\text{sen } \pi x - \frac{1}{2}\text{sen } 2\pi x + - \cdots\right)$

37. $-\frac{4}{\pi^2}\left(\cos \pi x + \frac{1}{9}\cos 3\pi x + \cdots\right) + \frac{2}{\pi}\left(2\ \text{sen } \pi x - \frac{1}{2}\text{sen } 2\pi x + - \cdots\right)$

39. $-\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\left(\cos \pi x - \frac{1}{4}\cos 2\pi x + \frac{1}{9}\cos 3\pi x - + \cdots\right) + \frac{2}{\pi}\left(\text{sen } \pi x - \frac{1}{2}\text{sen } 2\pi x + - \cdots\right)$

41. $\pi/4$
43. $\pi^3/32$
47. 5.168, 0.075, 0.075, 0.012, 0.012, 0.004

49. $y = C_1\cos \omega t + C_2\,\text{sen } \omega t + \frac{\pi^2}{12\omega^2} - \frac{1}{\omega^2 - 1}\cos t + \frac{1}{4(\omega^2 - 4)}\cos 2t - + \cdots$

Problemas de la sección 11.1, página 89

25. $u = f(x)$
27. $u_x = f(y)$, $u = xf(y) + g(y)$
29. $u = c(y)e^{x^2y}$
31. $u = v(x) + w(y)$
33. $u = c = const$
35. $u = cx + g(y)$

Problemas de la sección 11.3, página 99

1. $u = 0.02\cos t\ \text{sen } x$
3. $u = k(\cos t\ \text{sen } x - \cos 2t\ \text{sen } 2x)$
5. $u = \frac{4}{5\pi}\left(\frac{1}{4}\cos 2t\ \text{sen } 2x - \frac{1}{36}\cos 6t\ \text{sen } 6x + \frac{1}{100}\cos 10t\ \text{sen } 10x - + \cdots\right)$
7. $u = \frac{8k}{\pi}\left(\cos t\ \text{sen } x + \frac{1}{3^3}\cos 3t\ \text{sen } 3x + \frac{1}{5^3}\cos 5t\ \text{sen } 5x + \cdots\right)$
9. $u = 12k\left[\left(\frac{\pi}{1^3} - \frac{8}{1^5\pi}\right)\cos t\ \text{sen } x + \left(\frac{\pi}{3^3} - \frac{8}{3^5\pi}\right)\cos 3t\ \text{sen } 3x + \cdots\right]$
11. $u = 0.1\ \text{sen } x\ (\cos t - 2\ \text{sen } t)$
15. $27,\ 960/\pi^6 \approx 0.9986$
17. $u = ke^{c(z+y)}$
19. $u = k\exp[c(x^2 + y^2)]$
21. $u = ky^c e^{cx}$
23. $u = k\exp(cx + y/c)$

Problemas de la sección 11.4, página 104

9. $17.5n$ ciclos/s

13. $u = f_1(x) + f_2(xy)$

15. $u = xf_1(x - y) + f_2(x - y)$

17. $u = f_1(x + y) + f_2(3x + y)$

23. $u = \dfrac{8L^2}{\pi^3}\left(\cos c\left(\dfrac{\pi}{L}\right)^2 t \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{L} + \dfrac{1}{3^3}\cos c\left(\dfrac{3\pi}{L}\right)^2 t \operatorname{sen} \dfrac{3\pi x}{L} + \cdots\right)$

25. $u(0, t) = 0,\ u(L, t) = 0,\ u_x(0, t) = 0,\ u_x(L, t) = 0$

27. $\beta L \approx \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \cdots$ (más exactamente 4.730, 7.853, 10.996, $\cdots$)

29. $\beta L \approx \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \cdots$ (más exactamente 1.875, 4.694, 7.855, $\cdots$)

Problemas de la sección 11.5, página 116

3. $\lambda_1^2 = (\ln 2)/10,\ c^2 = 0.00702L^2$

5. $u = \operatorname{sen} 0.1\pi x\, e^{-1.752\pi^2 t/100}$

7. $u = \dfrac{40}{\pi^2}\left(\operatorname{sen} 0.1\pi x\, e^{-0.01752\pi^2 t} - \dfrac{1}{9}\operatorname{sen} 0.3\pi x\, e^{-0.01752(3\pi)^2 t} + - \cdots\right)$

9. $u = \dfrac{8}{\pi^3}\left(\operatorname{sen} 0.1\pi x\, e^{-0.01752\pi^2 t} + \dfrac{1}{3^3}\operatorname{sen} 0.3\pi x\, e^{-0.01752(3\pi)^2 t} + \cdots\right)$

11. Como las temperaturas en los extremos se mantienen constantes, la temperatura tiende a una distribución de estado estacionario (independiente del tiempo) $u_l(x)$ cuando $t \to \infty$, y $u_1 = U_1 + (U_2 - U_1)x/L$, la solución de (1) con $\partial u/\partial t = 0$ que satisface las condiciones en la frontera.

15. $u = 1$

17. $u = 0.5 \cos 2x\, e^{-4t}$

19. $u = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{8}{\pi}\left(\dfrac{1}{4}\cos 2x\, e^{-4t} + \dfrac{1}{36}\cos 6x\, e^{-36t} + \cdots\right)$

21. $u = \dfrac{\pi}{8} + \left(1 - \dfrac{2}{\pi}\right)\cos x\, e^{-t} - \dfrac{1}{\pi}\cos 2x\, e^{-4t} - \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{9\pi}\right)\cos 3x\, e^{-9t} + \cdots$

25. $w = e^{-\beta t}$

27. $-\dfrac{K\pi}{L}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nB_n\, e^{-\lambda_n^2 t}$

29. 2.57, 0.52, 0.10°C

31. $u = (\operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi x \operatorname{senh} \frac{1}{2}\pi y)/\operatorname{senh} \pi$

33. $u = \dfrac{80}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n - 1} \operatorname{sen} \dfrac{(2n - 1)\pi x}{24} \dfrac{\operatorname{senh}[(2n - 1)\pi y/24]}{\operatorname{senh}(2n - 1)\pi}$

35. $u(x, y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \dfrac{n\pi(b - y)}{a}$,

$$A_n = \frac{2}{a \operatorname{senh}(n\pi b/a)} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}\, dx$$

37. $u(x, y) = \dfrac{A_0}{24} x + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n \dfrac{\operatorname{senh}(n\pi x/24)}{\operatorname{senh} n\pi} \cos \dfrac{n\pi y}{24}$,

$$A_0 = \frac{1}{24}\int_0^{24} f(y)\, dy,\quad A_n = \frac{1}{12}\int_0^{24} f(y) \cos \frac{n\pi y}{24}\, dy$$

39. $u = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos nx\, e^{-ny}$, $A_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\, dx$,

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \quad n = 1, 2, \cdots$$

Problemas de la sección 11.6, página 123

7. $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{(a-x)/\tau}^{(b-x)/\tau} e^{-w^2}\, dw - \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{(a+x)/\tau}^{(b+x)/\tau} e^{-w^2}\, dw$

11. $A(p) = \dfrac{2}{\pi(1 + p^2)}$, $B(p) = 0$, $u = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{1}{1 + p^2} \cos px\, e^{-c^2p^2t}\, dp$

13. $A(p) = \dfrac{2 \operatorname{sen} p}{\pi p}$, $B(p) = 0$, $u = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen} p}{p} \cos px\, e^{-c^2p^2t}\, dp$

Problemas de la sección 11.8, página 134

1. c aumenta, así como la frecuencia.

5. $c\pi\sqrt{260}$ (eigenfunciones correspondientes $F_{4,16}$, $F_{16,14}$), etc.

7. $A = ab$, $b = A/a$, $(ma^{-2} + na^2A^{-2})' = 0$ da $a^2/b^2 = m/n$.

9. $f_1(x) = 2(4x - x^2)$, $f_2(y) = 2y - y^2$

11. $B_{mn} = (-1)^{m+1} 8/mn\pi$ (n impar), 0 (n par)

13. $4(\cos m\pi/2 - (-1)^m)(\cos n\pi/2 - (-1)^n)/mn\pi^2$

15. $B_{mn} = (-1)^{m+n} ab/mn\pi^2$

17. $B_{mn} = 4[1 - (-1)^n(b + 1)][1 - (-1)^m(a + 1)]/mn\pi^2$

19. $B_{mn} = (-1)^{m+n}\dfrac{144a^3b^3}{m^3n^3\pi^6}$

21. $u = k \cos \pi\sqrt{5}t \operatorname{sen} \pi x \operatorname{sen} 2\pi y$

23. $u = k \cos 5\pi t \operatorname{sen} 3\pi x \operatorname{sen} 4\pi y$

Problemas de la sección 11.9, página 137

9. $u = 30r \operatorname{sen} \theta - 10r^3 \operatorname{sen} 3\theta$

11. $u = \dfrac{400}{\pi}\left(r \operatorname{sen} \theta + \dfrac{1}{3} r^3 \operatorname{sen} 3\theta + \dfrac{1}{5} r^5 \operatorname{sen} 5\theta + \cdots\right)$

13. $u = \dfrac{2}{\pi} r \operatorname{sen} \theta + \dfrac{1}{2} r^2 \operatorname{sen} 2\theta - \dfrac{2}{9\pi} r^3 \operatorname{sen} 3\theta - \dfrac{1}{4} r^4 \operatorname{sen} 4\theta + \cdots$

15. $u = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\left(r \cos \theta + \dfrac{1}{9} r^3 \cos 3\theta + \dfrac{1}{25} r^5 \cos 5\theta + \cdots\right)$

17. $u = \pi/2$

19. $u = \dfrac{4u_0}{\pi}\left(\dfrac{r}{a} \operatorname{sen} \theta + \dfrac{1}{3a^3} r^3 \operatorname{sen} 3\theta + \dfrac{1}{5a^5} r^5 \operatorname{sen} 5\theta + \cdots\right)$

21. $a^2u_{x^*x^*} + c^2u_{y^*y^*}$

23. $4x^*u_{x^*x^*} + 4y^*u_{y^*y^*} + 2u_{x^*} + 2u_{y^*}$

25. $u_{x^*x^*} + u_{y^*y^*}$

27. Use $\nabla^2 u = 0$ y $u_n = u_r$.

Problemas de la sección 11.10, página 144

5. $T = 6.828\rho R^2 f_1^2$, f_1 la frecuencia fundamental

9. No

15. $u = 4k\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \dfrac{J_2(\alpha_m)}{\alpha_m^2 J_1^2(\alpha_m)} \cos \alpha_m t\, J_0(\alpha_m r)$

23. $\alpha_{11}/2\pi \approx 0.6099$ (ver la tabla A1 en el apéndice 5)

Problemas de la sección 11.11, página 148

3. $u = 160/r + 30$ 5. $u = -40 \ln r/(\ln 2) + 150$

17. $u = (u_1 - u_0)(\ln r)/\ln (r_1/r_0) + (u_0 \ln r_1 - u_1 \ln r_0) / \ln (r_1/r_0)$

Problemas de la sección 11.12, página 153

5. $u = 1$

7. $\cos 2\phi = 2 \cos^2 \phi - 1$, $2x^2 - 1 = \frac{4}{3}P_2(x) - \frac{1}{3}$, $u = \frac{4}{3}r^2P_2(\cos \phi) - \frac{1}{3}$

9. $x^3 = \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{3}{5}P_1(x)$, $u = \frac{2}{5}r^3P_3(\cos \phi) + \frac{3}{5}rP_1(\cos \phi)$

11. $u = 4r^3P_3(\cos \phi) - 2r^2P_2(\cos \phi) + rP_1(\cos \phi) - 2$

17. Este es el análogo del ejemplo 1 con 55 reemplazado por 10.

19. $55(3/8 + 5/16) \approx 37.8$

25. $u = U_0 \cos (\pi t/l\sqrt{LC}) \text{ sen } (\pi x/l)$

Problemas de la sección 11.13, página 158

5. $U(x, s) = \dfrac{c(s)}{x^s} + \dfrac{x}{s^2(s + 1)}$, $U(0, s) = 0$, $c(s) = 0$,
$u(x, t) = x(t - 1 + e^{-t})$

9. Set $x^2/4c^2\tau = z^2$. Usar z como una nueva variable de integración. Usar $\text{fer}(\infty) = 1$.

Capítulo 11 (cuestionario y problemas de repaso), página 164

21. $u = A(x) \cos 4y + B(x) \text{ sen } 4y$
23. $u = A(y)e^{-2x} + B(y)e^{x} - 5$
25. $u = g(x)(1 - e^{-y}) + f(x)$
27. $u = f_1(y) + f_2(x + y)$
29. $u = yf_1(x + y) + f_2(x + y)$
31. $u = f_1(x + y) + f_2(2y - x)$
33. $u = f_1(2x - y) + f_2(2y - x)$
35. $-0.1 \cos 3t \text{ sen } 3x$
37. $\frac{3}{4} \cos t \text{ sen } x - \frac{1}{4} \cos 3t \text{ sen } 3x$
39. $u = k$
41. $u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x\, e^{-4t}$
43. $u = \text{sen } 0.02\pi x\, e^{-0.004572t}$

45. $u = \dfrac{3}{4} \text{ sen } \dfrac{\pi x}{10} e^{-0.1143t} - \dfrac{1}{4} \sin \dfrac{3\pi x}{10} e^{-1.029t}$

47. $u = \dfrac{200}{\pi^2} \left(\text{sen } \dfrac{\pi x}{50} e^{-0.004572t} - \dfrac{1}{9} \text{ sen } \dfrac{3\pi x}{50} e^{-0.04115t} + \cdots \right)$

49. $u = 95 \cos 2x\, e^{-4t}$
59. $u = 275/r - 27.5$

Problemas de la sección 12.1, página 176

3. $32 - 24i$ 5. $-\frac{7}{41} + \frac{22}{41}i$ 7. $-47.2 - 23i$ 9. $-10 - 24i$

11. $31/50$ 13. $2xy/(x^2 + y^2)$ 15. $x^2 - y^2, x^2$ 17. 16

Problemas de la sección 12.2, página 183

3. 2.5 5. 1 7. 1 9. $8/17$

11. $\sqrt{2}(\cos \frac{1}{4}\pi + i \text{ sen } \frac{1}{4}\pi)$
13. $10(\cos 0.927 + i \text{ sen } 0.927)$
15. $\frac{1}{4}(\cos \frac{1}{4}\pi + i \text{ sen } \frac{1}{4}\pi)$
17. $0.563(\cos 0.308 + i \text{ sen } 0.308)$
19. -3.042 21. $\pi/4$
23. $-2 + 2i$
25. $-0.227 - 0.974i$
27. $\pm(2 - 2i)$
29. $\pm 1, \pm i, \pm(1 \pm i)/\sqrt{2}$
31. $\pm(1 \pm i)/\sqrt{2}$

33. $\sqrt[6]{2}\left(\cos \dfrac{k\pi}{12} + i \text{ sen } \dfrac{k\pi}{12} \right)$, $k = 1, 9, 17$

35. $3 + 2i, 2 - i$
37. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geqq |x|$, etc.

39. La ecuación (5) se cumple cuando $z_1 + z_2 = 0$. Sea $z_1 + z_2 \neq 0$ y $c = a + ib = z_1/(z_1 + z_2)$. Por (19) en el problema 37, $|a| \leqq |c|$, $|a - 1| \leqq |c - 1|$. De esta manera $|a| + |a - 1| \leqq |c| + |c - 1|$. Resulta evidente que $|a| + |a - 1| \geqq 1$. Juntos se tiene la desigualdad; multiplicar por $|z_1 + z_2|$ para obtener (5).

$$1 \leqq |c| + |c - 1| = \left| \frac{z_1}{z_1 + z_2} \right| + \left| \frac{z_2}{z_1 + z_2} \right|$$

Problemas de la sección 12.3, página 186

1. Circunferencia, radio 4, centro $4i$.
3. Corona con centro en a.
5. Franja vertical infinita.
7. Semiplano derecho.
9. Región entre las dos ramas de la hipérbola $xy = 1$.
11. Circunferencia $(x - 17/15)^2 + y^2 = (8/15)^2$.

Problemas de la sección 12.4, página 191

1. $14 + 8i, -1 - 2i, 4 - 12i$
3. $(9 - 13i)/500, -i, (-2 - 11i)/1000$
5. $2(x^3 - 3xy^2) - 3x, 2(3x^2y - y^3) - 3y$
7. $|w| > 9$
9. $|\arg w| \leqq 3\pi/4$
11. $\text{Re } (z^2)/|z^2| = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2) = 1$ si $y = 0$ y -1 si $x = 0$. *Respuesta.* No.
13. $6z(z^2 + i)^2$ 15. $2i/(1 - z)^3$ 17. 0 19. $i/2$
21. $-1/27$
23. $-\frac{1}{8}(1 + i)$
25. El cociente en (4) es $\Delta x/\Delta z$, que es 0 si $\Delta x = 0$, pero 1 si $\Delta y = 0$, de modo que no tiene límite cuando $\Delta z \to 0$.
27. Use $\text{Re } f(z) = [f(z) + \overline{f(z)}]/2$, $\text{Im } f(z) = [f(z) - \overline{f(z)}]/2i$.
29. Por continuidad, para cualquier $\Delta > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(z) - f(a)| < \Delta$ cuando $|z - a| < \Delta$. Así, $|z_n - a| < \delta$ para todo n suficientemente grande, ya que $\lim z_n = a$. Por tanto, $|f(z_n) - f(a)| < \Delta$ para estos n.

Problemas de la sección 12.5, página 197

1. Sí 3. Sí 5. Para $z \neq 1$ 7. Sí 9. No

11. No 13. $f(z) = -iz^2/2$ 15. $f(z) = 1/z$

17. $f(z) = z^3$ **19.** No **21.** No

23. $b = 1$, $v = -\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$

29. $f'(z) = u_x = iv_x = 0$, $u_x = v_x = 0$, por tanto, $v_y = u_y = 0$ luego (1), $u = const$, $v = const$, $f = u + iv = const$.

Problemas de la sección 12.6, página 201

3. $1.469 + 2.287i$, 2.718 **5.** $3.610 - 1.972i$, 4.113

7. -23.141, 23.141 **9.** $-i$, 1

11. $\exp(x^3 - 3xy^2)\cos(3x^2y - y^3)$, $\exp(x^3 - 3xy^2)\operatorname{sen}(3x^2y - y^3)$

13. $e^{-2x}\cos 2y$, $-e^{-2x}\operatorname{sen} 2y$ **15.** $e^{\pi i/4}$, $e^{-3\pi i/4}$, $e^{-\pi i/4}$, $e^{3\pi i/4}$

17. $5\exp(i \arctan \frac{4}{3})$ **19.** $x > 0$

21. $y = (2n + 1)\pi/4$, $n = 0, \pm 1, \cdots$

23. $z = \ln 2 + (2n + 1)\pi i$, $n = 0, \pm 1, \cdots$

25. No existen soluciones **27.** $k = 1$

29. $(g/f)' = (g'f - gf')/g^2 = 0$, ya que $g' = g$, $f' = f$; $g/f = k = const$ por el problema 29, sección 12.5. $g(0) = f(0) = e^0 = 1$ se obtiene $k = 1$, $g = f$.

Problemas de la sección 12.7, página 205

3. $-0.303 - 2.112i$ **5.** $11013i$

7. $26.974 - 4.256i$ **9.** $\cosh 3\pi = 6195.8$

11. $-0.5150 + 0.1738i$ **13.** $-3.725 - 0.512i$

15. $1.960 + 3.166i$ **17.** $\frac{1}{2}(2n + 1)\pi - (-1)^n 1.818i$

19. $\pm 2n\pi + i$, $\pm(2n + 1)\pi - i$ **21.** $\pm(\pi/3)i \pm 2n\pi i$, $n = 0, 1, \cdots$

23. Usar el problema 3.

Problemas de la sección 12.8, página 209

5. $\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{4}\pi i = 0.347 + 0.785i$ **7.** $1.609 - 2.214i$

9. $4.605 + 3.142i$ **11.** $2.773 + 3.135i$

13. $\pm 2n\pi i$, $n = 0, 1, \cdots$ **15.** $1.946 + (1 \pm 2n)\pi i$, $n = 0, 1, \cdots$

17. $(-0.644 \pm 2n\pi)i$, $n = 0, 1, \cdots$ **19.** $(\pi - 1 \pm 2n\pi)i$, $n = 0, 1, \cdots$

21. $10.85 - 16.90i$ **23.** $(1 + i)e^2/\sqrt{2}$

25. $1.032 + 0.870i$ **27.** $-54.05 - 7.70i$

29. $(1 + i)/\sqrt{2}$ **31.** $27[\cos(\ln 3) - i\operatorname{sen}(\ln 3)]$

33. $\sqrt{2}\, e^{\pi/4}[\cos(\ln\sqrt{2} - \frac{1}{4}\pi) + i\operatorname{sen}(\ln\sqrt{2} - \frac{1}{4}\pi)]$

35. $\exp[(3 + \pi i)(\ln\sqrt{29} - i\arctan 0.4)] = -276.2 - 436.0i$

37. $3.350 + 1.189i$

41. $\cosh w = \frac{1}{2}(e^w + e^{-w}) = z$, $(e^w)^2 - 2ze^w + 1 = 0$, $e^w = z + \sqrt{z^2 - 1}$

Problemas de la sección 12.9, página 214

1. $v = u - 2x - 2$ **3.** $|w - 1 - i| \leqq \sqrt{2}$ **5.** $2.25 \leqq |w| < 4.41$

7. $|w| > 16$ **9.** $0 \leqq |w| \leqq 1/4$ **11.** $2xy = const$

13. $v^2 = 4k^2(k^2 + u)$ **15.** $|w| = 2$ **17.** $|w| \leqq e$, $w \neq 0$

19. $|w| > \sqrt{e}$, $0 < \arg w < \pi$

Capítulo 12 (cuestionario y problemas de repaso), página 214

21. $-32 - 24i$ **23.** $\frac{9}{13} + \frac{20}{13}i$ **25.** $17 + 1.5i$ **27.** 4

29. 2/5 **31.** 4 **33.** 5 **35.** 1

37. $\pm(1 - i)/\sqrt{2}$ **39.** $\pm(1 - 3i)$ **41.** $6\sqrt{2}\, e^{3\pi i/4}$ **43.** $e^{-0.3218i}$

45. Círculo, radio 1/2, centro $-1 + 3i$ **47.** Semiplano por debajo de $y = x$

49. $-1/z$ **51.** $\cos z$ **53.** No **55.** $3x^2y - y^3$

57. $1 - i$ **59.** $-3.725 - 0.512i$

Problemas de las secciones 13.1–13.2, página 229

1. $z = (1 + 2i)t$, $0 \leqq t \leqq 1$

3. $z = 4 + 2i + (-1 + 3i)t$, $0 \leqq t \leqq 1$

5. $z = -4i + (-1 + 6i)t$, $0 \leqq t \leqq 7$ **7.** Segmento de recta de 0 a $3 + 6i$

9. Semicírculo inferior (radio 2, centro $1 - i$)

11. Parabola $y = 3x^2$ de $(-1, 3)$ a $(2, 12)$

13. Elipse $4x^2 + y^2 = 4$ **15.** $3 - 4i + 4e^{it}$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$

17. $t + i/t$, $1 \leqq t \leqq 3$ **19.** $2\cos t + i\operatorname{sen} t$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$

21. $2b(1 + i)$ **23.** 0 **25.** 0 **27.** $-\pi r^2$

29. $-2\pi i$ **31.** 0 **33.** $-i/3$ **35.** $-1 - i$

37. $1 + i/3$ **39.** $(\pi - \frac{1}{2}\operatorname{senh} 2\pi)i$

41. $32/3 + 64i/3$, $32i$, $8 + 128i/5$ **43.** i, $2i$, $2i$ **49.** $5e^3$

Problemas de la sección 13.3, página 236

5. Sí, por el principio de deformación

7. 0, no **9.** $-\pi$, no **11.** 0, no **13.** 0, sí **15.** 0, no

17. 0, sí **19.** $2\pi i$ **21.** 0 **23.** $2\pi i$ **25.** $-\pi$, π

27. $-2\pi i$, 0, $-4\pi i$ **29.** $-2\pi i$, 0

Problemas de la sección 13.4, página 240

1. $2 + 2i$ **3.** -2 **5.** 0 **7.** $-i/3$ **9.** $-2/\pi$

11. 0 **13.** $-\operatorname{senh} 1$ **15.** $-1566i/35$

Problemas de la sección 13.5, página 244

1. $-\pi/2$ 3. $-\pi i/2$ 5. -2π 7. 0 9. πi
11. 0 13. $\pi/8$ 15. 0 17. 2 19. $-2\pi \tanh 1$
21. $2\pi i \operatorname{Ln} 4 = 8.710i$ 23. $\pi e^{-2+2i} = -0.1769 + 0.3866i$
25. Usar fracciones parciales.

Problemas de la sección 13.6, página 248

1. 0 3. $2\pi^2 i$ 5. 0 7. $-6\pi i$ 9. $2\pi i$ 11. 0
13. $2\pi i$ 15. 0 17. $2\pi^2 i$ 19. $-2\pi i$ 21. $\frac{9}{2}\pi e^{-4} i$

Capítulo 13 (cuestionario y problemas de repaso), página 249

17. $-2\pi i$ 19. $2i$ 21. 0 23. $2\pi i$
25. $-2\pi i$ 27. i sen 1 29. 0 31. 2 sen 1
33. $-\frac{1}{2}\operatorname{sen} \pi^2$ 35. $-\pi/2$ 37. $-5 + 8\pi i$ 39. $2\pi^2 i$

Problemas de la sección 14.1, página 262

1. Sí, no, $\pm 1 + 2i$ 3. Sí, sí, 0 5. No tiene ninguno.
7. Sí, no, ± 1 9. Sí, no, ± 1, $\pm i$ 15. Convergente.
17. Convergente 19. Convergente 21. Divergente.
23. Convergente
25. $\dfrac{(n+2)n}{2(n+1)^2} < \dfrac{1}{2}$, $|R_n| \leqq \dfrac{|w_{n+1}|}{1-q} = \dfrac{n+2}{2^n(n+1)} < 0.05$, $n = 5$, $s \approx 1.657$

Problemas de la sección 14.2, página 268

1. $-4i$, 1 3. 0, $2/\sqrt{\pi}$ 5. $2i$, 5 7. $-i$, ∞
9. $2i/3$, $1/3$ 11. 0, $\sqrt{2}$ 13. 0, ∞ 15. 0, 1
17. 0, $\sqrt{2/3}$ 19. $\Sigma a_n z^{2n} = \Sigma a_n (z^2)^n$, $|z^2| < R$, etc.

Problemas de la sección 14.3, página 274

1. 2 3. $\sqrt{5}$ 5. $\sqrt{7/2}$ 7. 1/6 9. 1/4

Problemas de la sección 14.4, página 280

1. $1 - z + z^2/2! - z^3/3! + - \cdots$, $R = \infty$
3. $\pi z - \pi^3 z^3/3! + \pi^5 z^5/5! - + \cdots$, $R = \infty$
5. $1 - (z - \frac{1}{2}\pi)^2/2! + (z - \frac{1}{2}\pi)^4/4! - + \cdots$, $R = \infty$
7. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(z+1) + \frac{1}{8}(z+1)^2 + \frac{1}{16}(z+1)^3 + \cdots$, $R = 2$
9. $(z-1) - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \frac{1}{3}(z-1)^3 - + \cdots$, $R = 1$

11. $-1 + 5(z+1) - 10(z+1)^2 + 10(z+1)^3 - 5(z+1)^4 + (z+1)^5$
13. $\operatorname{sen}^2 z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2z = z^2 - 2^3 z^4/4! + 2^5 z^6/6! - + \cdots$, $R = \infty$
15. $1 - (z - \frac{1}{2}\pi)^2/2! + (z - \frac{1}{2}\pi)^4/4! - + \cdots$, $R = \infty$
27. $(2/\sqrt{\pi})(z - z^3/3 + z^5/2!5 - z^7/3!7 + \cdots)$, $R = \infty$
29. $z^3/1!3 - z^7/3!7 + z^{11}/5!11 - + \cdots$, $R = \infty$

Problemas de la sección 14.5, página 284

1. $1 - z^4 + z^8 - z^{12} + - \cdots$, $R = 1$
3. $2 + z + 2z^2 + z^3 + 2z^4 + \cdots$, $R = 1$
5. $2z^2 - 2^3 z^6/3! + 2^5 z^{10}/5! - + \cdots$, $R = \infty$
7. $z + z^5/2! + z^9/3! + \cdots$, $R = \infty$
9. $2/(z-2) - 1/(z+4)^2 = -17/16 - (15/32)z - (67/256)z^2 + \cdots$, $R = 2$
11. $(1-i)/2 - [(1-i)^2/4](z-1-i) + [(1-i)^3/8](z-1-i)^2 - + \cdots$, $R = \sqrt{2}$
13. $-i + (z-i) - 7i(z-i)^2 - 9(z-i)^3 + 5i(z-i)^4 + (z-i)^5$
15. $1/3! - (z+1)^2/5! + (z+1)^4/7! - + \cdots$, $R = \infty$
17. $i(z - \frac{1}{2}\pi i) + i(z - \frac{1}{2}\pi i)^3/3! + i(z - \frac{1}{2}\pi i)^5/5! + \cdots$, $R = \infty$
19. $z^2 + z^4 + z^6/3 + \cdots$, $R = \infty$
21. $1 + 2(z - \frac{1}{4}\pi) + 2(z - \frac{1}{4}\pi)^2 + \frac{8}{3}(z - \frac{1}{4}\pi)^3 + \cdots$, $R = \frac{1}{4}\pi$
23. $1 - z^2/18 - z^3/27 + \cdots$, $R = 3$

Problemas de la sección 14.6, página 293

1. Usar el teorema 1. 3. $R = 1/\sqrt{\pi} > 0.56$
5. $|\operatorname{sen} n|z|| \leqq 1$; $\Sigma 1/n^2$ converge 7. $|z^n| \leqq 1$; $\Sigma n/(n^3 + |z|) \leqq \Sigma 1/n^2$
9. $|\tanh^n x| \leqq 1$, $1/n(n+1) < 1/n^2$ 11. $|z + 2i| \leqq \sqrt{3} - \delta$, $\delta > 0$
13. $|z| \leqq 4 - \delta$, $\delta > 0$ 15. En ninguna parte
17. La convergencia se concluye a partir de la prueba de comparación (sección 14.1). Sean $R_n(z)$ y R_n^* los residuos de (1) y (5), respectivamente. Como (5) converge, para $\epsilon > 0$ dado es posible encontrar un $N(\epsilon)$ tal que $R_n^* < \epsilon$ para todo $n > N(\epsilon)$. Como $|f_n(z)| \leqq M_n$ para todo z en la región G, también se tiene $|R_n(z)|$ $R_n^* < \epsilon$ y por consiguiente $|R_n(z)| < \epsilon$ para todo $n > N(\epsilon)$ y todo z en la región G. Esto demuestra que la convergencia de (1) en G es uniforme.
19. No, ¿por qué? 21. $n = 7, 10, 16, 27, 65$

Problemas de la sección 14.7, página 301

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-2}}{n!} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \cdots$, $R = \infty$
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} z^{2n-1} = \frac{1}{z} + 2z + \frac{2}{3}z^3 + \cdots$, $R = \infty$
5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n-1} = \frac{1}{z} - z + z^3 - z^5 + - \cdots$, $R = 1$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{1-2n} = z - \frac{1}{2z} + \frac{1}{24z^3} - + \cdots, \quad R = \infty$

9. $\sum^{\infty} (-1)^{n+1} n z^{n-7} = \frac{1}{z^6} - \frac{2}{z^5} + \frac{3}{z^4} - \frac{4}{z^3} + - \cdots, \quad R = 1$

11. $-\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^{n+1} (z-i)^{n-1} = -\frac{i/2}{z-i} + \frac{1}{4} + \frac{i}{8}(z-i) + \cdots, \quad R = 2$

13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} (z-\pi)^{2n-3} = -\frac{1}{(z-\pi)^3} + \frac{1}{2!(z-\pi)} - \frac{1}{4!}(z-\pi) + - \cdots,$

$R = \infty$

15. $(z-1) + 2 - 3/(z-1)$

17. $-\sum_{n=0}^{\infty} (z+i)^{n-1} = -(z+i)^{-1} - 1 - (z+i) - \cdots, \quad R = 1$

19. $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$

21. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} (z-1)^{n-1}$

23. $\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$

25. $\sum_{n=0}^{\infty} z^{3n}, \quad |z| < 1; \quad -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{3n+3}}, \quad |z| > 1$

27. $\sum_{n=0}^{\infty} z^{4n+2}, \quad |z| < 1, \quad -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{4n+2}}, \quad |z| > 1$

29. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n, \quad 0 < |z-1| < 1; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}}, \quad |z-1| > 1$

31. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(z+\frac{1}{2}\pi)^{2n-1}}{(2n)!}, \quad |z + \frac{1}{2}\pi| > 0$

33. $(1-4z) \sum_{n=0}^{\infty} z^{4n}, \quad |z| < 1, \quad \left(\frac{4}{z^3} - \frac{1}{z^4}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{4n}}, \quad |z| > 1$

35. Sean $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ y $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ las dos series de Laurent de la misma función $f(z)$ en la misma corona. Ambas series se multiplican por $(z-z_0)^{-k-1}$ y se integra a lo largo de un círculo con centro en z_0 en el interior de la corona. Como la serie converge uniformemente, es posible integrar término a término. Así se obtiene $2\ ia_k = 2\ ic_k$. Por tanto, $a_k = c_k$ para todo $k = 0, \pm 1, \ldots$

Problemas de la sección 14.8, página 307

1. $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots$ (polos simples), ∞ (singularidad esencial)
3. 0, ∞ (polo simple)
5. $\pm 1, \pm i$ (polos de tercer orden), ∞ (singularidades esenciales)
7. $-i, 2i$ (polos de segundo orden), ∞ (singularidades esenciales)
9. 0 (polo simple), ∞ (singularidades esenciales)
11. 0 (singularidades esenciales) $\pm 2/\pi, \pm 2/3\pi, \cdots$ (polo simple),

13. ∞ (singularidades esenciales)
15. 1, ∞ (singularidades esenciales), $\pm 2n\pi i$ ($n = 0, 1, \cdots$, polo simple)
17. $\pm 2, \pm 2i$ (segundo orden)
19. 0 (tercer orden), $\pm 1, \pm 1$ ... (segundo orden).
21. $(2n+1)/2$ (tercer orden). 23. $\pm 1/3$ (simple).
25. $0, \pm 2\ , \pm 2\ , \ldots$ (cuarto orden), por (6), sección 12.7.
27. $f(z) = (z-z_0)^n g(x)$ por (3), y $g(z_0) = 0$. Por tanto, $1/g(z_0)$ es analítica en $z = z_0$. Sea su serie de Taylor

$$\frac{1}{g(z)} = c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots. \text{ Entonces } \frac{1}{f(z)} = \frac{c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots}{(z-z_0)^n},$$

que demuestra la primera proposición. La multiplicación de $h(z)$ no cambia lo anterior.
29. Aplicar el teorema 3 a $f(z) - k$.
31. Región entre los meridianos 0° y 90°.
33. Pequeño disco esférico centrado en el polo norte.
35. Cinturón entre dos paralelos, que incluye al ecuador.

Capítulo 14 (cuestionario y problemas de repaso), página 308

21. ∞, $\operatorname{sen}(z-2)$ 23. $1/2$, $\operatorname{Ln}(1+2z)$ 25. $1/3$
27. ∞, e^{-z^2} 29. ∞, $\cosh\sqrt{z}$
31. $1 - 2z + (2z)^2/2! - (2z)^3/3! + - \cdots, \quad R = \infty$
33. $1/2 + (z+1)/4 + (z+1)^2/8 + (z+1)^3/16 + \cdots, \quad R = 2$
35. $k - k^2(z - 2 - 3i) + k^3(z - 2 - 3i)^2 - + \cdots, k = (2-3i)/13, R = \sqrt{13}$
37. $1 + 3z + 6z^2 + 10z^3 + \cdots, \quad R = 1$
39. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} \left(z - \frac{\pi}{2}\right)^{2n-2}, \quad \left|z - \frac{\pi}{2}\right| > 0,$ polo de segundo orden
41. $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-4}, \quad 0 < |z| < 1,$ polo de cuarto orden
43. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)! z^{2n-3}}, \quad |z| > 0,$ singularidad esencial
45. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z-1)^{n-3}, \quad 0 < |z-1| < 1,$ pole of second order
47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!n} z^{n-2}, \quad |z| > 0,$ polo simple
49. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^i}{n!} (z-i)^{n-5}, \quad |z-i| > 0,$ polo de quinto orden

Problemas de la sección 15.1, página 316

1. -3 (en $z = 1$) 3. $-1/3!$ (en $z = 0$)
5. $i/3$ (en $-i$), $-16i/3$ (en $2i$) 7. 1 (en $z = \pm n\pi$)
9. $\pm\frac{1}{2}$ (en ± 1) por (5) 11. 1 (en $z = 0$)

13. $-9/16$, $9/16$, $-9i/16$, $9i/16$ (polos de segundo orden en $z = 1, -1, i, -i$)
15. $3/17$ (en $z = -1$) 17. 0 19. $2\pi i$
21. $-6\pi i$ 23. $(1 - \pi^3/128)\pi i$

Problemas de la sección 15.2, página 319

1. $-2\pi i$ 3. $-6\pi i$ 5. 0 7. $10\pi i$ 9. $4\pi i/5$
11. $2\pi i(\cosh 1 - 1) = 3.412i$ 13. $2\pi i$ 15. $\pi/3$
17. πi 19. $8\pi i$ 21. $\pi i \operatorname{sen} \frac{1}{2} = 1.506i$ 23. $-4i$
25. $-4i$ 27. 0 29. $-4i \operatorname{senh} \frac{1}{2} = -2.084i$

Problemas de la sección 15.3, página 324

1. $4\pi/\sqrt{3}$ 3. $2\pi/35$ 5. $8\pi/3$ 7. $\pi/30$ 9. 0
11. π 13. $\pi/\sqrt{2}$ 15. $2\pi/3$ 17. $\pi/2$ 19. $\pi/16$

Problemas de la sección 15.4, página 330

3. 0 5. $(2\pi/\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}/2} \cos \frac{1}{2} = 1.339$ 7. π/e
9. 0 11. $-\pi(\operatorname{sen} 1)/\sqrt{3}e^{\sqrt{3}} = -0.2700$
13. $\pi/10e^2 - 2\pi/30e^3$ 15. π 17. $-\sqrt{3}\pi/6$
19. $-\pi/2$ 21. $\pi/2$ 23. $(3 - e^{-\pi})\pi/2 = 4.645$

Capítulo 15 (cuestionario y problemas de repaso), página 331

11. 0, sí 13. $5\pi/2$, sí 15. $-18\pi i$, sí 17. 0, no
19. $-2\pi i/(n + 1)!$, sí 21. $-i/2$, no 23. $-64\pi i$, sí
25. $\pi i/4$, sí 27. $2\pi/7$ 29. $4\pi/\sqrt{3}$ 31. $\pi/60$
33. $\pi/2$ 35. 0 37. $\pi/3$ 39. $\pi/2$

Problemas de la sección 16.1, página 339

1. $u = 1 - \frac{1}{4}v^2$, $4 - \frac{1}{16}v^2$, $9 - \frac{1}{36}v^2$, $16 - \frac{1}{64}v^2$ 3. $v = 20$
5. El eje v positivo y negativo, respectivamente 7. $|w| < \frac{1}{9}$
9. $|\arg w| < 2\pi/3$ 11. $\pi/2 < \arg w < \pi$ 13. $4e^{it}$, $4ie^{it}$
15. $3 \cos t + i \operatorname{sen} t$, $-3 \operatorname{sen} t + i \cos t$
17. $t + it^{-1}$, $1 - it^2$ 19. $-a/2$ 21. ± 2, $\pm 2i$
23. $0, \pm \pi i/2, \pm \pi i, \cdots$ 25. Por conformidad. 27. Sólo en tamaño.

Problemas de la sección 16.2, página 345

1. $z = 0$ 3. $0, \pm 1, \pm i$ 5. $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ 7. $\pm i$
9. $\pm i$ 11. $w = 4/z$, $w = (z + 4)/(z + 1)$, etc. 13. $w = az/d$
15. $w = (az + b)/(a - bz)$ 17. $z = (2iw - 4i)/(-w + 3)$

Problemas de la sección 16.3, página 350

1. $w = 3z + 2$ 3. $w = (z + 1)/(-3z + 1)$
5. $w = 1/z$ 7. $w = (3iz + 1)/z$
9. $w = iz$ 13. $z = (-4w + 1)/(2w - 1)$
15. $w = (2z - i)/(-iz - 2)$ 19. $w = (z^4 - i)/(-iz^4 + 1)$

Problemas de la sección 16.4, página 355

1. $1 \leqq |w| \leqq e$, $0 \leqq \arg w \leqq \frac{1}{2}\pi$ 3. $e < |w| < e^2$, $-\frac{1}{2}\pi < \arg$
5. Interior de la elipse $u^2/(\cos^2 2) + v^2/(\operatorname{senh}^2 2) = 1$ en el primer cuadrante.
7. Corona elíptica acotada por $u^2/\cosh^2 1 + v^2/\operatorname{senh}^2 1 = 1$ y $u^2/\cosh^2 2 + v^2/\operatorname{senh}^2 2 = 1$ y corte a lo largo del eje imaginario positivo.
9. $t = z^2$ mapea la región dada sobre la franja $0 < \operatorname{Im} t < \pi$, y $w = e^t$ mapea esta franja sobre el semiplano superior. *Respuesta.* $w = e^{z^2}$.
11. $w' = \cos z = 0$ en $z = \pm(2n + 1)\pi/2$, $n = 0, 1, \cdots$
13. 15. Semiplano superior $v > 0$.
17. Semiplano inferior $v < 0$. 19. $\ln 2 \leqq u \leqq \ln 3$, $\pi/4 \leqq v \leqq \pi/2$.

Problemas de la sección 16.5, página 360

1. w se desplaza una vez alrededor de la circunferencia unitaria $w = 1$.
5. $|z| = 1$; $\ln z = \ln |z| + i\theta = i\theta$ se mueve 2π cada vez hacia arriba del eje v.
7. ± 1 (primer orden), dos hojas. 9. 0, 2 hojas.
11. a, 3 hojas. 13. $0, \pm 1$, 2 hojas.
15. -1, una infinidad de hojas. 17. $-\frac{1}{2}i$, 3 hojas.
19. 0, 2 hojas.

Capítulo 16 (cuestionario y problemas de repaso), página 360

11. $u = \frac{1}{4}v^2 - 1$, $\frac{1}{4}v^2 - 1$ 13. $|w| = 6.25$, $|\arg w| < \pi/4$
15. $v = 4u/3$ 17. $\pi/4 < \arg w \leqq \pi/2$
19. El dominio entre las parábolas $u = \frac{1}{4} - v^2$ y $u = 1 - \frac{1}{4}v^2$
21. $|\arg w| < \pi/8$ 23. $u = 1$ 25. $|w + \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ 27. $0, \pm i$
29. $\pm i/\sqrt{3}$ 31. $(\pm n + \frac{1}{4})\pi$ 33. iz 35. $z/(z + 2)$
37. $5z$ 39. $2z/(z - 1)$ 41. $w = iz^3 + 1$ 43. $w = iz$
45. $w = e^{3z}$ 47. $w = z^2/2k$ 49. $2 \pm \sqrt{6}$

Problemas de la sección 17.1, página 368

1. $\Phi = 20x + 200$ 3. $\Phi = 20(1 - y/d)$
5. $\Phi = 110 - 50xy$ 7. $(110 \ln r)/\ln 2$
9. $200 - (100 \ln r)/\ln 2$ 11. $y = x/2 + c$
13. $x^2 - y^2 = const$ 15. $(x - 1/2c)^2 + y^2 = 1/4c^2$
17. $u = c \operatorname{Re} [\operatorname{Ln} (z - a) + \operatorname{Ln} (z + a)] = c \ln |z^2 - a^2|$

Problemas de la sección 17.2, página 372

3. $\Phi(x, y) = U_z xy$. $w = u + iv = iz^2$ mapea R sobre $-2 \leqq u \leqq 0$.
5. Aplicar $w = z^2$.
7. Rayos correspondientes en el plano w forman ángulos iguales, y el mapeo es conforme.
9. $z = (2Z - i)/(-iZ - 2)$.

Problemas de la sección 17.3, página 376

1. $(100/d)y$. Rotar a través de $\pi/2$.
3. $100 - 240\theta/\pi$
5. $\operatorname{Re} F(z) = 100 + (200/\pi) \operatorname{Re}(\operatorname{sen}^{-1} z)$
7. $T_1 + \pi^{-1}(T_2 - T_1) \operatorname{Arg}(w - a)$
9. $T_0[\operatorname{Arg}(w - 1) - \operatorname{Arg}(w + 1)]/\pi$
15. $120\pi^{-1} \operatorname{Arg} z$
17. $T_0 + 2\pi^{-1}(T_1 - T_0) \operatorname{Arg} z$
19. $400(\operatorname{Arg} z)/\pi$

Problemas de la sección 17.4, página 383

1. $V = V_1 = K$, $Ky = const$, $Kx = const$
3. $F^*(w) = w$ por Problema 1; $w f(z) = z^2$ mapea ese cuadrante sobre el semiplano; $F(z) = F^*(f(z)) = z^2$.
5. Flujo paralelo en la dirección y negativa, $V = -i$.
7. Flujo paralelo en la dirección de $y = -x$, $V = 1 - i$.
9. $V = 3(x^2 - y^2) - 6xyi$, $V_2 = 0$ sobre los ejes de coordenadas.
13. $F(z) = [\ln(z + a)]/2\pi$
17. Las líneas de corriente son circunferencias $y/(x^2 + y^2)/ = c$ o $x^2 + (y - k)^2 = k^2$.
19. Usar el hecho de que $w = \cos^{-1} z$ es el mapeo $w = \cos z$ con los roles de los planos z y w intercambiados.

Problemas de la sección 17.5, página 388

3. $\Phi = r \sin \theta$
5. $\Phi = 2 - r\cos\theta$
7. $\Phi = \frac{1}{2}r^5 \operatorname{sen} 5\theta$
9. $\Phi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}r^2 \cos 2\theta$
11. $\Phi = 2(r \operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}r^2 \operatorname{sen} 2\theta + \frac{1}{3}r^3 \operatorname{sen} 3\theta - + \cdots)$
13. $\Phi = (4/\pi)(r \operatorname{sen}\theta - \frac{1}{9}r^3 \operatorname{sen} 3\theta + \frac{1}{25}r^5 \operatorname{sen} 5\theta - + \cdots)$

Problemas de la sección 17.6, página 393

1. Use (2); $F(1) = 9$.
3. $|z|$ no es analítica
5. Use que $|e^z| = e^x$ es monótona
7. 2, en $z = \pm i$
11. Aplicar el teorema 3.
13. Use $x = 1 + \cos\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta$.
15. Hacer $r = 0$ en esa fórmula.

Capítulo 17 (cuestionario y problemas de repaso), página 394

11. $\Phi = (100 \ln r)/\ln 5 = 62.13 \ln r$
13. $\Phi = (10/\ln 10)(\ln 100 - \ln r) = 20.00 - 4.34 \ln r$
15. $\Phi = 110[1 - (2/\pi) \operatorname{Arg} z]$
17. $\Phi = -(400i/\pi) \operatorname{Ln} z$

19. $\Phi = 100 + 80(y - \frac{1}{2}x)$
21. $x + y = const$
23. $2x(y + 1) = const$
25. $|z - 1 - i| = const$
27. $10 + (40/\pi)(r \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{3}r^3 \operatorname{sen} 3\theta + \frac{1}{5}r^5 \operatorname{sen} 5\theta + \cdots)$
29. $10\pi^2 - 120(r\cos\theta - \frac{1}{4}r^2\cos 2\theta + \frac{1}{9}r^3 \cos 3\theta - + \cdots)$
31. Flujo en la dirección y, $V = ik$
33. $(r - 4/r)\operatorname{sen}\theta = const$, $V = 1 - 4/\bar{z}^2$

Problemas de la sección 18.1, página 406

1. 0.9817E02, −0.1010E03, 0.4787E−02, −0.1380E05
3. $(1100100)_2$, $(11101.01)_2$, $(11.11)_2$
5. 28.5, 0.15625, 1.71875, −3.40625
7. 5.6945, 5.697, 5.70, 5.7
9. 19.95, 0.05, 0.05013; 20, 0, 0.05
15. $18.78685 \leqq d \leqq 18.79695$
17. Sumar primero, luego redondear.
21. $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{\bar{a}_1 + \epsilon_1}{\bar{a}_2 + \epsilon_2} = \dfrac{\bar{a}_1 + \epsilon_1}{\bar{a}_2}\left(1 - \dfrac{\epsilon_2}{\bar{a}_2} + \dfrac{\epsilon_2^2}{\bar{a}_2^2} - + \cdots\right) \approx \dfrac{\bar{a}_1}{\bar{a}_2} + \dfrac{\epsilon_1}{\bar{a}_2} - \dfrac{\epsilon_2}{\bar{a}_2}\cdot\dfrac{\bar{a}_1}{\bar{a}_2}$,
$\left|\left(\dfrac{a_1}{a_2} - \dfrac{\bar{a}_1}{\bar{a}_2}\right) \Big/ \dfrac{a_1}{a_2}\right| \approx \left|\dfrac{\epsilon_1}{a_1} - \dfrac{\epsilon_2}{a_2}\right| \leqq |\epsilon_{r1}| + |\epsilon_{r2}| \leqq \beta_{r1} + \beta_{r2}$

Problemas de la sección 18.2, página 417

3. −0.12, −0.119 792 64, −0.119 794 07
7. $x_5 = 0.736\ 058$, $x_{10} = 0.739\ 126$
9. Esto se concluye por el teorema del valor medio de cálculo.
11. 1.834 243 ($= x_4$)
13. 1.150 000 ($= x_5$)
15. 0.904 557 ($= x_3$)
17. 0.652 919 ($= x_3$)
19. $x_{n+1} = (2x_n + 7/x_n^2)/3$, 1.912 931 ($= x_3$)
21. 1.834 243
23. 0.904 557
25. **ALGORITMO BISECAR** (f, a_0, b_0, N) **Método de bisección**

Este algoritmo calcula un intervalo $[a_n, b_n]$ que contiene la solución de $f(x) = 0$ (f continua), o calcula una solución c_n, dado un intervalo inicial $[a_0, b_0]$ tal que $f(a_0)f(b_0) < 0$.

ENTRADA: Intervalo inicial a_0, b_0, número máximo de iteraciones N.
SALIDA: Intervalo a_N, b_N que contiene una solución, o una solución c_n.
Para $n = 0, 1, \ldots, N - 1$, efectuar:
  Calcular $c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$.
  Si $f(c_n) = 0$, entonces dar como SALIDA c_n. Alto. *Procedimiento completado*
  En caso contrario, continuar.
  Si $f(a_n)f(c_n) < 0$, entonces $a_{n+1} = a_n$ y $b_{n+1} = c_n$.
  En caso contrario, hacer $a_{n+1} = c_n$ y $b_{n+1} = b_n$.
Fin
SALIDA a_N, b_N. Alto.
Procedimiento completado.
Fin de BISECAR

27. [0.40625, 0.43750]
29. [1.90625, 1.93750]
31. 2.689
33. ±1.189

Problemas de la sección 18.3, página 431

1. $L_0(x) = -2x + 19$, $L_1(x) = 2x - 18$, $p_1(x) = 0.1082x + 1.2234$, $p_1(9.4) = 2.2405$
3. $p_2(x) = x^2 - 2.580x + 2.580$, $\Gamma(1.01) = 0.9943$, $\Gamma(1.03) = 0.9835$ (exacto hasta 4D)
5. $p_2(x) = -0.1434x^2 + 1.0895x$, $p_2(0.5) = 0.5089$, $p_2(1.5) = 1.3116$
7. $p_2(x) = -0.44304x^2 + 1.30896x - 0.02322$, $p_2(0.75) = 0.70929$
9. $p_2(x) = 1.0000 - 0.0112r + 0.0008r(r - 1)/2 = x^2 - 2.580x + 2.580$, $r = (x - 1)/0.02$; 0.9943, 0.9835, 0.9735
11. $p_2(x) = 0.27633 + 0.97678(x - 0.25) - 0.44304(x - 0.25)(x - 0.5) = -0.44304x^2 + 1.30896x - 0.02322$
13. $p_2(x) = 0.9461x - 0.2868x(x - 1)/2 = -0.1434x^2 + 1.0895x$
15. 0.722, 0.786
17. $\delta f_{1/2} = 0.057\ 839$, $\delta f_{3/2} = 0.069\ 704$, etc.
21. 3.455606, exacto hasta 5D
23. 0.386 4185, exacto hasta 7D

Problemas de la sección 18.4, página 439

9. $-x + x^3$, $2(x - 1) + 3(x - 1)^2 - (x - 1)^3$
11. $1 - (x - 1)^2 + 2(x - 1)^3$, $46 + 48(x - 4) + 17(x - 4)^2 - 5(x - 4)^3$
13. $1 - x^2$, $-2(x - 1) - (x - 1)^2 + 2(x - 1)^3$, $-1 + 2(x - 2) + 5(x - 2)^2 - 6(x - 2)^3$
15. $-\frac{3}{4}(x + 2)^2 + \frac{3}{4}(x + 2)^3$, $\frac{3}{4}(x + 1) + \frac{3}{2}(x + 1)^2 - \frac{5}{4}(x + 1)^3$, $1 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{5}{4}x^3$, $-\frac{3}{4}(x - 1) + \frac{3}{2}(x - 1)^2 - \frac{3}{4}(x - 1)^3$
17. $1 - 5x^2/4 + x^4/4$
19. La curvatura es $f''(x)/(1 + f'(x)^2)^{3/2}$, que es igual a $f''(x)$ aproximadamente, si $|f'(x)|$ es pequeño.

Problemas de la sección 18.5, página 450

3. 0.5, 0.375, 0.34375
5. 0.782 794 (exacto 0.785 398)
7. 0.785 392 (exacto 0.785 398)
9. 1.107 147 (exacto 1.107 149)
11. 0.693 254 (exacto 0.94608)
13. 0.693 771 (exacto 0.693 147)
15. $M_2 = 1/2$, $M_2^* = -2$, $-0.002\ 604 \leqq \epsilon \leqq 0.010\ 417$, $0.780\ 190 \leqq A(1) \leqq 0.793\ 211$
17. $(1/x)^{iv} = 24/x^5$, $M_4 = 24$, $M_4^* = 0.75$, $-0.000\ 521 \leqq \epsilon \leqq -0.000\ 017$
19. 0.94508, 0.94583 (exacto 0.94608)
21. 0.4612 (exacto 0.4615)
23. 0.91936 (exacto 0.91973)
25. $h|\frac{1}{2}\epsilon_0 + \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_{n-1} + \frac{1}{2}\epsilon_n| \leqq [(b - a)/n]nu = (b - a)u$
27. 0.08, 0.32, 0.176, 0.256 (exacto)
29. 0.52, 0.080, 0.304, 0.256

Capítulo 18 (cuestionario y problemas de repaso), página 451

21. −0.53678E00, 0.11867E04, −0.60400E−02, 0.23948E02, 0.33333E00, 0.12143E02
23. $(7.625)_{10}$, $(34.5)_{10}$, $(3.6875)_{10}$
25. 49.980, 0.020; 49.980, 0.020008
27. $17.5565 \leqq s \leqq 17.5675$
29. El mismo que para $\tilde{a}$

31. −0.2, −0.200 32, −0.200 323
33. $x = (8 + 6x^2 - 3x^4)^{1/6}$, $x_5 = 1.403\ 007$, $x_{10} = 1.414\ 557$, exacto $\sqrt{2}$
35. 3.584 631
37. 0.567 143
39. 0.334 [exacto 0.305 (3D)]
41. 2.95647, 2.96087
43. 2.96111
45. $1 - x^3$, $-3(x - 1) - 3(x - 1)^2 + 3(x - 1)^3$
47. 0.245, $\epsilon = 0.005$
49. 0.9027 (0.9045 exacto hasta 4D)

Problemas de la sección 19.1, página 465

1. $x_1 = 2$, $x_2 = 1$
3. $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -2$
5. $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$
7. $x_1 = -1$, $x_2 = 8$, $x_3 = -5$
9. $x_1 = 3.0$, $x_2 = 4.8$, $x_3 = 0$
11. $x_1 = -2.5$, $x_2 = 7.0$, $x_3 = 0.25$
13. $x_1 = 0$, x_2 arbitrario, $x_3 = 5x_2 + 10$
15. $x_1 = 0.4$, $x_2 = -0.01$, $x_3 = 1.1$
17. $(1 - 1/\epsilon)x_2 = 2 - 1/\epsilon$ finalmente se vuelve $x_2/\epsilon \approx 1/\epsilon$, $x_2 \approx 1$, $x_1 = (1 - x_2)/\epsilon \approx 0$.
19. $x_1 = x_2 = x_3 = 1$; no existe solución

Problemas de la sección 19.2, página 471

1. $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$
3. $x_1 = -2$, $x_2 = 1.5$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$
5. $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -3$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
7. $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.8$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
9. $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{4}{3}$, $x_3 = 2$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$
11. L y U como en el problema 5 (¿por qué?)
13. $x_1 = 6$, $x_2 = 12$, $x_3 = 4$, $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
15. $x_1 = 8$, $x_2 = 0$, $x_3 = -4$, $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}$ **19.** $\begin{bmatrix} -0.8 & -2.0 \\ -2.8 & -2.0 \end{bmatrix}$ **21.** $\begin{bmatrix} 6 & 12 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \\ 9 & 12 & 6 \end{bmatrix}$

Problemas de la sección 19.3, página 477

1. Exacto 2, 2, 2 **3.** Exacto 15, 5, 12 **5.** Exacto 0.5, 0.5, 0.5
7. Exacto 2, 0, 3, 1
9. (a) $x^{(3)T} = [0.49982 \quad 0.50001 \quad 0.50002]$, (b) $x^{(3)T} = [0.50333 \quad 0.49985 \quad 0.49968]$

13. $X^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.49 & -0.1 & 0.51 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ -0.51 & 0.3 & -1.47 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.1 & 0.5 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ -0.5 & 0.3 & -1.5 \end{bmatrix}$

15. $\sqrt{19}$, 6, 4 **17.** $\sqrt{2}$, 1, 1 **19.** $\sqrt{690}$, 32, 29

Problemas de la sección 19.4, página 485

1. 8, $\sqrt{26}$, 4 **3.** 18, $\sqrt{76}$, 5 **5.** 7, 5, 4 **7.** 4, 2, 1
9. 6, 4.2 **11.** 17, 289 **13.** 100, 10^4
15. $\|Ax\| = 26 < 8 \cdot 15$ **17.** 289 **19.** 289, 289
21. $x_1 = 9,\ x_2 = -36,\ x_3 = 30;\ \kappa(A) = \frac{11}{6} \cdot 408 = 748$
23. By (12), $1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \leqq \|A\|\,\|A^{-1}\| = \kappa(A)$. Por la norma de Frobenius, $\sqrt{n} = \|I\| \leqq \kappa(A)$.
25. $\|x\|_\infty = |x_1| \leqq \Sigma\,|x_j| = \|x\|_1 \leqq n|x_1| = n\|x\|_\infty$, en donde x_1 es el mayor en valor absoluto.

Problemas de la sección 19.5, página 489

1. $y = -11.4 + 5.4x$ **3.** $y = 8.96 - 0.194x$
5. $y = 3.573 - 0.065x$ **7.** $y = -5.05 + 12.1x$
9. $U = -2.1 + 26.3I,\ R = 26.3$ **11.** $y = 0.5 + 1.5x^2$
13. $y = -1.5 + 1.5x^2$ **15.** $y = 6642 + 762.3x - 156.1x^2$
19. $C = [c_{jk}],\ c_{jk} = x_j^{k-1},\ b^T = [b_0 \cdots b_m]$

Problemas de la sección 19.7, página 498

1. 1, 4, 1, radios 5, 8, 9 **3.** 5, 0, 7, radios 4, 6, 6
5. 5, 8, 9, radios 0.02 **9.** $t_{11} = 100,\ t_{22} = t_{33} = 1$
11. $\sqrt{122}$ **13.** $\sqrt{170.0006}$ **15.** $6 \leqq \lambda \leqq 8$; 7 (un eigenvalor)

Problemas de la sección 19.8, página 501

1. $q = 10,\ 11.655,\ 11.656\,853;\ |\epsilon| \leqq 4,\ 0.138,\ 0.004\,061$
3. $q = 0.8,\ 0.8, \cdots;\ |\epsilon| \leqq 0.6,\ 0.6, \cdots$
5. $q = 6.333,\ 6.871,\ 6.976;\ |\epsilon| \leqq 2.5,\ 1.2,\ 0.49$
7. $11.656\,854\ (6 \pm \sqrt{32})$; errors 1.66, 0.0019, 10^{-6}
9. $q = 4.917,\ |\epsilon| \leqq 0.399$ **11.** $q = 3,\ 5.774;\ |\epsilon| \leqq 2.55,\ 1.337$
13. $q = 5/4,\ 14/9;\ |\epsilon| \leqq \sqrt{11}/4,\ \sqrt{101}/9$
15. (a) 12, 2, −2; (b) La razón 12/2 es grande.
17. $y = Ax = \lambda x,\ m_1 - \lambda x^T x = \lambda m_0,\ q = m_1/m_0 = \lambda,$ $m_2 = \lambda^2 m_0,\ m_2/m_0 - q^2 = 0$
19. $-4.770 + 4.900 = 0.130$ (exacto 0)

Problemas de la sección 19.9, página 505

3. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.75 & 0 & -3 \\ -0.25 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 1, 0, −1

5. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1.6 & 1.2 \\ -3 & 5.2 & 1.4 \end{bmatrix}$ −1, −1, 4

7. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -82 & 17 & 48 \\ 79 & -24 & -31 \end{bmatrix}$ $4, -7 \pm 24i$

9. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 14/3 & 8/3 & -6 \end{bmatrix}$ 8, −2, −6

11. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 20, −1, −1

13. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2.5 & 1.5 \\ -1 & -1 & 1.5 & 2.5 \end{bmatrix}$ 9, 4, 1, 0

15. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4 & -0.4 & 0.85 & 0.75 \\ -0.4 & -0.4 & 0.75 & 0.85 \end{bmatrix}$ 8.1, 1.6, 0.1, 0

Problemas de la sección 19.10, página 516

1. $\begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{13} & 0 \\ -\sqrt{13} & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} -1 & -3.605\,551\,28 & 0 \\ -3.605\,551\,28 & 5.461\,538\,46 & 3.692\,307\,69 \\ 0 & 3.692\,307\,69 & -4.461\,538\,46 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 3.142\,857\,14 & 5.938\,459\,91 & 0 \\ 5.938\,459\,91 & 0.190\,476\,19 & -2.494\,438\,26 \\ 0 & -2.494\,438\,26 & -3.333\,333\,33 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 10.426\,483\,98 & -4.072\,844\,87 & 0 \\ -4.072\,844\,87 & 4.223\,244\,41 & -1.093\,611\,69 \\ 0 & -1.093\,611\,69 & -1.265\,113\,01 \end{bmatrix}$

Capítulo 19 (cuestionario y problemas de repaso), página 517

21. $[6 \quad -3 \quad 1]^T$ **23.** $[4 \quad -1 \quad 2]^T$ **25.** $[2.2 \quad 3.0 \quad -0.9]^T$

27. Todos los elementos de las matrices triangulares son 1.

31. $\begin{bmatrix} -7 & 2 & 3 \\ -13 & -2 & 7 \\ 8 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ **33.** $\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & -1 \\ -1.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -1.5 & -2 \end{bmatrix}$ **35.** Exacto −2, 1, 2

37. 15, $\sqrt{89}$, 8 **39.** 7, $\sqrt{21}$, 4 **41.** 22, $\sqrt{142}$, 8

43. 104 **45.** 15 **47.** $5.6 \cdot 3.5 = 19.6$

49. $1.98 + 0.98x$ **51.** Centros 11.4, 14.4, 14.6; radios 2.6, 3.2, 1.8

53. Centros 10, 4, 3; radios 0.2, 0.3, 0.3

55. $q_1 = 23/3$, $|\epsilon_1| \leqq 0.95$; $q_2 = 7.88$, $|\epsilon_2| \leqq 0.82$; $q_3 = 8.04$, $|\epsilon_3| \leqq 0.69$; $q_4 = 8.15$, $|\epsilon_4| \leqq 0.57$

Problemas de la sección 20.1, página 533

1. $y = e^x$; 0.051 521, 0.145 975 (errores de x_5, x_{10})

3. $y = 1/(x^5 + 1)$; −0.012 735, −0.021 255 (errores de x_5, x_{10})

5. $y = e^x$; 0.001 275, 0.004 201 (errores de x_5, x_{10})

7. Ver el ejemplo 4, Sec. 1.7; 0.001 047, 0.004 935 (errores de x_5, x_{10})

9. $y = e^{x^2/2}$; 0, $7 \cdot 10^{-9}$, $7 \cdot 10^{-8}$, $4 \cdot 10^{-7}$, $2 \cdot 10^{-6}$, $5 \cdot 10^{-6}$

11. $y = xe^x$; errors 0, 0.000 190, 0.000 461, 0.000 846, 0.001 385, 0.002 131

13. Por ejemplo, $x = 0.5$, $y = 0.672$ (error − 0.040), 0.6293 (error 0.0029); $x = 1$, $y = 0.893$ (error − 0.028), 0.8626 (error 0.0021)

15. $y = 0$, 0.1000, 0.2034, 0.3109, 0.4217, 0.5348, 0.6494, 0.7649, 0.8806; error 0, 0.0044, 0.0122, · · · , 0.0527

17. $y = 0$, 04352, 0.9074; error 0.0145, 0.0258 (aproximadamente 50% del correspondiente en el problema 15)

Problemas de la sección 20.2, página 536

1. $y_4 = 1.173\,518$, $y_5 = 1.284\,044$, $y_6 = 1.433\,364$, $y_7 = 1.632\,374$, $y_8 = 1.896\,572$, $y_9 = 2.248\,046$, $y_{10} = 2.718\,486$

3. $y_4 = 0.422\,798$, $y_5 = 0.546\,315$, $y_6 = 0.684\,161$, $y_7 = 0.842\,332$, $y_8 = 1.029\,714$, $y_9 = 1.260\,288$, $y_{10} = 1.555\,763$

5. $y_4 = 4.229\,690$, $y_5 = 4.556\,859$, $y_6 = 5.360\,657$, $y_7 = 8.082\,563$

11. $y_1 = 1.010\,050$, $y_2 = 1.040\,811$, $y_3 = 1.094\,224$, $y_4 = 1.173\,622$, $y_5 = 1.284\,219$, $y_6 = 1.433\,636$, $y_7 = 1.632\,782$, $y_8 = 1.897\,074$, $y_9 = 2.248\,543$, $y_{10} = 2.718\,780$

Problemas de la sección 20.3, página 544

9. $y \approx 3$, 2.94, 2.7606, 2.4642, 2.055 606, 1.542 042

11. Se obtiene la solución exacta. ¿Puede el lector ver por qué?

13. Se obtiene la solución exacta, excepto por un error de redondeo por ejemplo, $y_1 = 2.761608$, $f(y) = 2.7616$ (exacto), etc. ¿Por qué?

Problemas de la sección 20.4, página 553

3. $u_{xy}(x, y) \approx \frac{1}{2k}[u_x(x, y + k) - u_x(x, y - k)]$. Luego se sustituye

$$u_x(x, y \pm k) \approx \frac{1}{2h}[u(x + h, y \pm k) - u(x - h, y \pm k)].$$

5. 75

7. $u(P_{11}) = u(P_{12}) = 105$, $u(P_{21}) = 155$, $u(P_{22}) = 115$

9. −2, −5, −5, −62

11. $u_{11} = u_{21} = 0.1083$, $u_{12} = u_{22} = 0.3248$; exacto hasta 4D: 0.0937, 0.2999

13. $\sqrt{3}$. $u_{11} = u_{21} = 0.0859$, $u_{12} = u_{22} = 0.3180$. (0.1083, 0.3248 son valores hasta 4D de la solución de las ecuaciones lineales del problema.)

15. Sólo 5 pasos.

Problemas de la sección 20.5, página 559

3. $u_{11} = 1$, $u_{21} = u_{12} = 4$, $u_{22} = 16$

9. $-4u_{11} + u_{21} + u_{12} = -3$, $u_{11} - 4u_{21} + u_{22} = -12$, $u_{11} - 4u_{12} + u_{22} = 0$, $2u_{21} + 2u_{12} - 12u_{22} = -14$, $u_{11} = u_{22} = 2$, $u_{21} = 4$, $u_{12} = 1$

Problemas de la sección 20.6, página 565

1. Cálculos hasta 6D, valores redondeados hasta 3D.

t	$x = 0.2$	Exacto	$x = 0.4$	Exacto
0.04	0.164	0.159	0.255	0.260
0.08	0.107	0.108	0.175	0.175
0.12	0.073	0.073	0.119	0.118
0.16	0.050	0.049	0.081	0.079
0.20	0.034	0.033	0.055	0.054

3. En la respuesta del problema 1 los valores se proporcionan como exactos. La serie converge rápidamente.
5. 0, 0.06625, 0.12500, 0.17125, 0.20000, 0.21000, 0.20000, etc.
7. 0, 0.05352, 0.10156 [0.10182 por (9)], 0.13984, 0.16406 [0.16727 por (9)], 0.17266, etc.
9. Use (5) y $0 = \partial u_{0j}/\partial x = (u_{1j} - u_{-1,j})/2h$.

Problemas de la sección 20.7, página 569

1. Para $x = 0.2, 0.4$ se obtiene 0.012, 0.02 ($t = 0.2$), 0.004, 0.008 ($t = 0.4$), -0.004, -0.008 ($t = 0.6$), etc.
3. $u(x, 1) = 0, -0.05, -0.10, -0.15, -0.20, 0$
5. 0.190, 0.308, 0.308, 0.190 (0.178, 0.288, 0.288, 0.178 exacto hasta 3D)
7. 0, 0.354, 0.766, 1.271, 1.679, 1.834, $\cdots$ ($t = 0.1$); 0, 0.575, 0.935, 1.135, 1.296, 1.357, $\cdots$ ($t = 0.2$)

Capítulo 20 (cuestionario y problemas de repaso), página 569

21. 1, 1, 1.02, 1.0608, etc. Errores 0, 0.01, 0.021, 0.0334, etc.
25. $y = \tan x$
29. $y(0.4) = 1.822\,798$, $y(0.5) = 2.046\,315$, $y(0.6) = 2.284\,155$, $y(0.7) = 2.542\,325$, $y(0.8) = 2.829\,706$, $y(0.9) = 3.160\,277$, $y(1.0) = 3.557\,611$
35. 1.96, 7.86, 29.46
37. $u(P_{11}) = u(P_{31}) = 270$, $u(P_{21}) = u(P_{13}) = u(P_{23}) = u(P_{33}) = 30$, $u(P_{12}) = u(P_{32}) = 90$, $u(P_{22}) = 60$
41. 0.06279, 0.09336, 0.08364, 0.04707
43. 0, -0.352, -0.153, 0.153, 0.352, 0 si $t = 0.12$ y 0, 0.344, 0.166, -0.166, -0.344, 0 if $t = 0.24$

Problemas de la sección 21.1, página 1580

9. $g'(t) = -16x_1^3(x_1 - 4tx_1^3)^3 - 4096x_2^3(x_2 - 64tx_2^3)^3 = 0$. Por $\mathbf{x}_0 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ la solución es $t_1 = 0.017\,909\,5$ (7D), y $\mathbf{z}(t_1) = 0.928\,362\mathbf{i} - 0.146\,202\mathbf{j}$.

Problemas de la sección 21.2, página 584

5. Contradictorio, no hay solución.
11. $f_{max} = f(0, 5) = 10$
13. $f_{min} = f(2, 4/3) = 8$
15. $x_1 = 15$ toneladas de A_1, $x_2 = 10$ toneladas de A_2, ganancia diaria $ 1400.
17. $f_{max} = f(210, 60) = 3750$
19. No

Problemas de la sección 21.3, página 589

1. Se empieza en C (figura 447) y luego se intercambian x_1 y x_4.
3. $f_{max} = f(\frac{120}{11}, \frac{60}{11}) = \frac{480}{11}$

5. $x_3 = 18 - x_1 - 3x_2$, $x_4 = 10 - x_1 - x_2$, $x_5 = 24 - 3x_1 - x_2$; $x_1 \leftrightarrow x_5$; $x_2 \leftrightarrow x_4$; $f_{max} = f(7, 3) = 780$
7. $f_{max} = f(0, 2.5, 2.3) = 7.7$
9. Tomar como básicas a x_5, x_6. Intercambiar $x_3 \leftrightarrow x_6$, luego $x_1 \leftrightarrow x_5$. $f_{max} = f(2.857, 0, 14.286, 0) = 314$.

Problemas de la sección 21.4, página 595

1. $x_1 \leftrightarrow x_5$, then $x_2 \leftrightarrow x_4$ (sin ganancia), luego $x_3 \leftrightarrow x_5$. $f_{max} = f(10, 5) = 5500$.
3. $f_{max} = f(1, 1, 0) = 12$. La solución factible básica $x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 0$, $x_3 = 1$ es degenerada.
5. Intercambiar $x_2 \leftrightarrow x_5$, entonces $x_3 \leftrightarrow x_4$. $f_{max} = f(3, 1) = 7$.
7. Intercambiar $x_2 \leftrightarrow x_6$, entonces $x_3 \leftrightarrow x_5$, entonces $x_1 \leftrightarrow x_4$. $f_{max} = f(100, 150, 200) = 3200$.
9. Maximizar $\tilde{f} = -f$. $x_4 = 1 + x_1 - x_2$, $x_5 = 40 - 5x_1 - 4x_2$, $x_6 = 5 - x_1 - x_2 + x_3$; $x_1 \leftrightarrow x_6$, $x_2 \leftrightarrow x_4$; $-f_{min} = \tilde{f}_{max} = \tilde{f}(2, 3) = -4 + 3 = -1$; $f_{min} = 1$.

Capítulo 21 (cuestionario y problemas de repaso), página 596

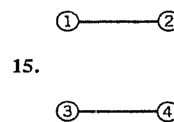
11. $6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $0.9153\mathbf{i} - 0.8136\mathbf{j}$, $0.2219\mathbf{i} + 0.1109\mathbf{j}$, $0.0338\mathbf{i} - 0.0301\mathbf{j}$
23. $f_{min} = f(0.5, 1.5) = 4.5$
25. $f_{min} = f(2, 2) = 16$
27. $f_{max} = f(0, 40, 5) = 280$
29. $f_{max} = f(13, 0, 8) = 188$

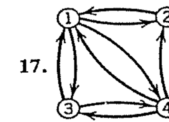
Problemas de la sección 22.1, página 603

7. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

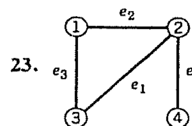
9. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

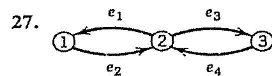
15. 

17. 

21. Vértice
$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

23. 

25. Vértice
$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

27. 

29.

Vértice	Bordes incidentes
1	$-e_1, -e_2, e_3, -e_4$
2	e_1
3	$e_2, -e_3$
4	e_4

Problemas de la sección 22.2, página 610

1. 4 3. 5 5. 4

9. La idea es ir hacia atrás. Existe un v_{k-1} adyacente a v_k etiquetado como $k-1$, etc. Así, el único vértice etiquetado como 0 es s. Por tanto, $\lambda(v_0) = 0$ implica $v_0 = s$, de modo que $v_0 - v_1 - \dots, v_{k-1}$ es una trayectoria $s \to v_k$ de longitud k.

17. No; no existe ninguna forma de recorrer (3, 4) sólo una vez.

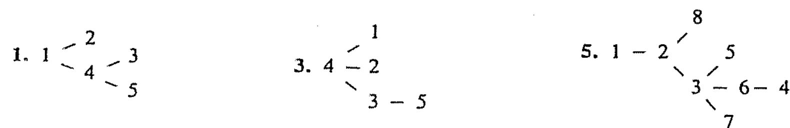
19. Patrulla de policía, equipo de reparación de la carretera, la mejor ruta del agricultor para sembrar sus campos.

25. De m a $100m$, $10m$, $2.5m$, $m + 4.6$.

Problemas de la sección 22.3, página 614

1. (1, 2), (2, 4), (4, 3); $L_2 = 3$, $L_3 = 9$, $L_4 = 7$
3. (1, 2), (1, 4), (2, 3); $L_2 = 2$, $L_3 = 5$, $L_4 = 5$
5. (1, 4), (2, 4), (3, 4), (3, 5); $L_2 = 4$, $L_3 = 3$, $L_4 = 2$, $L_5 = 8$
7. (1, 5), (2, 3), (2, 6), (3, 4), (3, 5); $L_2 = 9$, $L_3 = 7$, $L_4 = 8$, $L_5 = 4$, $L_6 = 14$
11. $L_2 = 2$, $L_3 = 5$

Problemas de la sección 22.4, página 619



7. (a) $L_2 = 4$, $L_3 = 3$; (b) $L = 5$ 9. 1 – 3 – 4 (2; 5 – 6), $L = 38$ 11. Sí

13. G es conexo. Si G no fuese un árbol, sería un ciclo, aunque este ciclo contaría con dos trayectorias entre cualquier par de sus vértices, contradiciendo la unicidad.

19. Si se añade un borde (u, v) a T, entonces como T es conexo, existe una trayectoria $u \to v$ en T que, junto con (u, v), constituye un ciclo.

Problemas de la sección 22.5, página 623

1. (1, 2), (1, 4), (3, 4), (4, 5), $L = 12$ 3. (1, 4), (3, 4), (2, 4), (3, 5), $L = 20$
5. (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 6), (3, 5), $L = 32$
9. Si G es un árbol

11. Un árbol de expansión más corto de la máxima gráfica conexa que contiene al vértice 1.
13. $d(G) = 24$, $r(G) = 12 = \epsilon(3)$, centro {3}
17. Se elige un vértice u y se encuentra el v_1 más alejado. A partir de v_1 se encuentra el v_2 más alejado. Se determina w tal que $d(w, v_1)$ se aproxime lo más posible al valor de $\frac{1}{2}d(v_1, v_2)$.

Problemas de la sección 22.6, página 630

1. 1 – 2 – 5, $\Delta f = 2$; 1 – 4 – 2 – 5, $\Delta f = 2$, etc.
3. 1 – 2 – 4 – 6, $\Delta f = 2$; 1 – 2 – 3 – 5 – 6, $\Delta f = 1$, etc.
5. $f_{12} = 4$, $f_{13} = 1$, $f_{14} = 4$, $f_{42} = 4$, $f_{43} = 0$, $f_{25} = 8$, $f_{35} = 1$, $f = 9$
7. $f_{12} = 4$, $f_{13} = 3$, $f_{24} = 4$, $f_{35} = 3$, $f_{54} = 2$, $f_{46} = 6$, $f_{56} = 1$, $f = 7$
9. {4, 5, 6}, 28 11. {2, 4, 6}, 50
13. 1 – 2 – 3 – 7, $\Delta f = 2$; 1 – 4 – 5 – 6 – 7, $\Delta f = 1$; 1 – 2 – 3 – 6 – 7, $\Delta f = 1$; $f_{max} = 14$
15. {3, 5, 7}, 22 17. $S = \{1, 4\}$, $\text{cap}(S, T) = 6 + 8 = 14$
19. If $f_{ij} < c_{ij}$ así como $f_{ij} > 0$

Problemas de la sección 22.7, página 633

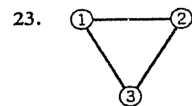
3. (2, 3) y (5, 6)
5. 1 – 2 – 5, $\Delta_t = 2$; 1 – 4 – 2 – 5, $\Delta_t = 1$; $f = 6 + 2 + 1 = 9$
7. 1 – 2 – 4 – 6, $\Delta_t = 2$; 1 – 3 – 5 – 6, $\Delta_t = 1$; $f = 4 + 2 + 1 = 7$
9. Considerando sólo bordes con un extremo etiquetado y un extremo sin etiquetar.
13. 2000
17. $S = \{1, 2, 4, 5\}$, $T = \{3, 6\}$, cap $(S, T) = 14$

Problemas de la sección 22.8, página 639

1. No 3. No 5. Sí $S = \{1, 4, 5, 8\}$
7. Sí; una gráfica no es bipartita si contiene una subgráfica bipartita.
9. 1 – 2 – 3 – 5 11. (1, 5), (2, 3)
13. (1, 4), (2, 3), (5, 7) 15. 3 19. 5
23. No; K_5 no es plana. 25. K_3
27. 3; en 1, 4, 8 29. K_3

Capítulo 22 (cuestionario y problemas de repaso), página 642

17. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 19. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 21. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

23. 

27.

Vértice	Bordes incidentes
1	$e_2, -e_3$
2	$-e_1, e_3$
3	$e_1, -e_2$

29. 4 31. 4

33. $L_2 = 10$, $L_3 = 15$, $L_4 = 13$ 35. 1 − 4 − 3 − 2

37. 1 − 2 − 4 − 3 − 5 41. $f = 7$ 45. (1, 3), (2, 4)

Problemas de la sección 23.1, página 652

1. 4 Resultados: HH, HT, TH, TT (H = cara T = cruz)
3. 2^3 Resultados: $RRR, RRL, RLR, LRR, RLL, LRL, LLR, LLL$
5. 10 Resultados: $R, BR, BBR, BBBR$, etc.
7. El espacio de tripletas ordenadas de números no negativos.
9. El espacio de pares ordenados de números $X = x \geqq 0$, $Y = y$.
13. No.
15. No olvidar enumerar S y el conjunto vacío.

Problemas de la sección 23.2, página 659

1. $63/64 \approx 0.98$
3. (a) $0.9^3 = 72.9\%$, (b) $\frac{90}{100} \cdot \frac{89}{99} \cdot \frac{88}{98} = 72.65\%$
5. $1 - 4/125$ 7. $0.95^4 \approx 81.5\%$
9. $1 - 0.97^4 = 11.5\%$ 11. 77.66%
13. $\frac{6}{36} + \frac{27}{36} - \frac{3}{36} = \frac{30}{36}$
15. $P(MMM) + P(MMFM) + P(MFMM) + P(FMMM) = \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$
17. 11.68%

Problemas de la sección 23.3, página 665

3. De 40320 maneras. 5. 19600 7. 210, 70, 112, 28
9. $\binom{52}{13} = 635\ 013\ 559\ 600$ 11. 1/84, 5/21 13. 676 000
15. La idea de la demostración es la misma que en el teorema 1, pero en vez de ocuparse n posiciones ahora tienen que ocuparse sólo k posiciones. Si se permiten repeticiones, se tienen n elementos para ocupar cada una de las k posiciones.
17. 23.5, 0.5, 2%; 39 902, 400, 1%

Problemas de la sección 23.4, página 672

3. $F(x) = 0$ si $x \leqq 0$, $F(x) = x^3/27$ si $0 < x \leqq 3$, $F(x) = 1$ si $x > 3$
5. Distribución uniforme especial, $f(x) = 0.2$ si $0 < x < 5$ y 0 en caso contrario
7. 40%, $x = 4.25$

9. $P(X > 1200) = \int_{1.2}^{2} 6[0.25 - (x - 1.5)^2]\,dx = 0.896$. *Respuesta.* $0.896^3 = 72\%$.
11. $k = 3$, $c_1 = 0.464$, $c_2 = 0.965$ 13. $k = 2.5$; 50%
17. $k = 1.1565$; 26.9% 19. $X > b$, $X \geqq b$, $X < c$, $X \leqq c$, etc.

Problemas de la sección 23.5, página 678

1. 1, $\frac{1}{2}$ 5. 3.5, 2.917 7. \$23.45
9. 750, 1, 0.002 11. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{20}$, $(X - \frac{1}{2})\sqrt{20}$
15. $E(X^k) = 2/(k + 2)$, $\sigma^2 = \frac{1}{18}$
17. $E(X^k) = (b^{k+1} - a^{k+1})/[(b - a)(k + 1)]$
19. $\gamma = 4/2\sqrt{2} = \sqrt{2}$

Problemas de la sección 23.6, página 684

1. 0.0625, 0.25, 0.9375, 0.9375 3. 64%
5. $0.99^{10} \approx 90.4\%$ 7. $1 - e^{-0.2} = 18\%$
9. $f(x) = 0.5^x e^{-0.5}/x!$, $f(0) + f(1) = e^{-0.5}(1.0 + 0.5) = 0.91$. *Respuesta.* 9%.
11. 0.265 13. $\frac{120}{286}, \frac{135}{286}, \frac{30}{286}, \frac{1}{286}$
19. $G(0) = 1$, $G'(t) = e^{-\mu} \exp[\mu e^t]\,\mu e^t = \mu e^t G(t)$, $G''(t) = \mu e^t[G(t) + G'(t)]$, $E(X^2) = G''(0) = \mu + \mu^2$, $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \mu$

Problemas de la sección 23.7, página 691

1. 0.1587, 0.6306, 0.5, 0.4950 3. 17.29, 10.71, 19.152
5. 0.27% 7. 16% 9. 84% 11. 31.1%, 95.5%
13. Aproximadamente 22 19. Use $f''(x) = 0$.

Problemas de la sección 23.8, página 701

1. 1/8, 3/16, 3/8 3. $k = 4$, $P = 9/16$
5. $f_2(y) = 1/(\beta_2 - \alpha_2)$ si $\alpha_2 < y < \beta_2$ 7. 20.200, aproximadamente 0.007
9. 27.45 mm, 0.38 mm
11. Independientes, $f_1(x) = 0.1e^{-0.1x}$ si $x > 0$, $f_2(y) = 0.1e^{-0.1y}$ si $y > 0$, 36.8%
15. 50% 17. No

Capítulo 23 (cuestionario y problemas de repaso), página 702

21. (a) 0.512, (b) Aproximadamente 0.504 23. 1/4
25. $f(0) = 0.80816$, $f(1) = 0.18367$, $f(2) = 0.00816$
27. $f(x) = 2^{-x}$, $x = 1, 2, \cdots$ 29. 0.3, 0.2, 0
31. 72 33. 118.019, 1.98, 1.65% 35. 94.09%, 5.82%, 0.09%
37. $k = 3$, $c = 0.983$ 39. 0, 2 41. 7/3, 8/9 43. 0.98^{15}
47. 76.74 kg 49. 16%, 2.25% (ver la figura 496)

Problemas de la sección 24.2, página 711

1. Los artículos 38, 69, 02, 49, 23, 52, 73, 29, 09, 05
5. Tomar $\tilde{y}_j = 2 + 4y_j$ con y_j elegido como antes.
7. $x = 0.91 = \Phi(z)$ se obtiene $z = 1.341$ (Tabla A8)
9. 2.408, 0.545, 1.022

Problemas de la sección 24.4, página 720

1. $\bar{x} = 3.47$, $s^2 = 2.98$
3. $\bar{x} = 6$, $s^2 = 13.3$
5. 1, 25
11. 100.25
13. 0.02
15. 360
17. 96, 86, 110, 24
19. 99.2, 234.7; agrupados: 99.4, 254.7

Problemas de la sección 24.5, página 724

3. $l = p^k(1 - p)^{n-k}$, $\hat{p} = k/n$, k = número de éxitos en n ensayos
5. 7/12
7. $\hat{p} = 1/\bar{x}$
9. $\hat{\mu} = \bar{x}$
11. $\hat{\theta} = n/\Sigma x_j = 1/\bar{x}$
13. $\hat{\theta} = 1$

Problemas de la sección 24.6, página 734

3. CONF $\{23.86 \leqq \mu \leqq 28.93\}$
5. Se duplica.
7. Aproximadamente 4, 16
9. CONF $\{10.07 \leqq \mu \leqq 10.33\}$
11. $c = 1.96$, $\bar{x} = 87$, $s^2 = 71.86$, $k \approx cs/\sqrt{n} = 0.742$, CONF $\{86 \leqq \mu \leqq 88\}$, CONF $\{0.17 \leqq p \leqq 0.18\}$
13. CONF $\{0.00044 \leqq \sigma^2 \leqq 0.00127\}$
15. CONF $\{23 \leqq \sigma^2 \leqq 553\}$
17. Distribuciones normales, medias −27, 81, 133, variancias 16, 144, 400.
19. $Z = X + Y$ es normal con media 105 y variancia 1.25.
    Respuesta. $P(104 \leqq Z \leqq 106) = 63\%$.

Problemas de la sección 24.7, página 746

1. $t = \sqrt{7}(0.286 - 0)/4.31 = 0.18 < c = 1.94$; no rechazar la hipótesis.
3. $c = 6090 > 6019$, $c = 12\,127 > 12\,012$; no rechazar la hipótesis.
5. $\sigma^2/n = 1$, $c = 28.36$; no rechazar la hipótesis.
7. $\mu < 28.76$ or $\mu > 31.24$
9. Alternativa $\mu \neq 1000$, $t = \sqrt{20}\,(996 - 1000)/5 = -3.58 < c = -2.09$ (tabla A10, 19 grados de libertad). Rechazar la hipótesis $\mu = 1000$ g.
11. Probar $\mu = 0$ contra $\mu \neq= 0$. $t = 2.11 < c = 2.37$ (7 grados de libertad). No rechazar la hipótesis.
13. $\alpha = 5\%$, $c = 16.92 > 9\ 0.5^2/0.4^2 = 15.06$; no rechazar la hipótesis.
15. $t_0 = \sqrt{10 \cdot 9 \cdot 17/19}\,(21.8 - 20.2)/\sqrt{9 \cdot 0.6^2 + 8 \cdot 0.5^2} = 6.3 > c = 1.74$ (17 grados de libertad). Rechazar la hipótesis y asumir que B es mejor
17. $v_0 = 50/30 = 1.67 < c = 2.59$ (9, 15) grados de libertad ; no rechazar la hipótesis.

Problemas de la sección 24.8, página 751

1. LIC $= 1 - 2.58 \cdot 0.03/\sqrt{6} = 0.968$, LSC $= 1.032$
3. $n = 10$
5. Elegir 4 veces el tamaño de la muestra original.
7. $2.58\sqrt{0.024}/\sqrt{2} = 0.283$, LIC $= 27.783$, LSC $= 27.217$
11. En 30% (5%) de los casos, aproximadamente
13. LIC $= np + 3\sqrt{np(1-p)}$, RC $= np$, LSC $= np - 3\sqrt{np(1-p)}$
15. RC $= \mu = 2.5$, LIC $= \mu + 3\sqrt{\mu} \approx 7$, LSC $= \mu - 3\sqrt{\mu}$ es negativo en (b) y se hace LIC = 0.

Problemas de la sección 24.9, página 757

1. 0.9825, 0.9384, 0.4060
3. 0.028 (en $\theta = 0.054$)
5. 19%, 15%
7. $(1 - \theta)^5$, $(1 - \theta)^5 + 5\theta(1 - \theta)^4$
9. Porque n es infinito.
11. $(1 - \frac{1}{2})^3 + 3 \cdot \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$
13. 22% (if $c = 9$)
15. $\alpha = 5\%$, $\beta = 44\%$

Problemas de la sección 24.10, página 760

1. $\chi_0^2 = 2.33 < c = 11.07$. Sí
3. $\chi_0^2 = 94.19 > c = 11.07$. Rechazar.
5. $\chi_0^2 = 0.4 < c = 3.84$. Afirmar que la moneda es legal.
7. 20 dígitos impares y 30 pares, $\chi_0^2 = 2 < 3.84$. No rechazar la hipótesis.
9. $e_j = np_j = 370/5 = 74$, $\chi_0^2 = 984/74 = 13.3$, $c = 9.49$. Rechazar la hipótesis.
11. Al combinar los tres últimos renglones se obtiene $K - r - 1 = 9$ ($r = 1$, ya que se calculó la media, $\frac{10094}{2608} \approx 3.87$). $\chi^2 = 12.8 < c = 16.92$. No rechazar la hipótesis.
13. $\chi_0^2 = 49/20 + 49/60 = 3.27 < c = 3.84$ (1 grado de libertad, $\alpha = 5\%$, que sostiene la afirmación.

Problemas de la sección 24.11, página 763

1. Hipótesis: A y B son igualmente buenos. Entonces la probabilidad de por lo menos 7 ensayos favorables a A es $\frac{1}{2}^8 + 8\ \frac{1}{2}^8 = 3.5\%$. Rechazar la hipótesis.
3. $\frac{1}{2}^6 + 6\,(\frac{1}{2})^6 + 15\,(\frac{1}{2})^6 = 34\%$ es la probabilidad de cuando mucho 2 valores negativos si $\tilde{\mu} = 0$, que no se rechaza.
5. Hipótesis $\mu = 0$. Alternativa $\mu > 0$, $\bar{x} = 1.58$, $t = \sqrt{10} \cdot 1.58/1.23 = 4.06 > c = 1.83$ ($\alpha = 5\%$). Hipótesis rechazada
7. $(\frac{1}{2})^{18}(1 + 18 + 153 + 816) = 0.0038$
9. Considere $y_j = x_j - \tilde{\mu}_0$.
11. $P(T \leqq 2) = 2.8\%$. Rechazar.
13. $P(T \leqq 14) = 7.8\%$. No rechazar.
15. $P(T \leqq 2) = 0.1\%$. Rechazar.

Problemas de la sección 24.12, página 770

1. Aproximadamente 120 pies.
3. $y - 1.9 = x$
5. $y - 1402 = 4.32(x - 590)$
7. $3s_1^2 = 500$, $3s_{xy} = 33.5$, $k_1 = 0.067$, $3s_2^2 = 2.268$, $q_0 = 0.023$, $K = 0.021$, CONF $\{0.046 \leqq \kappa_1 \leqq 0.088\}$
9. $q_0 = 76$, $K = 2.37\sqrt{76/(7 \cdot 944)} = 0.254$, CONF $\{-1.58 \leqq \kappa_1 \leqq -1.06\}$

Capítulo 24 (cuestionario y problemas de repaso), página 770

21. 4, 100
23. 106, 160, 40
25. 1.5625, 0.03696, 0.6
27. $\hat{\mu} = 15.5625$, $\tilde{\sigma}^2 = 5.3711$
29. Se duplica.
31. CONF $\{19.2 \leqq \mu \leqq 33.6\}$
33. CONF $\{0.726 \leqq \mu \leqq 0.751\}$
35. CONF $\{1.373 \leqq \mu \leqq 1.451\}$
37. CONF $\{0.105 \leqq \mu \leqq 0.107\}$; este error es 0.001, aproximadamente.
39. CONF $\{0.05 \leqq \sigma^2 \leqq 10\}$
41. $c = 14.74 > 14.5$; rechazar μ_0.
43. $\Phi\left(\dfrac{14.74 - 14.50}{\sqrt{0.025}}\right) = 0.9357$
45. $30.14/3.8 = 7.93 < 8.25$. Rechazar.
47. $t = \sqrt{100}\,(26000 - 25000)/2000 = 5 > c = 2.37$ (tabla A10). Rechazar la hipótesis $\mu_0 = 25000$ y confirmar que la afirmación del fabricante está justificada.
49. $v_0 = 2.5 < 6.0$ (9, 4) grados de libertad ; no rechazar la hipótesis.
51. Disminuye por un factor de 2. Por un factor de $2.58/1.96 = 1.32$.

Apéndice

3

Material auxiliar

A3.1 FÓRMULAS PARA FUNCIONES ESPECIALES

Respecto a tablas de valores numéricos, consultar el apéndice 5.

Función exponencial e^x (figura 519)

$$e = 2.71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71353$$

(1) $$e^x e^y = e^{x+y}, \quad e^x/e^y = e^{x-y}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

Logaritmo natural (figura 520)

(2) $$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln(x/y) = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^a) = a \ln x$$

$\ln x$ es la inversa de e^x, y $e^{\ln x} = x$, $e^{-\ln x} = e^{\ln(1/x)} = 1/x$.

Logaritmo base diez $\log_{10} x$, o simplemente $\log x$.

(3) $$\log x = M \ln x, \quad M = \log e = 0.43429\ 44819\ 03251\ 82765\ 11289\ 18917$$

(4) $$\ln x = \frac{1}{M} \log x, \quad \frac{1}{M} = 2.30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 79914\ 54684$$

$\log x$ es la inversa de 10^x, y $10^{\log x} = x$, $10^{-\log x} = 1/x$.

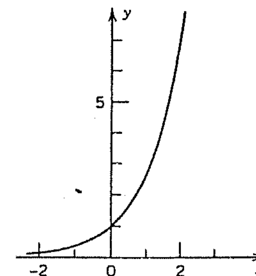


Figura 519. Función exponencial e^x.

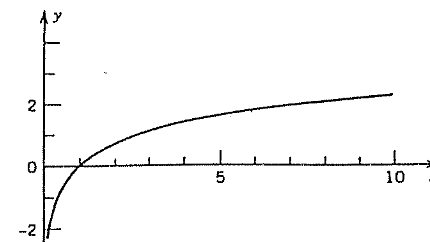


Figura 520. Logaritmo natural $\ln x$.

Funciones seno y coseno (figuras 521, 522). En cálculo, los ángulos se miden en radianes, de modo que sen x y cos x tienen periodo 2π.

sen x es impar, sen x = sen $(-x)$, y cos x es par, cos $(-x)$ = cos x.

$$1° = 0.01745\ 32925\ 19943 \text{ radian}$$

$$1 \text{ radian} = 57°\ 17'\ 44.80625''$$
$$= 57.29577\ 95131°$$

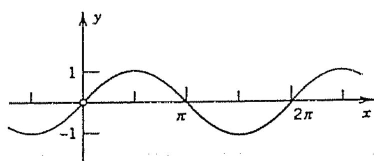


Figura 521. sen x.

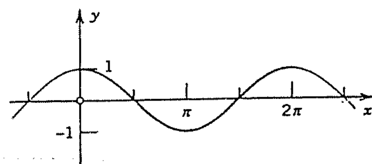


Figura 522. cos x.

(5) $$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

(6) $$\begin{cases} \operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y \\ \operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y \\ \cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \\ \cos(x-y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \end{cases}$$

(7) $$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x, \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

(8) $$\begin{cases} \operatorname{sen} x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{cases}$$

(9) $$\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x, \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

(10) $$\cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x), \qquad \operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

(11) $$\begin{cases} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \tfrac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)] \\ \cos x \cos y = \tfrac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)] \\ \operatorname{sen} x \cos y = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)] \end{cases}$$

(12) $$\begin{cases} \operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v = 2 \operatorname{sen}\frac{u+v}{2} \cos\frac{u-v}{2} \\ \cos u + \cos v = 2 \cos\frac{u+v}{2} \cos\frac{u-v}{2} \\ \cos v - \cos u = 2 \operatorname{sen}\frac{u+v}{2} \operatorname{sen}\frac{u-v}{2} \end{cases}$$

(13) $$A \cos x + B \operatorname{sen} x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x \pm \delta), \quad \tan \delta = \frac{\operatorname{sen} \delta}{\cos \delta} = \mp\frac{B}{A}$$

(14) $$A \cos x + B \operatorname{sen} x = \sqrt{A^2 + B^2} \operatorname{sen}(x \pm \delta), \quad \tan \delta = \frac{\operatorname{sen} \delta}{\cos \delta} = \pm\frac{A}{B}$$

Tangente, cotangente, secante, cosecante (figuras 523, 524)

(15) $$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

(16) $$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

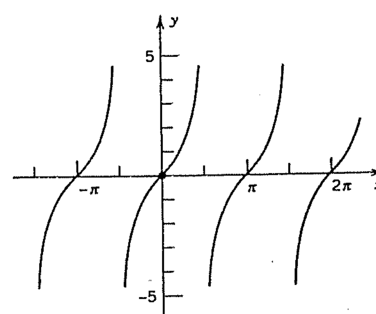


Figura 523. tan x.

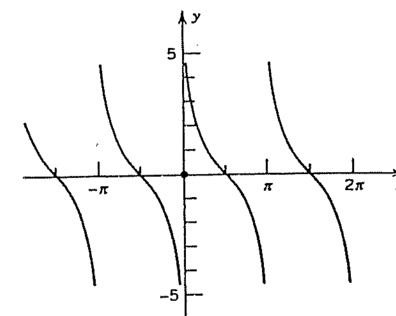


Figura 524. cot x.

Funciones hiperbólicas (seno hiperbólico senh, etc.; figuras 525, 526)

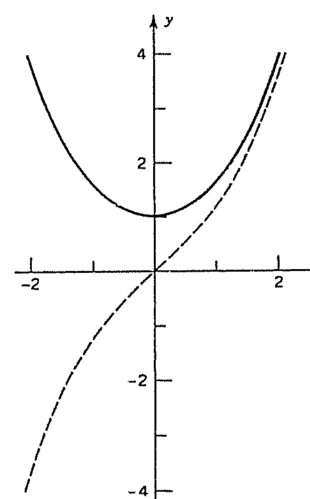


Figura 525. senh x (línea discontinua) y cosh x.

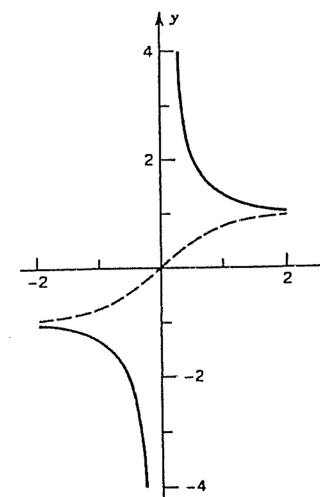


Figura 526. tanh x (línea discontinua) y coth x.

(17) $\operatorname{senh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \qquad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

(18) $\tanh x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}, \qquad \coth x = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$

(19) $\cosh x + \operatorname{senh} x = e^x, \qquad \cosh x - \operatorname{senh} x = e^{-x}$

(20) $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

(21) $\operatorname{senh}^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1), \qquad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$

(22) $\begin{cases} \operatorname{senh}(x \pm y) = \operatorname{senh} x \cosh y \pm \cosh x \operatorname{senh} y \\ \cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y \end{cases}$

(23) $\tanh(x \pm y) = \dfrac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$

Función gamma (figura 527 en la tabla A2 del apéndice 5). La función gamma $\Gamma(\alpha)$ está definida por la integral

(24) $$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha - 1}\, dt \qquad (\alpha > 0)$$

que tiene sentido sólo si $\alpha > 0$ (o, si se considera α complejo, para aquéllos α cuya parte real es positiva). Al integrar por partes se obtiene la importante *relación funcional de la función gamma*,

(25) $$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha).$$

A partir de (24) se obtiene fácilmente $\Gamma(1) = 1$; por tanto, si α es un entero positivo, por ejemplo k, entonces mediante la aplicación repetida de (25) se obtiene

(26) $$\Gamma(k + 1) = k! \qquad (k = 0, 1, \cdots).$$

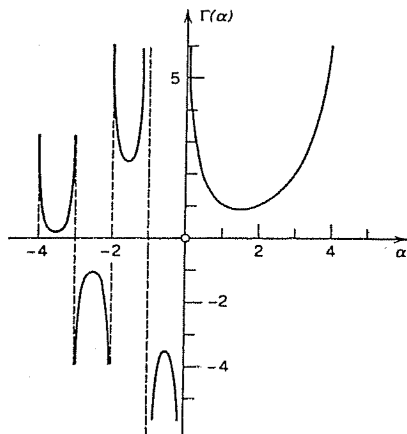


Figura 527. Función gamma.

Lo anterior muestra que *la función gamma puede considerarse como una generalización de la función factorial elemental.* [Algunas veces, para $\Gamma(\alpha)$ se usa la notación $(\alpha - 1)!$, inclusive para valores no enteros de α, y la función gamma también se denomina **función factorial**].

Por aplicación repetida de (25) se obtiene

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 1)} = \cdots = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)\cdots(\alpha + k)}$$

y esta relación puede usarse

(27) $$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\alpha(\alpha + 1)\cdots(\alpha + k)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots)$$

para definir la función gamma para $\alpha (\neq -1, -2, \cdots)$ negativo, eligiendo para k el menor entero tal que $\alpha + k + 1 > 0$. *Junto con* (24), *entonces con ésto se obtiene una definición de* $\Gamma(\alpha)$ *para todo diferente de cero o para un entero negativo* (figura 527).

Es posible demostrar que la función gamma también puede representarse como el límite de un producto, a saber, mediante la fórmula

(28) $$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \to \infty} \frac{n!\, n^\alpha}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)\cdots(\alpha + n)} \qquad (\alpha \neq 0, -1, \cdots).$$

A partir de (27) o (28) se observa que, para α complejo, la función gamma $\Gamma(\alpha)$ es una función meroforma que tiene polos simples en $\alpha = 0, -1, -2, \cdots$.

Una aproximación de la función gamma para un gran α positivo está definida por la **fórmula de Stirling**

(29) $$\Gamma(\alpha + 1) \approx \sqrt{2\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha$$

en donde e es la base del logaritmo natural. Por último, se menciona el valor especial

(30) $$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Funciones gamma incompletas

(31) $$P(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha - 1}\, dt, \qquad Q(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha - 1}\, dt \qquad (\alpha > 0)$$

(32) $$\Gamma(\alpha) = P(\alpha, x) + Q(\alpha, x)$$

Función beta

(33) $$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1 - t)^{y-1}\, dt \qquad (x > 0, y > 0)$$

Representación en términos de funciones gamma:

(34) $$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)}$$

Función de error (figura 528 y tabla A4 en el apéndice 5)

(35) $$\operatorname{fer} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

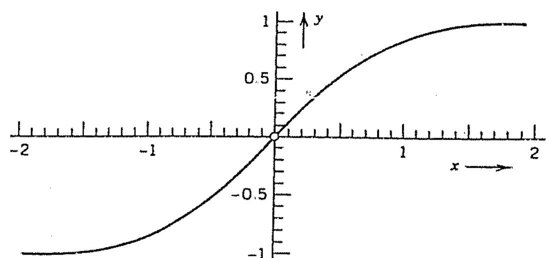


Figura 528. Función de error.

(36) $$\operatorname{fer} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + - \cdots\right)$$

$\operatorname{fer}(\infty) = 1$, *función de error complementaria*

(37) $$\operatorname{ferc} x = 1 - \operatorname{fer} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty} e^{-t^2}\,dt$$

Integrales de Fresnel[1] (figura 529)

(38) $$C(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,dt, \qquad S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt$$

$C(\infty) = \sqrt{\pi/8}$, $S(\infty) = \sqrt{\pi/8}$, *funciones complementarias*

(39) $$c(x) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} - C(x) = \int_x^{\infty} \cos(t^2)\,dt$$
$$s(x) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} - S(x) = \int_x^{\infty} \operatorname{sen}(t^2)\,dt$$

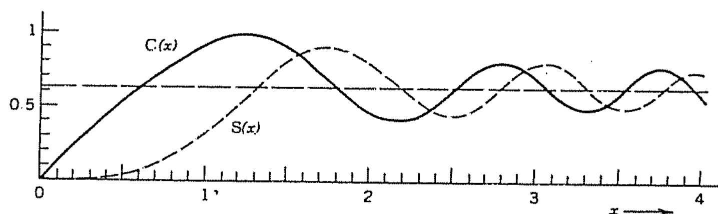


Figura 529. Integrales de Fresnel.

[1] AUGUSTIN FRESNEL (1788-1827), físico y matemático francés. Respecto a tablas, consultar la referencia [1].

Integral del seno (figura 530 y tabla A4 del apéndice 5)

(40) $$\operatorname{Is}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$$

$\operatorname{Is}(\infty) = \pi/2$, *función complementaria*

(41) $$\operatorname{is}(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Is}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$$

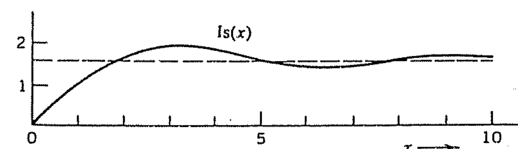


Figura 530. Integral del seno.

Integral del coseno (tabla A4 del apéndice 5)

(42) $$\operatorname{ic}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt \qquad (x > 0)$$

Integral exponencial

(43) $$\operatorname{Ie}(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \qquad (x > 0)$$

Integral logarítmica

(44) $$\operatorname{Il}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

A3.2 DERIVADAS PARCIALES

Respecto a fórmulas para diferenciar, consultar la portada interior

Sea $z = f(x, y)$ una función real de dos variables independientes, x y y. Si se mantiene constante y, por ejemplo $y = y_1$ y se considera que x es una variable, entonces $f(x, y_1)$ depende sólo de x. Si existe la derivada de $f(x, y_1)$ con respecto a x para un valor $x = x_1$, entonces el valor de esta derivada se denomina **derivada parcial** de $f(x, y_1)$ *con respecto a x en el punto* (x_1, y_1) y se denota por

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_1, y_1)} \quad \text{o por} \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_1, y_1)}$$

Otras notaciones son

$$f_x(x_1, y_1) \quad \text{y} \quad z_x(x_1, y_1);$$

que pueden usarse cuando no se utilizan subíndices para otro efecto y no existe peligro de confusión.

Por tanto, por la definición de derivada se tiene

(1) $$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_1,\, y_1)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x,\, y_1) - f(x_1,\, y_1)}{\Delta x}.$$

La derivada parcial de $z = f(x, y)$ con respecto a y se define de manera semejante; ahora se mantiene constante x, por ejemplo igual a x_1, y se deriva $f(x_1, y)$ con respecto a y. Así,

(2) $$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_1,\, y_1)} = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_1,\, y_1)} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_1,\, y_1 + \Delta y) - f(x_1,\, y_1)}{\Delta y}.$$

Otras notaciones son $f_y(x_1, y_1)$ y $z_y(x_1, y_1)$.

Resulta evidente que los valores de estas dos derivadas parciales dependen en general del punto (x_1, y_1). Por tanto, las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ en un punto variable son funciones de x y y. La función $\partial z/\partial x$ se obtiene como en cálculo ordinario, derivando $z = f(x, y)$ con respecto a x, *considerando a y como constante*, y $\partial z/\partial y$ se obtiene derivando $z = f(x, y)$ con respecto a y, *considerando a x como constante.*

Ejemplo 1 Sea $z = f(x, y) = x^2y + x \operatorname{sen} y$. Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + \operatorname{sen} y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + x \cos y. \qquad ■$$

Las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ de una función $z = f(x, y)$ tienen una **interpretación geométrica** muy simple. La función $z = f(x, y)$ puede representarse por medio de una superficie en el espacio. La ecuación $y = y_1$ representa entonces un plano vertical que corta la superficie de una curva, y la derivada parcial $\partial z/\partial x$ en un punto (x_1, y_1) es la pendiente de la tangente (es decir, tan α en donde α es el ángulo que se observa en la figura 531) a la curva. De manera semejante, la derivada parcial $\partial z/\partial y$ en (x_1, y_1) es la pendiente de la tangente a la curva $x = x_1$ sobre la superficie $z = f(x, y)$ en (x_1, y_1).

Las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ se denominan *primeras derivadas parciales* o *derivadas parciales de primer orden.* Al derivar estas derivadas una vez más se obtienen las *segundas derivadas parciales* (o *derivadas parciales de segundo orden*)[2].

(3)
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xx}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yx}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xy}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yy}.$$

Puede demostrarse que si todas las derivadas con que se trabaja son continuas, entonces dos derivadas parciales mezcladas son iguales, de modo que entonces no importa el orden de derivación (consultar la obra citada en el apéndice 1 como referencia [5].), es decir,

(4) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}.$$

[2] ¡Precaución! En la notación con subíndices, éstos se escriben en el orden en que se deriva, mientras que en la notación "∂" el orden es opuesto

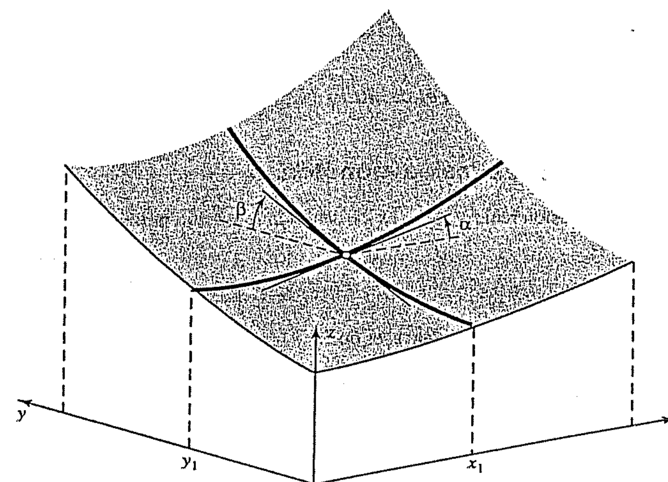


Figura 531. Interpretación geométrica de las primeras derivadas parciales.

Ejemplo 2. Para la función del ejemplo 1,

$$f_{xx} = 2y, \qquad f_{xy} = 2x + \cos y = f_{yx}, \qquad f_{yy} = -x \operatorname{sen} y. \qquad ■$$

Al derivar las segundas derivadas parciales nuevamente con respecto a x y y, respectivamente, se obtienen las *terceras derivadas parciales o derivadas parciales de tercer orden de f*, etc.

Si se considera una función $f(x, y, z)$ de tres variables independientes, entonces se obtienen las tres primeras derivadas parciales $f_x(x, y, z)$, $f_y(x, y, z)$ y $f_z(x, y, z)$. Aquí f_x se obtiene al derivar f con respecto a x, *considerando a ambas y y z como constantes.* Así, por analogía con (1), ahora se tiene

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_1,\, y_1,\, z_1)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x,\, y_1,\, z_1) - f(x_1,\, y_1,\, z_1)}{\Delta x},$$

etc. Al derivar f_x, f_y, f_z nuevamente de esta manera, se obtienen las segundas derivadas parciales de f, etc.

Ejemplo 3. Sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Entonces

$$f_x = 2x + y\, e^z, \qquad f_y = 2y + x\, e^z, \qquad f_z = 2z + xy\, e^z,$$
$$f_{xx} = 2, \qquad f_{xy} = f_{yx} = e^z, \qquad f_{xz} = f_{zx} = y\, e^z,$$
$$f_{yy} = 2, \qquad f_{yz} = f_{zy} = x\, e^z, \qquad f_{zz} = 2 + xy\, e^z. \qquad ■$$

3.3 SUCESIONES Y SERIES

Consultar también el capítulo 14.

Sucesiones reales monótonas

Una sucesión real $x_1, x_2, \cdots, x_n$ se denomina **sucesión monótona** si es **monótona creciente**, es decir,

$$x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \leqq \cdots$$

o es **monótona decreciente**, es decir,

$$x_1 \geqq x_2 \geqq x_3 \geqq \cdots .$$

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ se denomina **sucesión acotada** si existe una constante positiva K tal que $|x_n| < K$ para todo n.

Teorema 1 ***Si una sucesión real es monótona y acotada, entonces converge.***

Demostración. Sea $x_1, x_2, \cdots, x_n$ una sucesión creciente monótona y acotada. Entonces sus términos son menores que cierto número B y, como $x_1 \leq x_n$ para todo n, están en el intervalo $x_1 \leq x_n \leq B$, que se denotará por I_0. Se biseca I_0; es decir, se subdivide en dos partes de la misma longitud Si la mitad derecha (junto con sus puntos extremos) contiene términos de la sucesión, se denota por I_1. Si no contiene términos de la sucesión, entonces la mitad izquierda (junto con sus puntos extremos) se denota por I_1. Este es el primer paso.

En el segundo paso se biseca I_1, se elige una mitad aplicando la regla mencionada, y se denomina I_2, y así sucesivamente (ver la figura 532).

De esta manera se obtienen intervalos cada vez más cortos $I_0, I_1, I_2, \cdots$ con las siguientes propiedades. Cada I_m contiene a todos los I_n para $n > m$. Ningún término de la sucesión está a la derecha de I_m y, como la sucesión es monótona creciente, todos los x_n con n mayor que cierto número N están en I_m; por supuesto en general N depende de m. Las longitudes de los I_m tienden a cero cuando m tiende a infinito. Por tanto, existe exactamente un número, denominado L, que está en todos los intervalos,[3] y ahora es fácil demostrar que la sucesión es convergente con límite L.

De hecho, dado un $\epsilon > 0$, se elige un m tal que la longitud de I_m sea menor que ϵ. Entonces, L y todos los x_n con $n > N(m)$ están en I_m y, por consiguiente, $|x_n - L| < \epsilon$ para todos estos n. Así se completa la demostración para una sucesión creciente. Para una sucesión decreciente la demostración es igual, excepto que es necesario intercambiar correctamente "derecha" e "izquierda" en la construcción de estos intervalos. ∎

[3] Esta proposición parece evidente, aunque no lo es; puede considerarse como un axioma del sistema de números reales en la forma siguiente. Sean $J_1, J_2, \cdots$, intervalos cerrados tales que cada J_m contiene a todos los J_n con $n > m$, y las longitudes de los J_m tienden a cero cuando m tiende a infinito. Entonces existe exactamente un número real que está contenido en estos intervalos. Este es el **axioma de Cantor-Dedekind**, denominado así en honor de los matemáticos alemanes GEORG CANTOR (1845-1918), creador de la teoría de conjuntos, y RICHARD DEDEKIND (1831-1916), conocido por su obra fundamental sobre teoría de números. Respecto a mayores detalles, consultar la obra citada en el apéndice 1 como referencia [2]. (Se dice que un intervalo I es **cerrado** si sus dos puntos extremos se consideran como puntos que pertenecen al intervalo. Se dice que I es **abierto** si sus dos puntos extremos se consideran fuera del intervalo.)

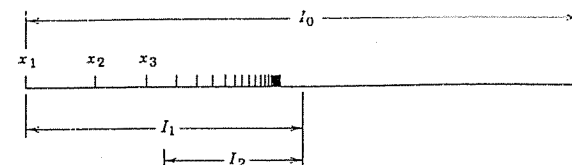


Figura 532. Demostración del teorema 1.

Series reales

Teorema 2 Prueba de Leibniz para series reales.

Sea $x_1, x_2, \cdots, x_n$ real monótona decreciente a cero; es decir,

(1) (a) $x_1 \geqq x_2 \geqq x_3 \geqq \cdots$, (b) $\lim_{m\to\infty} x_m = 0$.

Entonces la serie con términos de signo alternos

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + - \cdots$$

converge, y para el residuo R_n después del n-ésimo término se tiene la estimación

(2) $$|R_n| \leqq x_{n+1}.$$

Demostración. Sea s_n la n-ésima suma parcial de la serie. Entonces, debido a (1a),

$$s_1 = x_1, \qquad s_2 = x_1 - x_2 \leqq s_1,$$

$$s_3 = s_2 + x_3 \geqq s_2, \qquad s_3 = s_1 - (x_2 - x_3) \leqq s_1,$$

de modo que $s_2 \leq s_3 \leq s_1$. Procediendo de esta manera se concluye que (figura 533)

(3) $$s_1 \geqq s_3 \geqq s_5 \geqq \cdots \geqq s_6 \geqq s_4 \geqq s_2$$

con lo que se demuestra que las sumas parciales impares constituyen una sucesión monótona acotada, así como las sumas parciales pares. Luego, por el teorema 1, ambas series convergen, por ejemplo,

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = s, \qquad \lim_{n\to\infty} s_{2n} = s^*.$$

Entonces, como $s_{2n+1} - s_{2n} = x_{2n+1}$, se observa fácilmente que (1b) implica

$$s - s^* = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = 0.$$

Por tanto, $s^* = s$ y la serie converge con la suma s.

Se demostrará la estimación (2) para el residuo. Como $s_n \to s$, por (3) se concluye que

$$s_{2n+1} \geqq s \geqq s_{2n} \qquad \text{y también} \qquad s_{2n-1} \geqq s \geqq s_{2n}.$$

Al restar s_{2n} y s_{2n+1}, respectivamente, se obtiene

$$x_{2n+1} \geqq R_{2n} \geqq 0, \qquad 0 \geqq R_{2n-1} \geqq -x_{2n}$$

En estas desigualdades, la primera expresión es igual a x_{2n+1}, la última es igual a $-x_{2n}$, y las expresiones entre los signos de desigualdad son los residuos R_{2n} y R_{2n-1}. Por tanto, las desigualdades pueden escribirse como

y se observa que implican (2). Así se completa la demostración. ∎

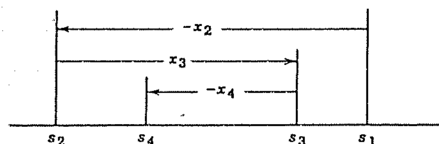


Figura 533. Demostración de la prueba de Leibniz.

Apéndice **4**

Demostraciones adicionales

Sección 12.5, página 728

Demostración del teorema 2 (Ecuaciones de Cauchy-Riemann)

Se demostrará que las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$(1) \qquad u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x$$

son suficientes para que una función compleja

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

sea analítica; precisamente, *si la parte real u y la parte imaginaria v de f(z) satisfacen* (1) *en un dominio D en el plano complejo y las derivadas parciales en* (1) *son continuas en D, entonces f(z) es un analítica en D.*

En esta demostración se escribirán $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ y $\Delta f = f(z + \Delta z) - f(z)$. La idea de la demostración es como sigue.

(a) Δf se expresará en términos de primeras derivadas parciales de u y v, aplicando el teorema del valor medio de la sección 8.8.

(b) Se hará caso omiso de las derivadas parciales con respecto a y, aplicando las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

(c) Se hará que Δz tienda a cero a y se demostrará que entonces $\Delta f/\Delta z$ según se obtiene tiende a un límite, que es igual a $u_x + iv_x$, el miembro derecho de (4) en la sección 12.5,

$$f'(z) = u_x + iv_x$$

sin importar la forma de aproximación a cero.

A continuación se proporcionan los detalles.

(a) Sea P: (x, y) cualquier punto fijo en D. Como D es un dominio, contiene a una vecindad de P. Es posible elegir un punto Q: $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ en esta vecindad, de

modo que el segmento de recta PQ esté en D. Debido a las suposiciones de continuidad es posible aplicar el teorema del valor medio de la sección 8.8. Así se obtiene

$$u(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - u(x,\ y) = (\Delta x)u_x(M_1) + (\Delta y)u_y(M_1)$$

$$v(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - v(x,\ y) = (\Delta x)v_x(M_2) + (\Delta y)v_y(M_2).$$

en donde M_1 y M_2 (¡en general $M_2 \neq M_1$!) son puntos idóneos sobre este segmento. La primera recta es Re Δf y a segunda es Im Δf, de modo que

$$\Delta f = (\Delta x)u_x(M_1) + (\Delta y)u_y(M_1) + i[(\Delta x)v_x(M_2) + (\Delta y)v_y(M_2)].$$

(b) $u_y = -v_x$ y $v_y = u_x$ por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, así que

$$\Delta f = (\Delta x)u_x(M_1) - (\Delta y)v_x(M_1) + i[(\Delta x)v_x(M_2) + (\Delta y)u_x(M_2)].$$

También, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, de modo que en el primer término puede escribirse $\Delta x = \Delta z - i\Delta y$ y en el segundo, $\Delta y = (\Delta z - \Delta x)/i = -i(\Delta z - \Delta x)$. Así se obtiene

$$\Delta f = (\Delta z - i\Delta y)u_x(M_1) + i(\Delta z - \Delta x)v_x(M_1) + i[(\Delta x)v_x(M_2) + (\Delta y)u_x(M_2)].$$

Efectuando las multiplicaciones y reordenando se obtiene

$$\Delta f = (\Delta z)u_x(M_1) - i\Delta y\{u_x(M_1) - u_x(M_2)\}$$

$$+ i[(\Delta z)v_x(M_1) - \Delta x\{v_x(M_1) - v_x(M_2)\}].$$

Ahora, al dividir entre Δz se obtiene

$$\text{(A)} \qquad \frac{\Delta f}{\Delta z} = u_x(M_1) + iv_x(M_1) - \frac{i\Delta y}{\Delta z}\{u_x(M_1) - u_x(M_2)\} - \frac{i\Delta x}{\Delta z}\{v_x(M_1) - v_x(M_2)\}.$$

(c) Por último, se deja que Δz tienda a cero y se observa que $|\Delta y/\Delta z| \leqq 1$ y $|\Delta x/\Delta z| \leqq 1$ en (A). Entonces, Q: $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ tiende a P: (x, y), de modo que M_1 y M_2 deben tender a P. También, como se supone que las derivadas parciales en (A) son continuas, tienden a su valor en P. En particular, las diferencias en las llaves $\{\cdots\}$ en (A) tienden a acero. Por tanto, el límite del miembro derecho de (A) existe y es independiente de la trayectoria a lo largo de la cual $\Delta z \to 0$. Se observa que este límite es igual al miembro derecho de (4) en la sección 12.5. Lo anterior significa que $f(z)$ es analítica en todo punto z en D, y así se ha completado la demostración. ∎

Sección 13.3, páginas 762 y 764

Demostración de Goursat del teorema de la integral de Cauchy sin la condición de que $f'(z)$ sea continua

Se comenzará con el caso en que C es la frontera de un triángulo. C está orientado en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Al unir los puntos medios de los lados, el triángulo se subdivide en cuatro triángulos congruentes (figura 536). Sean $C_{\text{I}}, C_{\text{II}}, C_{\text{III}}, C_{\text{IV}}$ las fronteras de estos triángulos. Se afirma que

$$\text{(1)} \qquad \oint_C f\,dz = \oint_{C_{\text{I}}} f\,dz + \oint_{C_{\text{II}}} f\,dz + \oint_{C_{\text{III}}} f\,dz + \oint_{C_{\text{IV}}} f\,dz.$$

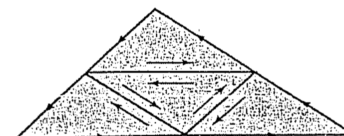


Figura 536. Demostración del teorema de la integral de Cauchy.

En efecto, sobre la derecha se integra a lo largo de cada uno de los tres segmentos de subdivisión en ambas direcciones posibles (figura 536), de modo que las integrales correspondientes se cancelan por pares y la suma de las integrales sobre la derecha es igual a la integral de la izquierda. A continuación, sobre la derecha se elige la integral que tenga el mayor valor absoluto y a su trayectoria se la denomina por C_1. Entonces, por la desigualdad del triángulo (sección 12.5),

$$\left|\oint_C f\,dz\right| \leqq \left|\oint_{C_{\text{I}}} f\,dz\right| + \left|\oint_{C_{\text{II}}} f\,dz\right| + \left|\oint_{C_{\text{III}}} f\,dz\right| + \left|\oint_{C_{\text{IV}}} f\,dz\right|$$

$$\leqq 4\left|\oint_{C_1} f\,dz\right|.$$

A continuación, el triángulo acotado por C_1 se subdivide como antes y se elige un triángulo de subdivisión con frontera C_2 para el que

$$\left|\oint_{C_1} f\,dz\right| \leqq 4\left|\oint_{C_2} f\,dz\right|. \qquad \text{Entonces} \qquad \left|\oint_C f\,dz\right| \leqq 4^2\left|\oint_{C_2} f\,dz\right|.$$

Procediendo de esta manera se obtiene una sucesión de triángulos $T_1, T_2, \cdots$ con fronteras $C_1, C_2, \cdots$ que son semejantes y tales que T_n está en T_m cuando $n > m$, y

$$\text{(2)} \qquad \left|\oint_C f\,dz\right| \leqq 4^n\left|\oint_{C_n} f\,dz\right|, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

Sea z_0 el punto que pertenece a todos estos triángulos. Como f es diferenciable en $z = z_0$, entonces existe la derivada $f'(z_0)$. Sea $h(z)$ la diferencia entre el cociente de diferencias y la derivada:

$$\text{(3)} \qquad h(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0).$$

Como $f'(z_0)$ es el límite de este cociente de diferencias, se observa que $h(z)$ puede hacerse tan pequeña como se quiera en valor absoluto; para un número positivo dado es posible encontrar un número positivo tal que

$$\text{(4)} \qquad |h(z)| < \epsilon \qquad \text{cuando} \qquad |z - z_0| < \delta.$$

Este hecho será necesario dentro de poco. Al despejar algebraicamente $f(z)$ en (3) se obtiene

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + h(z)(z - z_0).$$

Integrando esta expresión sobre la frontera C_n del triángulo T_n se obtiene

$$\oint_{C_n} f(z)\,dz = \oint_{C_n} f(z_0)\,dz + \oint_{C_n} (z - z_0)f'(z_0)\,dz + \oint_{C_n} h(z)(z - z_0)\,dz.$$

Como $f(z_0)$ y $f'(z_0)$ son constantes y C_n es una trayectoria cerrada, las dos primeras integrales de la derecha son cero, como se concluye por la demostración de Cauchy, que es aplicable porque los integrandos tienen derivadas continuas (0 y *constante*, respectivamente). Así, se obtiene

$$\oint_{C_n} f(z)\,dz = \oint_{C_n} h(z)(z - z_0)\,dz.$$

Ahora es posible considerar n tan grande que el triángulo T_n esté en el disco $|z - z_0| < \delta$. Sea L_n la longitud que C_n. Entonces $|z - z_0| < L_n$ para todo z en C_n y z_0 en T_n. Por ésto y (4) se tiene $|h(z)(z - z_0)| < \epsilon L_n$. Así, al aplicar la desigualdad ML en la sección 13.2 ahora se obtiene

$$(5) \qquad \left|\oint_{C_n} f(z)\,dz\right| = \left|\oint_{C_n} h(z)(z - z_0)\,dz\right| \leqq \epsilon L_n \cdot L_n = \epsilon L_n^2.$$

Ahora, sea L la longitud de C. Entonces la trayectoria C_1 tiene la longitud $L_1 = L/2$, la trayectoria C_2 tiene la longitud $L_2 = L_1/2 = L/4$, etc., y C_n tiene la longitud

$$L_n = \frac{L}{2^n}. \qquad \text{Por tanto,} \qquad L_n^2 = \frac{L^2}{4^n}.$$

Entonces, a partir de (2) y (5) se obtiene

$$\left|\oint_C f\,dz\right| \leqq 4^n \left|\oint_{C_n} f\,dz\right| \leqq 4^n \epsilon L_n^2 = 4^n \epsilon \frac{L^2}{4^n} = \epsilon L^2.$$

Al elegir ϵ (> 0) suficientemente pequeño, la expresión en la derecha puede hacerse tan pequeña como se quiera, mientras que la expresión en la izquierda es el valor definidor de una integral. En consecuencia, este valor debe ser cero, y así se completa la demostración.

La demostración para *el caso en que C es la frontera de un polígono* se concluye a partir de la demostración anterior al subdividir el polígono en triángulos (figura 537). La integral correspondiente a cada uno de tales triángulos es cero. La suma de estas integrales es igual a la integral sobre C, porque se integra a lo largo de cada segmento de subdivisión en ambas direcciones, las integrales correspondientes se cancelan por pares y se queda con la integral sobre C.

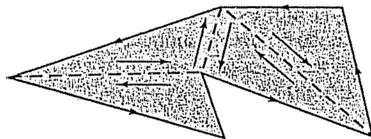


Figura 537. Demostración del teorema de la integral de Cauchy para un polígono.

El caso de una trayectoria simple cerrada general C puede reducirse al caso precedente al inscribir en C un polígono cerrado P de cuerdas, que se aproxime a C "de manera suficientemente exacta", y puede demostrarse que existe un polígono P tal que la integral sobre P difiere de la integral sobre C por menos de cualquier número real positivo preasignado ϵ, sin importar cuán pequeño sea. Los detalles de esta demostración son algo más complicados, aunque pueden consultarse en la obra citada en el apéndice 1 como referencia [D6]. ∎

Sección 14.1, página 785

Demostración del teorema 4 (Principio de convergencia de Cauchy)

(a) En esta demostración se necesitan dos conceptos y teoremas, que se escribirán en primer término.

1. Una **sucesión acotada** $s_1, s_2, \cdots$, es una sucesión tal que todos sus términos están en un disco de radio (suficientemente grande, finito) K con centro en el origen así, $|s_n| < K$ para todo n.

2. Un **punto límite** a de una sucesión $s_1, s_2, \cdots$, es un punto tal que, dado cualquier $\epsilon > 0$, existe una infinidad de términos que satisfacen $|s_n - a| < \epsilon$. (Observar que ésto *no* implica convergencia, ya que aun puede haber una infinidad de términos que no estén contenidos en tal círculo de radio ϵ y centro a.)

Ejemplo: $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{15}{16}, \cdots$ tiene los puntos límite 0 y 1 y diverge.

3. Una sucesión acotada en el plano complejo tiene por lo menos un punto límite. (Teorema de Bolzano-Weierstrass; demostración a continuación. Recordar que "sucesión" siempre significa sucesión *infinita*.)

(b) Ahora se considerará la verdadera demostración de que $z_1 + z_2 + \cdots$ converge si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ es posible encontrar un N tal que

$$(1) \qquad |z_{n+1} + \cdots + z_{n+p}| < \epsilon \qquad \text{para todo } n > N \text{ y } p = 1, 2, \cdots.$$

Aquí, por la definición de sumas parciales,

$$s_{n+p} - s_n = z_{n+1} + \cdots + z_{n+p}.$$

Escribiendo $n + p = r$, a partir de esto se observa que (1) es equivalente a

$$(1^*) \qquad |s_r - s_n| < \epsilon \qquad \text{para todo } r > N \text{ y } n > N.$$

Suponga que $s_1, s_2, \cdots$ converge. Sea s su límite. Entonces para un $\epsilon > 0$ dado es posible encontrar un N tal que

$$|s_n - s| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{para todo } n > N.$$

Por tanto, si $r > N$ y $n > N$, entonces por la desigualdad del triángulo (sección 12.2),

$$|s_r - s_n| = |(s_r - s) - (s_n - s)| \leqq |s_r - s| + |s_n - s| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

es decir, se cumple (1*).

(c) Recíprocamente, se supone que $s_1, s_2, \cdots$ satisface (1*). Primero se demostrará que entonces la sucesión debe estar acotada. En efecto, en (1*) se eligen un ϵ fijo y un $n = n_0 > N$ fijo. Así, (1*) implica que todo s_r con $r > N$ está en el disco de radio ϵ y centro s_{n0} y sólo una *cantidad finita* de términos $s_1, \cdots, s_N$ pueden no estar en este disco. Resulta evidente que ahora es posible encontrar un círculo tan grande que este disco y esta cantidad finita de términos, todos, estén contenidos en tal disco nuevo. Así, la sucesión está acotada. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, tiene por lo menos un punto límite, que se denominará s.

A continuación se demostrará que la sucesión converge al límite s. Sea $\epsilon > 0$ dado. Entonces existe un N^* tal que $|s_r - s_n| < \epsilon/2$ para todo $r > N^*$ y $n > N^*$, por (1*). También, por la definición de punto límite, $|s_n - s| < \epsilon/2$ para una *infinidad de n*, de modo que es posible encontrar y fijar un $n > N^*$ tal que $|s_n - s| < \epsilon/2$. Juntos, para *todo* $r > N^*$,

$$|s_r - s| = |(s_r - s_n) + (s_n - s)| \leqq |s_r - s_n| + |s_n - s| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon;$$

es decir, la sucesión $s_1, s_2, \cdots$ converge al límite s.

Teorema de Bolzano-Weierstrass[3]

Una sucesión infinita acotada $z_1, z_2, z_3, \cdots$ en el plano complejo tiene por lo menos un punto límite.

Demostración. Resulta evidente que se requieren dos condiciones: una sucesión finita no puede tener un punto límite, y la sucesión $1, 2, 3, \cdots$, que es infinita pero no acotada, no tiene ningún punto límite. Para demostrar el teorema se considerará una sucesión infinita acotada $z_1, z_2, \cdots$ y sea K tal que $|z_n| < K$ para todo n. Si sólo un número finito de valores de los z_n son diferentes, entonces como la sucesión es infinita, en ésta debe ocurrir de manera infinita algún número z y, por definición, tal número es un punto límite de la sucesión.

A continuación se analizará el caso en que la sucesión contiene una infinidad de términos diferentes. Se traza un gran cuadrado Q_0 que contenga a todos los z_n. Q_0 se subdivide en cuatro cuadrados congruentes, que se numeran por 1, 2, 3 y 4. Resulta evidente que por lo menos uno de estos cuadrados (cada uno considerado con su frontera completa) debe contener una infinidad de términos de la sucesión. El cuadrado de este tipo con el menor número (1, 2, 3 o 4) se denotará por Q_1). Este es el primer paso. En el paso siguiente Q_1 se subdivide en cuatro cuadrados congruentes y se elige un cuadrado Q_2 aplicando la misma regla, etc. Así se obtiene una sucesión infinita de cuadrados $Q_0, Q_1, Q_2, \cdots, Q_n, \cdots$ con la propiedad de que lado de Q_n tiende a cero cuando n tiende a infinito, y Q_m contiene a todos los Q_n con $n > m$. No es difícil ver que el número que pertenece a todos estos cuadrados,[4] que se denomina $z = a$, es un punto

[3] BERNARD BOLZANO (1781-1848), matemático austríaco y profesor de estudios religiosos, es pionero en el estudio de los conjuntos de puntos, de los fundamentos del análisis y de la lógica matemática. En cuanto a Weierstrass, consultar la nota de pie de página 8 en la sección 14.6

[4] El hecho de que exista un único número $z = a$ así parece evidente, aunque en realidad se concluye de un axioma del sistema de los números reales, denominado *axioma de Cantor-Dedekind*; ver la nota de pie de página 3 en el apéndice 3.3.

límite de la sucesión. De hecho, dado un $\epsilon > 0$, es posible elegir un N tan grande que el lado del cuadrado Q_N sea menor que ϵ y, como Q_N contiene una infinidad de z_n, entonces se tiene $|z_n - a| < \epsilon$ para una infinidad de n. Así se completa la demostración. ∎

Sección 14.3, página

***Parte (b) de la demostración del teorema* 5**

Es necesario demostrar que

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \left[\frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} - nz^{n-1}\right]$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} a_n \, \Delta z[(z + \Delta z)^{n-2} + 2z(z + \Delta z)^{n-3} + \cdots + (n - 1)z^{n-2}],$$

así,

$$\frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} - nz^{n-1} = \Delta z[(z + \Delta z)^{n-2} + 2z(z + \Delta z)^{n-3} + \cdots + (n - 1)z^{n-2}]$$

o bien, haciendo $z + \Delta z = b$ y $z = a$, entonces $\Delta z = b - a$,

(7a) $$\frac{b^n - a^n}{b - a} - na^{n-1} = (b - a)A_n \qquad (n = 2, 3, \cdots),$$

en donde A_n es la expresión entre corchetes en el miembro derecho,

(7b) $$A_n = b^{n-2} + 2ab^{n-3} + 3a^2b^{n-4} + \cdots + (n - 1)a^{n-2};$$

así, $A_1 = 1$, $A_3 = b + 2a$, etc. Se aplicará inducción. Cuando $n = 2$, entonces se cumple (7), ya que

$$\frac{b^2 - a^2}{b - a} - 2a = \frac{b^2 - a^2 - 2a(b - a)}{b - a} = \frac{(b - a)^2}{b - a} = b - a = (b - a)A_2.$$

Suponiendo que (7) se cumple para $n = k$, se demostrará que se cumple para $n = k + 1$. Al sumar y restar un término al numerador y luego dividir se obtiene

$$\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{b - a} = \frac{b^{k+1} - ba^k + ba^k - a^{k+1}}{b - a} = b\,\frac{b^k - a^k}{b - a} + a^k.$$

Por la hipótesis de inducción, el miembro derecho es igual a

$$b[(b - a)A_k + ka^{k-1}] + a^k.$$

Por cálculo directo se demuestra que lo anterior es igual a

$$(b - a)\{bA_k + ka^{k-1}\} + aka^{k-1} + a^k.$$

A partir de (7b) con $n = k$ se observa que la expresión entre corchetes $\{\cdots\}$ es igual a

$$b^{k-1} + 2ab^{k-2} + \cdots + (k-1)ba^{k-2} + ka^{k-1} = A_{k+1}.$$

Por tanto, el resultado es

$$\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{b - a} = (b - a)A_{k+1} + (k+1)a^k.$$

Al tomar el último término de la izquierda, se obtiene (7) con $n = k + 1$. Así se demuestra (7) para cualquier entero $n \geqq 2$ y se completa la demostración. ∎

Sección 17.2, página

Otra demostración del teorema 1, sin usar un conjugado armónico

Se demostrará que si $w = u + iv = f(z)$ es analítica y mapea un dominio D de manera conforme sobre un dominio D^* y $\Phi^*(u, v)$ es armónica en D^*, entonces

$$\Phi(x, y) = \Phi^*(u(x, y), v(x, y)) \tag{1}$$

es armónica en D, es decir, $\nabla^2 = 0$ en D. No se usará el conjugado armónico de Φ^*, sino que se aplicará diferenciación directa. Por la regla de la cadena,

$$\Phi_x = \Phi_u^* u_x + \Phi_v^* v_x.$$

Nuevamente se aplica la regla de la cadena, subrayando los términos que se eliminan cuando se forma $\nabla^2\Phi$:

$$\Phi_{xx} = \underline{\Phi_u^* u_{xx}} + (\Phi_{uu}^* u_x + \underline{\Phi_{uv}^* v_x})u_x$$
$$+ \underline{\Phi_v^* v_{xx}} + (\Phi_{vu}^* u_x + \Phi_{vv}^* v_x)v_x.$$

Φ_{yy} es el mismo con cada x reemplazado por y. Se forma la suma $\nabla^2\Phi$. En ésta, $\Phi_{vu}^* = \Phi_{uv}^*$ está multiplicada por

$$u_x v_x + u_y v_y,$$

que es 0 por las ecuaciones de Cauchy-Riemann. También, $\nabla^2 u = 0$ y $\nabla^2 v = 0$. Queda

$$\nabla^2\Phi = \Phi_{uu}^*(u_x^2 + u_y^2) + \Phi_{vv}^*(v_x^2 + v_y^2).$$

Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, lo anterior se vuelve

$$\nabla^2\Phi = (\Phi_{uu}^* + \Phi_{vv}^*)(u_x^2 + v_x^2)$$

y es 0 debido a que Φ^* es armónico. ∎

Apéndice 5 Tablas

Tablas de las transformadas de Laplace en las secciones 6.9 y 6.10
Tablas de las transformadas de Fourier en la sección 10.12

Tabla A1. Funciones de Bessel

Respecto a tablas más completas, consultar la obra citada en el apéndice 1 como referencia [1].

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0.0	1.0000	0.0000	3.0	−0.2601	0.3991	6.0	0.1506	−0.2767
0.1	0.9975	0.0499	3.1	−0.2921	0.3009	6.1	0.1773	−0.2559
0.2	0.9900	0.0995	3.2	−0.3202	0.2613	6.2	0.2017	−0.2329
0.3	0.9776	0.1483	3.3	−0.3443	0.2207	6.3	0.2238	−0.2081
0.4	0.9604	0.1960	3.4	−0.3643	0.1792	6.4	0.2433	−0.1816
0.5	0.9385	0.2423	3.5	−0.3801	0.1374	6.5	0.2601	−0.1538
0.6	0.9120	0.2867	3.6	−0.3918	0.0955	6.6	0.2740	−0.1250
0.7	0.8812	0.3290	3.7	−0.3992	0.0538	6.7	0.2851	−0.0953
0.8	0.8463	0.3688	3.8	−0.4026	0.0128	6.8	0.2931	−0.0652
0.9	0.8075	0.4059	3.9	−0.4018	−0.0272	6.9	0.2981	−0.0349
1.0	0.7652	0.4401	4.0	−0.3971	−0.0660	7.0	0.3001	−0.0047
1.1	0.7196	0.4709	4.1	−0.3887	−0.1033	7.1	0.2991	0.0252
1.2	0.6711	0.4983	4.2	−0.3766	−0.1386	7.2	0.2951	0.0543
1.3	0.6201	0.5220	4.3	−0.3610	−0.1719	7.3	0.2882	0.0826
1.4	0.5669	0.5419	4.4	−0.3423	−0.2028	7.4	0.2786	0.1096
1.5	0.5118	0.5579	4.5	−0.3205	−0.2311	7.5	0.2663	0.1352
1.6	0.4554	0.5699	4.6	−0.2961	−0.2566	7.6	0.2516	0.1592
1.7	0.3980	0.5778	4.7	−0.2693	−0.2791	7.7	0.2346	0.1813
1.8	0.3400	0.5815	4.8	−0.2404	−0.2985	7.8	0.2154	0.2014
1.9	0.2818	0.5812	4.9	−0.2097	−0.3147	7.9	0.1944	0.2192
2.0	0.2239	0.5767	5.0	−0.1776	−0.3276	8.0	0.1717	0.2346
2.1	0.1666	0.5683	5.1	−0.1443	−0.3371	8.1	0.1475	0.2476
2.2	0.1104	0.5560	5.2	−0.1103	−0.3432	8.2	0.1222	0.2580
2.3	0.0555	0.5399	5.3	−0.0758	−0.3460	8.3	0.0960	0.2657
2.4	0.0025	0.5202	5.4	−0.0412	−0.3453	8.4	0.0692	0.2708
2.5	−0.0484	0.4971	5.5	−0.0068	−0.3414	8.5	0.0419	0.2731
2.6	−0.0968	0.4708	5.6	0.0270	−0.3343	8.6	0.0146	0.2728
2.7	−0.1424	0.4416	5.7	0.0599	−0.3241	8.7	−0.0125	0.2697
2.8	−0.1850	0.4097	5.8	0.0917	−0.3110	8.8	−0.0392	0.2641
2.9	−0.2243	0.3754	5.9	0.1220	−0.2951	8.9	−0.0653	0.2559

$J_0(x) = 0$ por $x = 2.405, 5.520, 8.654, 11.792, 14.931, \cdots$
$J_1(x) = 0$ por $x = 0, 3.832, 7.016, 10.173, 13.324, \cdots$

Tabla A1. (*Continuación*)

x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	x	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$
0.0	$(-\infty)$	$(-\infty)$	2.5	0.498	0.146	5.0	−0.309	0.148
0.5	−0.445	−1.471	3.0	0.377	0.325	5.5	−0.339	−0.024
1.0	0.088	−0.781	3.5	0.189	0.410	6.0	−0.288	−0,175
1.5	0.382	−0.412	4.0	−0.017	0.398	6.5	−0.173	−0.274
2.0	0.510	−0.107	4.5	−0.195	0.301	7.0	−0.026	−0.303

Tabla A2. Función gamma [ver (24) en el apéndice 3]

α	$\Gamma(\alpha)$	α	$\Gamma(\alpha)$	α	$\Gamma(\alpha)$	α	$\Gamma(\alpha)$	α	$\Gamma(\alpha)$
1.00	1.000 000	1.20	0.918 169	1.40	0.887 264	1.60	0.893 515	1.80	0.931 384
1.02	0.988 844	1,22	0.913 106	1.42	0.886 356	1,62	0.895 924	1.82	0.936 845
1.04	0.978 438	1.24	0.908 521	1.44	0.885 805	1.64	0.898 642	1.84	0.942 612
1.06	0.968 744	1.26	0.904 397	1.46	0.885 604	1.66	0.901 668	1.86	0.948 687
1.08	0.959 725	1.28	0.900 718	1.48	0.885 747	1.68	0.905 001	1.88	0.955 071
1.10	0.951 351	1.30	0.897 471	1.50	0.886 227	1.70	0.908 639	1.90	0.961 766
1.12	0.943 590	1.32	0.894 640	1.52	0,887 039	1.72	0.912 581	1.92	0.968 774
1.14	0.936 416	1.34	0.892 216	1.54	0.888 178	1,74	0.916 826	1.94	0.976 099
1.16	0.929 803	1.36	0.890 185	1.56	0.889 639	1.76	0.921 375	1.96	0.983 743
1.18	0.923 728	1.38	0 888 537	1.58	0.891 420	1.78	0.926 227	1,98	0.991 708
1.20	0.918 169	1.40	0.887 264	1.60	0.893 515	1.80	0.931 384	2.00	1.000 000

Tabla A3. Función factorial

n	$n!$	log ($n!$)	n	$n!$	log ($n!$)	n	$n!$	log ($n!$)
1	1	0.000 000	6	720	2.857 332	11	39 916 800	7.601 156
2	2	0.301 030	7	5 040	3.702 431	12	479 001 600	8.680 337
3	6	0.778 151	8	40 320	4.605 521	13	6 227 020 800	9.794 280
4	24	1.380 211	9	362 880	5.559 763	14	87 178 291 200	10.940 408
5	120	2.079 181	10	3 628 800	6.559 763	15	1 307 674 368 000	12.116 500

Tabla A4. Función de error, integrales del seno y del coseno [ver (35), (40), (42) en el apéndice 3]

x	fer x	Ic(x)	ic(x)	x	fer x	Ic(x)	ic(x)
0.0	0.0000	0.0000	∞	2.0	0.9953	1.6054	−0.4230
0.2	0.2227	0.1996	1.0422	2.2	0.9981	1.6876	−0.3751
0.4	0.4284	0.3965	0.3788	2.4	0.9993	1.7525	−0.3173
0.6	0.6039	0.5881	0.0223	2.6	0.9998	1.8004	−0.2533
0.8	0.7421	0.7721	−0.1983	2.8	0.9999	1.8321	−0.1865
1.0	0.8427	0.9461	−0.3374	3.0	1.0000	1.8487	−0.1196
1.2	0.9103	1.1080	−0.4205	3.2	1.0000	1.8514	−0.0553
1.4	0.9523	1.2562	−0.4620	3.4	1.0000	1.8419	0.0045
1.6	0.9763	1.3892	−0.4717	3.6	1.0000	1.8219	0.0580
1.8	0.9891	1.5058	−0.4568	3.8	1.0000	1.7934	0.1038
2.0	0.9953	1.6054	−0.4230	4.0	1.0000	1.7582	0.1410

Tabla A5. Distribución binomial

Función de probabilidad $f(x)$ ver (2), sección 23.6 y función de distribución $F(x)$

n	x	$p = 0.1$ $f(x)$	$p = 0.1$ $F(x)$	$p = 0.2$ $f(x)$	$p = 0.2$ $F(x)$	$p = 0.3$ $f(x)$	$p = 0.3$ $F(x)$	$p = 0.4$ $f(x)$	$p = 0.4$ $F(x)$	$p = 0.5$ $f(x)$	$p = 0.5$ $F(x)$
		0.		0.		0.		0.		0.	
1	0	9000	0.9000	8000	0.8000	7000	0.7000	6000	0.6000	5000	0.5000
	1	1000	1.0000	2000	1.0000	3000	1.0000	4000	1.0000	5000	1.0000
2	0	8100	0.8100	6400	0.6400	4900	0.4900	3600	0.3600	2500	0.2500
	1	1800	0.9900	3200	0.9600	4200	0.9100	4800	0.8400	5000	0.7500
	2	0100	1.0000	0400	1.0000	0900	1.0000	1600	1.0000	2500	1.0000
3	0	7290	0.7290	5120	0.5120	3430	0.3430	2160	0.2160	1250	0.1250
	1	2430	0.9720	3840	0.8960	4410	0.7840	4320	0.6480	3750	0.5000
	2	0270	0.9990	0960	0.9920	1890	0.9730	2880	0.9360	3750	0.8750
	3	0010	1.0000	0080	1.0000	0270	1,0000	0640	1.0000	1250	1.0000
4	0	6561	0.6561	4096	0.4096	2401	0.2401	1296	0.1296	0625	0.0625
	1	2916	0.9477	4096	0.8192	4116	0.6517	3456	0.4752	2500	0.3125
	2	0486	0.9963	1536	0.9728	2646	0.9163	3456	0.8208	3750	0.6875
	3	0036	0.9999	0256	0.9984	0756	0.9919	1536	0.9744	2500	0.9375
	4	0001	1.0000	0016	1.0000	0081	1.0000	0256	1.0000	0625	1.0000
5	0	5905	0.5905	3277	0.3277	1681	0.1681	0778	0.0778	0313	0.0313
	1	3281	0.9185	4096	0.7373	3602	0.5282	2592	0.3370	1563	0.1875
	2	0729	0.9914	2048	0.9421	3087	0.8369	3456	0.6826	3125	0.5000
	3	0081	0.9995	0512	0.9933	1323	0.9692	2304	0.9130	3125	0.8125
	4	0005	1.0000	0064	0.9997	0284	0.9976	0768	0.9898	1563	0.9688
	5	0000	1.0000	0003	1.0000	0024	1.0000	0102	1.0000	0313	1.0000
6	0	5314	0.5314	2621	0.2621	1176	0.1176	0467	0.0467	0156	0.0156
	1	3543	0.8857	3932	0.6554	3025	0.4202	1866	0.2333	0938	0.1094
	2	0984	0.9841	2458	0.9011	3241	0.7443	3110	0.5443	2344	0.3438
	3	0146	0.9987	0819	0.9830	1852	0.9295	2765	0.8208	3125	0.6563
	4	0012	0.9999	0154	0.9984	0595	0.9891	1382	0.9590	2344	0.8906
	5	0001	1.0000	0015	0.9999	0102	0.9993	0369	0.9959	0938	0.9844
	6	0000	1.0000	0001	1.0000	0007	1.0000	0041	1.0000	0156	1.0000
7	0	4783	0.4783	2097	0.2097	0824	0.0824	0280	0.0280	0078	0.0078
	1	3720	0.8503	3670	0.5767	2471	0.3294	1306	0.1586	0547	0.0625
	2	1240	0.9743	2753	0.8520	3177	0.6471	2613	0.4199	1641	0.2266
	3	0230	0.9973	1147	0.9667	2269	0.8740	2903	0.7102	2734	0.5000
	4	0026	0.9998	0287	0.9953	0972	0.9712	1935	0.9037	2734	0.7734
	5	0002	1.0000	0043	0.9996	0250	0.9962	0774	0.9812	1641	0.9375
	6	0000	1.0000	0004	1.0000	0036	0.9998	0172	0.9984	0547	0.9922
	7	0000	1.0000	0000	1.0000	0002	1.0000	0016	1.0000	0078	1.0000
8	0	4305	0.4305	1678	0.1678	0576	0.0576	0168	0.0168	0039	0.0039
	1	3826	0.8131	3355	0.5033	1977	0.2553	0896	0.1064	0313	0.0352
	2	1488	0.9619	2936	0.7969	2965	0.5518	2090	0.3154	1094	0.1445
	3	0331	0.9950	1468	0.9437	2541	0.8059	2787	0.5941	2188	0.3633
	4	0046	0.9996	0459	0.9896	1361	0.9420	2322	0.8263	2734	0.6367
	5	0004	1.0000	0092	0.9988	0467	0.9887	1239	0.9502	2188	0.8555
	6	0000	1.0000	0011	0.9999	0100	0.9987	0413	0.9915	1094	0.9648
	7	0000	1.0000	0001	1.0000	0012	0.9999	0079	0.9993	0313	0.9961
	8	0000	1.0000	0000	1.0000	0001	1.0000	0007	1.0000	0039	1.0000

Tabla A6. Distribución de Poisson

Función de probabilidad $f(x)$ ver (5), sección 23.6 y función de distribución $F(x)$

x	$\mu = 0.1$		$\mu = 0.2$		$\mu = 0.3$		$\mu = 0.4$		$\mu = 0.5$	
	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
	0.		0.		0.		0.		0.	
0	9048	0.9048	8187	0.8187	7408	0.7408	6703	0.6703	6065	0.6065
1	0905	0.9953	1637	0.9825	2222	0.9631	2681	0.9384	3033	0.9098
2	0045	0.9998	0164	0.9989	0333	0.9964	0536	0.9921	0758	0.9856
3	0002	1.0000	0011	0.9999	0033	0.9997	0072	0.9992	0126	0.9982
4	0000	1.0000	0001	1.0000	0003	1.0000	0007	0.9999	0016	0.9998
5							0001	1.0000	0002	1.0000

x	$\mu = 0.6$		$\mu = 0.7$		$\mu = 0.8$		$\mu = 0.9$		$\mu = 1$	
	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
	0.		0.		0.		0.		0.	
0	5488	0.5488	4966	0.4966	4493	0.4493	4066	0.4066	3679	0.3679
1	3293	0.8781	3476	0.8442	3595	0.8088	3659	0.7725	3679	0.7358
2	0988	0.9769	1217	0.9659	1438	0.9526	1647	0.9371	1839	0.9197
3	0198	0.9966	0284	0.9942	0383	0.9909	0494	0.9865	0613	0.9810
4	0030	0.9996	0050	0.9992	0077	0.9986	0111	0.9977	0153	0.9963
5	0004	1.0000	0007	0.9999	0012	0.9998	0020	0.9997	0031	0.9994
6			0001	1.0000	0002	1.0000	0003	1.0000	0005	0.9999
7									0001	1.0000

x	$\mu = 1.5$		$\mu = 2$		$\mu = 3$		$\mu = 4$		$\mu = 5$	
	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
	0.		0.		0.		0.		0.	
0	2231	0.2231	1353	0.1353	0498	0.0498	0183	0.0183	0067	0.0067
1	3347	0.5578	2707	0.4060	1494	0.1991	0733	0.0916	0337	0.0404
2	2510	0.8088	2707	0.6767	2240	0.4232	1465	0.2381	0842	0.1247
3	1255	0.9344	1804	0.8571	2240	0.6472	1954	0.4335	1404	0.2650
4	0471	0.9814	0902	0.9473	1680	0.8153	1954	0.6288	1755	0.4405
5	0141	0.9955	0361	0.9834	1008	0.9161	1563	0.7851	1755	0.6160
6	0035	0.9991	0120	0.9955	0504	0.9665	1042	0.8893	1462	0.7622
7	0008	0.9998	0034	0.9989	0216	0.9881	0595	0.9489	1044	0.8666
8	0001	1.0000	0009	0.9998	0081	0.9962	0298	0.9786	0653	0.9319
9			0002	1.0000	0027	0.9989	0132	0.9919	0363	0.9682
10					0008	0.9997	0053	0.9972	0181	0.9863
11					0002	0.9999	0019	0.9991	0082	0.9945
12					0001	1.0000	0006	0.9997	0034	0.9980
13							0002	0.9999	0013	0.9993
14							0001	1.0000	0005	0.9998
15									0002	0.9999
16									0000	1.0000

Tabla A7. Distribución normal

Valores de la función de distribución $\Phi(z)$ [ver (4), sección 23.7]

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
	0.		0.		0.		0.		0.		0.
0.01	5040	0.51	6950	1.01	8438	1.51	9345	2.01	9778	2.51	9940
0.02	5080	0.52	6985	1.02	8461	1.52	9357	2.02	9783	2.52	9941
0.03	5120	0.53	7019	1.03	8485	1.53	9370	2.03	9788	2.53	9943
0.04	5160	0.54	7054	1.04	8508	1.54	9382	2.04	9793	2.54	9945
0.05	5199	0.55	7088	1.05	8531	1.55	9394	2.05	9798	2.55	9946
0.06	5239	0.56	7123	1.06	8554	1.56	9406	2.06	9803	2.56	9948
0.07	5279	0.57	7157	1.07	8577	1.57	9418	2.07	9808	2.57	9949
0.08	5319	0.58	7190	1.08	8599	1.58	9429	2.08	9812	2.58	9951
0.09	5359	0.59	7224	1.09	8621	1.59	9441	2.09	9817	2.59	9952
0.10	5398	0.60	7257	1.10	8643	1.60	9452	2.10	9821	2.60	9953
0.11	5438	0.61	7291	1.11	8665	1.61	9463	2.11	9826	2.61	9955
0.12	5478	0.62	7324	1.12	8686	1.62	9474	2.12	9830	2.62	9956
0.13	5517	0.63	7357	1.13	8708	1.63	9484	2.13	9834	2.63	9957
0.14	5557	0.64	7389	1.14	8729	1.64	9495	2.14	9838	2.64	9959
0.15	5596	0.65	7422	1.15	8749	1.65	9505	2.15	9842	2.65	9960
0.16	5636	0.66	7454	1.16	8770	1.66	9515	2.16	9846	2.66	9961
0.17	5675	0.67	7486	1.17	8790	1.67	9525	2.17	9850	2.67	9962
0.18	5714	0.68	7517	1.18	8810	1.68	9535	2.18	9854	2.68	9963
0.19	5753	0.69	7549	1.19	8830	1.69	9545	2.19	9857	2.69	9964
0.20	5793	0.70	7580	1.20	8849	1.70	9554	2.20	9861	2.70	9965
0.21	5832	0.71	7611	1.21	8869	1.71	9564	2.21	9864	2.71	9966
0.22	5871	0.72	7642	1.22	8888	1.72	9573	2.22	9868	2.72	9967
0.23	5910	0.73	7673	1.23	8907	1.73	9582	2.23	9871	2.73	9968
0.24	5948	0.74	7704	1.24	8925	1.74	9591	2.24	9875	2.74	9969
0.25	5987	0.75	7734	1.25	8944	1.75	9599	2.25	9878	2.75	9970
0.26	6026	0.76	7764	1.26	8962	1.76	9608	2.26	9881	2.76	9971
0.27	6064	0.77	7794	1.27	8980	1.77	9616	2.27	9884	2.77	9972
0.28	6103	0.78	7823	1.28	8997	1.78	9625	2.28	9887	2.78	9973
0.29	6141	0.79	7852	1.29	9015	1.79	9633	2.29	9890	2.79	9974
0.30	6179	0.80	7881	1.30	9032	1.80	9641	2.30	9893	2.80	9974
0.31	6217	0.81	7910	1.31	9049	1.81	9649	2.31	9896	2.81	9975
0.32	6255	0.82	7939	1.32	9066	1.82	9656	2.32	9898	2.82	9976
0.33	6293	0.83	7967	1.33	9082	1.83	9664	2.33	9901	2.83	9977
0.34	6331	0.84	7995	1.34	9099	1.84	9671	2.34	9904	2.84	9977
0.35	6368	0.85	8023	1.35	9115	1.85	9678	2.35	9906	2.85	9978
0.36	6406	0.86	8051	1.36	9131	1.86	9686	2.36	9909	2.86	9979
0.37	6443	0.87	8078	1.37	9147	1.87	9693	2.37	9911	2.87	9979
0.38	6480	0.88	8106	1.38	9162	1.88	9699	2.38	9913	2.88	9980
0.39	6517	0.89	8133	1.39	9177	1.89	9706	2.39	9916	2.89	9981
0.40	6554	0.90	8159	1.40	9192	1.90	9713	2.40	9918	2.90	9981
0.41	6591	0.91	8186	1.41	9207	1.91	9719	2.41	9920	2.91	9982
0.42	6628	0.92	8212	1.42	9222	1.92	9726	2.42	9922	2.92	9982
0.43	6664	0.93	8238	1.43	9236	1.93	9732	2.43	9925	2.93	9983
0.44	6700	0.94	8264	1.44	9251	1.94	9738	2.44	9927	2.94	9984
0.45	6736	0.95	8289	1.45	9265	1.95	9744	2.45	9929	2.95	9984
0.46	6772	0.96	8315	1.46	9279	1.96	9750	2.46	9931	2.96	9985
0.47	6808	0.97	8340	1.47	9292	1.97	9756	2.47	9932	2.97	9985
0.48	6844	0.98	8365	1.48	9306	1.98	9761	2.48	9934	2.98	9986
0.49	6879	0.99	8389	1.49	9319	1.99	9767	2.49	9936	2.99	9986
0.50	6915	1.00	8413	1.50	9332	2.00	9772	2.50	9938	3.00	9987

Tabla A8. Distribución normal

Valores de z para valores dados de $\Phi(z)$ [ver (4), sección 23.7] y $D(z) = \Phi(z) - \Phi(-z)$

Ejemplo: $z = 0.279$ si $\Phi(z) = 61\%$; $z = 0.860$ si $D(z) = 61\%$.

%	z(Φ)	z(D)	%	z(Φ)	z(D)	%	z(Φ)	z(D)
1	−2.326	0.013	41	−0.228	0.539	81	0.878	1.311
2	−2.054	0.025	42	−0.202	0.553	82	0.915	1.341
3	−1.881	0.038	43	−0.176	0.568	83	0.954	1.372
4	−1.751	0.050	44	−0.151	0.583	84	0.994	1.405
5	−1.645	0.063	45	−0.126	0.598	85	1.036	1.440
6	−1.555	0.075	46	−0.100	0.613	86	1.080	1.476
7	−1.476	0.088	47	−0.075	0.628	87	1.126	1.514
8	−1.405	0.100	48	−0.050	0.643	88	1.175	1.555
9	−1.341	0.113	49	−0.025	0.659	89	1.227	1.598
10	−1.282	0.126	50	0.000	0.674	90	1.282	1.645
11	−1.227	0.138	51	0.025	0.690	91	1.341	1.695
12	−1.175	0.151	52	0.050	0.706	92	1.405	1.751
13	−1.126	0.164	53	0.075	0.722	93	1.476	1.812
14	−1.080	0.176	54	0.100	0.739	94	1.555	1.881
15	−1.036	0.189	55	0.126	0.755	95	1.645	1.960
16	−0.994	0.202	56	0.151	0.772	96	1.751	2.054
17	−0.954	0.215	57	0.176	0.789	97	1.881	2.170
18	−0.915	0.228	58	0.202	0.806	97.5	1.960	2.241
19	−0.878	0.240	59	0.228	0.824	98	2.054	2.326
20	−0.842	0.253	60	0.253	0.842	99	2.326	2.576
21	−0.806	0.266	61	0.279	0.860	99.1	2.366	2.612
22	−0.772	0.279	62	0.305	0.878	99.2	2.409	2.652
23	−0.739	0.292	63	0.332	0.896	99.3	2.457	2.697
24	−0.706	0.305	64	0.358	0.915	99.4	2.512	2.748
25	−0.674	0.319	65	0.385	0.935	99.5	2.576	2.807
26	−0.643	0.332	66	0.412	0.954	99.6	2.652	2.878
27	−0.613	0.345	67	0.440	0.974	99.7	2.748	2.968
28	−0.583	0.358	68	0.468	0.994	99.8	2.878	3.090
29	−0.553	0.372	69	0.496	1.015	99.9	3.090	3.291
30	−0.524	0.385	70	0.524	1.036			
31	−0.496	0.399	71	0.553	1.058	99.91	3.121	3.320
32	−0.468	0.412	72	0.583	1.080	99.92	3.156	3.353
33	−0.440	0.426	73	0.613	1.103	99.93	3.195	3.390
34	−0.412	0.440	74	0.643	1.126	99.94	3.239	3.432
35	−0.385	0.454	75	0.674	1.150	99.95	3.291	3.481
36	−0.358	0.468	76	0.706	1.175	99.96	3.353	3.540
37	−0.332	0.482	77	0.739	1.200	99.97	3.432	3.615
38	−0.305	0.496	78	0.772	1.227	99.98	3.540	3.719
39	−0.279	0.510	79	0.806	1.254	99.99	3.719	3.891
40	−0.253	0.524	80	0.842	1.282			

Tabla A9. Dígitos aleatorios

Ver la sección 24.2

Renglón No.	Columna número 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	87331	82442	28104	26432	83640	17323	68764	84728	37995	96106
1	33628	17364	01409	87803	65641	33433	48944	64299	79066	31777
2	54680	13427	72496	16967	16195	96593	55040	53729	62035	66717
3	51199	49794	49407	10774	98140	83891	37195	24066	61140	65144
4	78702	98067	61313	91661	59861	54437	77739	19892	54817	88645
5	55672	16014	24892	13089	00410	81458	76156	28189	40595	21500
6	18880	58497	03862	32368	59320	24807	63392	79793	63043	09425
7	10242	62548	62330	05703	33535	49128	66298	16193	55301	01306
8	54993	17182	94618	23228	83895	73251	68199	64639	83178	70521
9	22686	50885	16006	04041	08077	33065	35237	02502	94755	72062
10	42349	03145	15770	70665	53291	32288	41568	66079	98705	31029
11	18093	09553	39428	75464	71329	86344	80729	40916	18860	51780
12	11535	03924	84252	74795	40193	84597	42497	21918	91384	84721
13	35066	73848	65351	53270	67341	70177	92373	17604	42204	60476
14	57477	22809	73558	96182	96779	01604	25748	59553	64876	94611
15	48647	33850	52956	45410	88212	05120	99391	32276	55961	41775
16	86857	81154	22223	74950	53296	67767	55866	49061	66937	81818
17	20182	36907	94644	99122	09774	29189	27212	79000	50217	71077
18	83687	31231	01133	41432	54542	60204	81618	09586	34481	87683
19	81315	12390	46074	47810	90171	36313	95440	77583	28506	38808
20	87026	52826	58341	76549	04105	66191	12914	55348	07907	06978
21	34301	76733	07251	90524	21931	83695	41340	53581	64582	60210
22	70734	24337	32674	49508	49751	90489	63202	24380	77943	09942
23	94710	31527	73445	32839	68176	53580	85250	53243	03350	00128
24	76462	16987	07775	43162	11777	16810	75158	13894	88945	15539
25	14348	28403	79245	69023	34196	46398	05964	64715	11330	17515
26	74618	89317	30146	25606	94507	98104	04239	44973	37636	88866
27	99442	19200	85406	45358	86253	60638	38858	44964	54103	57287
28	26869	44399	89452	06652	31271	00647	46551	83050	92058	83814
29	80988	08149	50499	98584	28385	63680	44638	91864	96002	87802
30	07511	79047	89289	17774	67194	37362	85684	55505	97809	67056
31	49779	12138	05048	03535	27502	63308	10218	53296	48687	61340
32	47938	55945	24003	19635	17471	65997	85906	98694	56420	78357
33	15604	06626	14360	79542	13512	87595	08542	03800	35443	52823
34	12307	27726	21864	00045	16075	03770	86978	52718	02693	09096
35	02450	28053	66134	99445	91316	25727	89399	85272	67148	78358
36	57623	54382	35236	89244	27245	90500	75430	96762	71968	65838
37	91762	78849	93105	40481	99431	03304	21079	86459	21287	76566
38	87373	31137	31128	67050	34309	44914	80711	61738	61498	24288
39	67094	41485	54149	86088	10192	21174	39948	67268	29938	32476
40	94456	66747	76922	87627	71834	57688	04878	78348	68970	60048
41	68359	75292	27710	86889	81678	79798	58360	39175	75667	65782
42	52393	31404	32584	06837	79762	13168	76055	54833	22841	98889
43	59565	91254	11847	20672	37625	41454	86861	55824	79793	74575
44	48185	11066	20162	38230	16043	48409	47421	21195	98008	57305
45	19230	12187	86659	12971	52204	76546	63272	19312	81662	96557
46	84327	21942	81727	68735	89190	58491	55329	96875	19465	89687
47	77430	71210	00591	50124	12030	50280	12358	76174	48353	09682
48	12462	19108	70512	53926	25595	97085	03833	59806	12351	64253
49	11684	06644	57816	10078	45021	47751	38285	73520	08434	65627

Tabla A9. Dígitos aleatorios (*continuación*)

Renglón No.	Columna número 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	12896	36576	68686	08462	65652	76571	70891	09007	04581	01684
51	59090	05111	27587	90349	30789	50304	70650	06646	70126	15284
52	42486	67483	65282	19037	80588	73076	41820	46651	40442	40718
53	88662	03928	03249	85910	97533	88643	29829	21557	47328	36724
54	69403	03626	92678	53460	15465	83516	54012	80509	55976	46115
55	56434	70543	38696	98502	32092	95505	62091	39549	30117	98209
56	58227	62694	42837	29183	11393	68463	25150	86338	95620	39836
57	41272	94927	15413	40505	33123	63218	72940	98349	57249	40170
58	36819	01162	30425	15546	16065	68459	35776	64276	92868	07372
59	31700	66711	26115	55755	33584	18091	38709	57276	74660	90392
60	69855	63699	36839	90531	97125	87875	62824	03889	12538	24740
61	44322	17569	45439	41455	34324	90902	07978	26268	04279	76816
62	62226	36661	87011	66267	78777	78044	40819	49496	39814	73867
63	27284	19737	98741	72531	52741	26699	98755	19657	08665	16818
64	88341	21652	94743	77268	79525	44769	66583	30621	90534	62050
65	53266	18783	51903	56711	38060	69513	61963	80470	88018	86510
66	50527	49330	24839	42529	03944	95219	88724	37247	84166	23023
67	15655	07852	77206	35944	71446	30573	19405	57824	23576	23301
68	62057	22206	03314	83465	57466	10465	19891	32308	01900	67484
69	41769	56091	19892	96253	92808	45785	52774	49674	68103	65032
70	25993	72416	44473	41299	93095	17338	69802	98548	02429	85238
71	22842	57871	04470	37373	34516	04042	04078	35336	34393	97573
72	55704	31982	05234	22664	22181	40358	28089	15790	33340	18852
73	94258	18706	09437	96041	90052	80862	20420	24323	11635	91677
74	74145	20453	29657	98868	56695	53483	87449	35060	98942	62697
75	88881	12673	73961	89884	73247	97670	69570	88888	58560	72580
76	01508	56780	52223	35632	73347	71317	46541	88023	36656	76332
77	92069	43000	23233	06058	82527	25250	27555	20426	60361	63525
78	53366	35249	02117	68620	39388	69795	73215	01846	16983	78560
79	88057	54097	49511	74867	32192	90071	04147	46094	63519	07199
80	85492	82238	02668	91854	86149	28590	77853	81035	45561	16032
81	39453	62123	69611	53017	34964	09786	24614	49514	01056	18700
82	82627	98111	93870	56969	69566	62662	07353	84838	14570	14508
83	61142	51743	38209	31474	96095	15163	54380	77849	20465	03142
84	12031	32528	61311	53730	89032	16124	58844	35386	45521	59368
85	31313	59838	29147	76882	74328	09955	63673	96651	53264	29871
86	50767	41056	97409	44376	62219	35439	70102	99248	71179	26052
87	30522	95699	84966	26554	24768	72247	84993	85375	92518	16334
88	74176	19870	89874	64799	03792	57006	57225	36677	46825	14087
89	17114	93248	37065	91346	04657	93763	92210	43676	44944	75798
90	53005	11825	64608	87587	05742	31914	55044	41818	29667	77424
91	31985	81539	79942	49471	46200	27639	94099	42085	79231	03932
92	63499	60508	77522	15624	15088	78519	52279	79214	43623	69166
93	30506	42444	99047	66010	91657	37160	37408	85714	21420	80996
94	78248	16841	92357	10130	68990	38307	61022	56806	81016	38511
95	64996	84789	50185	32200	64382	29752	11876	00664	54547	62597
96	11963	13157	09136	01769	30117	71486	80111	09161	08371	71749
97	44335	91450	43456	90449	18338	19787	31339	60473	06606	89788
98	42277	11868	44520	01113	11341	11743	97949	49718	99176	42006
99	77562	18863	58515	90166	78508	14864	19111	57183	85808	59385

Tabla A10. Distribución *t*

Valores de z para valores dados de la función de distribución $F(z)$ (ver la página 728)
Ejemplo: Para 9 grados de libertad, $z = 1.83$ cuando $F(z) = 0.95$.

$F(z)$	Número de grados de libertad 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.6	0.33	0.29	0.28	0.27	0.27	0.27	0.26	0.26	0.26	0.26
0.7	0.73	0.62	0.58	0.57	0.56	0.55	0.55	0.55	0.54	0.54
0.8	1.38	1.06	0.98	0.94	0.92	0.91	0.90	0.89	0.88	0.88
0.9	3.08	1.89	1.64	1.53	1.48	1.44	1.42	1.40	1.38	1.37
0.95	6.31	2.92	2.35	2.13	2.02	1.94	1.90	1.86	1.83	1.81
0.975	12.7	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.37	2.31	2.26	2.23
0.99	31.8	6.97	4.54	3.75	3.37	3.14	3.00	2.90	2.82	2.76
0.995	63.7	9.93	5.84	4.60	4.03	3.71	3.50	3.36	3.25	3.17
0.999	318.3	22.3	10.2	7.17	5.89	5.21	4.79	4.50	4.30	4.14

$F(z)$	Número de grados de libertad 11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.6	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26
0.7	0.54	0.54	0.54	0.54	0.54	0.54	0.53	0.53	0.53	0.53
0.8	0.88	0.87	0.87	0.87	0.87	0.87	0.86	0.86	0.86	0.86
0.9	1.36	1.36	1.35	1.35	1.34	1.34	1.33	1.33	1.33	1.33
0.95	1.80	1.78	1.77	1.76	1.75	1.75	1.74	1.73	1.73	1.73
0.975	2.20	2.18	2.16	2.15	2.13	2.12	2.11	2.10	2.09	2.09
0.99	2.72	2.68	2.65	2.62	2.60	2.58	2.57	2.55	2.54	2.53
0.995	3.11	3.06	3.01	2.98	2.95	2.92	2.90	2.88	2.86	2.85
0.999	4.03	3.93	3.85	3.79	3.73	3.69	3.65	3.61	3.58	3.55

$F(z)$	Número de grados de libertad 22	24	26	28	30	40	50	100	200	∞
0.5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.6	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.25	0.25	0.25
0.7	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.52
0.8	0.86	0.86	0.86	0.86	0.85	0.85	0.85	0.85	0.84	0.84
0.9	1.32	1.32	1.32	1.31	1.31	1.30	1.30	1.29	1.29	1.28
0.95	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.68	1.68	1.66	1.65	1.65
0.975	2.07	2.06	2.06	2.05	2.04	2.02	2.01	1.98	1.97	1.96
0.99	2.51	2.49	2.48	2.47	2.46	2.42	2.40	2.37	2.35	2.33
0.995	2.82	2.80	2.78	2.76	2.75	2.70	2.68	2.63	2.60	2.58
0.999	3.51	3.47	3.44	3.41	3.39	3.31	3.26	3.17	3.13	3.09

Tabla A11. Distribución ji cuadrada

Valores de z para valores dados de la función de distribución $F(z)$ (ver la página 730)
Ejemplo: Para 3 grados de libertad, $z = 11.34$ cuando $F(z) = 0.99$.

$F(z)$	Número de grados de libertad									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.005	0.00	0.01	0.07	0.21	0.41	0.68	0.99	1.34	1.73	2.16
0.01	0.00	0.02	0.11	0.30	0.55	0.87	1.24	1.65	2.09	2.56
0.025	0.00	0.05	0.22	0.48	0.83	1.24	1.69	2.18	2.70	3.25
0.05	0.00	0.10	0.35	0.71	1.15	1.64	2.17	2.73	3.33	3.94
0.95	3.84	5.99	7.81	9.49	11.07	12.59	14.07	15.51	16.92	18.31
0.975	5.02	7.38	9.35	11.14	12.83	14.45	16.01	17.53	19.02	20.48
0.99	6.63	9.21	11.34	13.28	15.09	16.81	18.48	20.09	21.67	23.21
0.995	7.88	10.60	12.84	14.86	16.75	18.55	20.28	21.96	23.59	25.19

$F(z)$	Número de grados de libertad									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.005	2.60	3.07	3.57	4.07	4.60	5.14	5.70	6.26	6.84	7.43
0.01	3.05	3.57	4.11	4.66	5.23	5.81	6.41	7.01	7.63	8.26
0.025	3.82	4.40	5.01	5.63	6.26	6.91	7.56	8.23	8.91	9.59
0.05	4.57	5.23	5.89	6.57	7.26	7.96	8.67	9.39	10.12	10.85
0.95	19.68	21.03	22.36	23.68	25.00	26.30	27.59	28.87	30.14	31.41
0.975	21.92	23.34	24.74	26.12	27.49	28.85	30.19	31.53	32.85	34.17
0.99	24.73	26.22	27.69	29.14	30.58	32.00	33.41	34.81	36.19	37.57
0.995	26.76	28.30	29.82	31.32	32.80	34.27	35.72	37.16	38.58	40.00

$F(z)$	Número de grados de libertad									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0.005	8.0	8.6	9.3	9.9	10.5	11.2	11.8	12.5	13.1	13.8
0.01	8.9	9.5	10.2	10.9	11.5	12.2	12.9	13.6	14.3	15.0
0.025	10.3	11.0	11.7	12.4	13.1	13.8	14.6	15.3	16.0	16.8
0.05	11.6	12.3	13.1	13.8	14.6	15.4	16.2	16.9	17.7	18.5
0.95	32.7	33.9	35.2	36.4	37.7	38.9	40.1	41.3	42.6	43.8
0.975	35.5	36.8	38.1	39.4	40.6	41.9	43.2	44.5	45.7	47.0
0.99	38.9	40.3	41.6	43.0	44.3	45.6	47.0	48.3	49.6	50.9
0.995	41.4	42.8	44.2	45.6	46.9	48.3	49.6	51.0	52.3	53.7

$F(z)$	Número de grados de libertad							
	40	50	60	70	80	90	100	>100 (Aproximación)
0.005	20.7	28.0	35.5	43.3	51.2	59.2	67.3	$\frac{1}{2}(h - 2.58)^2$
0.01	22.2	29.7	37.5	45.4	53.5	61.8	70.1	$\frac{1}{2}(h - 2.33)^2$
0.025	24.4	32.4	40.5	48.8	57.2	65.6	74.2	$\frac{1}{2}(h - 1.96)^2$
0.05	26.5	34.8	43.2	51.7	60.4	69.1	77.9	$\frac{1}{2}(h - 1.64)^2$
0.95	55.8	67.5	79.1	90.5	101.9	113.1	124.3	$\frac{1}{2}(h + 1.64)^2$
0.975	59.3	71.4	83.3	95.0	106.6	118.1	129.6	$\frac{1}{2}(h + 1.96)^2$
0.99	63.7	76.2	88.4	100.4	112.3	124.1	135.8	$\frac{1}{2}(h + 2.33)^2$
0.995	66.8	79.5	92.0	104.2	116.3	128.3	140.2	$\frac{1}{2}(h + 2.58)^2$

En la ultima columna, $h = \sqrt{2m - 1}$, en donde m es el número de grados de libertad.

Tabla A12. Distribución *F* con (*m*, *n*) grados de libertad

Valores de z para los cuales la función de distribución $F(z)$ [ver (13), sección 24.7] tiene el valor **0.95**
Ejemplo: Para (7, 4) grados de libertad, $z = 6.09$ si $F(z) = 0.95$.

n	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$	$m = 8$	$m = 9$
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
32	4.15	3.30	2.90	2.67	2.51	2.40	2.31	2.24	2.19
34	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.29	2.23	2.17
36	4.11	3.26	2.87	2.63	2.48	2.36	2.28	2.21	2.15
38	4.10	3.24	2.85	2.62	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00
90	3.95	3.10	2.71	2.47	2.32	2.20	2.11	2.04	1.99
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97
150	3.90	3.06	2.66	2.43	2.27	2.16	2.07	2.00	1.94
200	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93
1000	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88

Tabla A12. Distribución F con (m, n) grados de libertad (*continuación*)

Valores de z para los cuales la función de distribución $F(z)$ [ver (13), sección 24.7] tiene el valor **0.95**

n	$m = 10$	$m = 15$	$m = 20$	$m = 30$	$m = 40$	$m = 50$	$m = 100$	∞
1	242	246	248	250	251	252	253	254
2	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	8.79	8.70	8.66	8.62	8.59	8.58	8.55	8.53
4	5.96	5.86	5.80	5.75	5.72	5.70	5.66	5.63
5	4.74	4.62	4.56	4.50	4.46	4.44	4.41	4.37
6	4.06	3.94	3.87	3.81	3.77	3.75	3.71	3.67
7	3.64	3.51	3.44	3.38	3.34	3.32	3.27	3.23
8	3.35	3.22	3.15	3.08	3.04	3.02	2.97	2.93
9	3.14	3.01	2.94	2.86	2.83	2.80	2.76	2.71
10	2.98	2.85	2.77	2.70	2.66	2.64	2.59	2.54
11	2.85	2.72	2.65	2.57	2.53	2.51	2.46	2.40
12	2.75	2.62	2.54	2.47	2.43	2.40	2.35	2.30
13	2.67	2.53	2.46	2.38	2.34	2.31	2.26	2.21
14	2.60	2.46	2.39	2.31	2.27	2.24	2.19	2.13
15	2.54	2.40	2.33	2.25	2.20	2.18	2.12	2.07
16	2.49	2.35	2.28	2.19	2.15	2.12	2.07	2.01
17	2.45	2.31	2.23	2.15	2.10	2.08	2.02	1.96
18	2.41	2.27	2.19	2.11	2.06	2.04	1.98	1.92
19	2.38	2.23	2.16	2.07	2.03	2.00	1.94	1.88
20	2.35	2.20	2.12	2.04	1.99	1.97	1.91	1.84
22	2.30	2.15	2.07	1.98	1.94	1.91	1.85	1.78
24	2.25	2.11	2.03	1.94	1.89	1.86	1.80	1.73
26	2.22	2.07	1.99	1.90	1.85	1.82	1.76	1.69
28	2.19	2.04	1.96	1.87	1.82	1.79	1.73	1.65
30	2.16	2.01	1.93	1.84	1.79	1.76	1.70	1.62
32	2.14	1.99	1.91	1.82	1.77	1.74	1.67	1.59
34	2.12	1.97	1.89	1.80	1.75	1.71	1.65	1.57
36	2.11	1.95	1.87	1.78	1.73	1.69	1.62	1.55
38	2.09	1.94	1.85	1.76	1.71	1.68	1.61	1.53
40	2.08	1.92	1.84	1.74	1.69	1.66	1.59	1.51
50	2.03	1.87	1.78	1.69	1.63	1.60	1.52	1.44
60	1.99	1.84	1.75	1.65	1.59	1.56	1.48	1.39
70	1.97	1.81	1.72	1.62	1.57	1.53	1.45	1.35
80	1.95	1.79	1.70	1.60	1.54	1.51	1.43	1.32
90	1.94	1.78	1.69	1.59	1.53	1.49	1.41	1.30
100	1.93	1.77	1.68	1.57	1.52	1.48	1.39	1.28
150	1.89	1.73	1.64	1.53	1.48	1.44	1.34	1.22
200	1.88	1.72	1.62	1.52	1.46	1.41	1.32	1.19
1000	1.84	1.68	1.58	1.47	1.41	1.36	1.26	1.08
∞	1.83	1.67	1.57	1.46	1.39	1.35	1.24	1.00

Tabla A12. Distribución F con (m, n) grados de libertad (*continuación*)

Valores de z para los cuales la función de distribución $F(z)$ [ver (13), sección 24.7] tiene el valor **0.99**

n	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$	$m = 8$	$m = 9$
1	4052.	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022
2	98.5	99.0	99.2	99.3	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07
32	7.50	5.34	4.46	3.97	3.65	3.43	3.26	3.13	3.02
34	7.44	5.29	4.42	3.93	3.61	3.39	3.22	3.09	2.98
36	7.40	5.25	4.38	3.89	3.57	3.35	3.18	3.05	2.95
38	7.35	5.21	4.34	3.86	3.54	3.32	3.15	3.02	2.92
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.79
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72
70	7.01	4.92	4.08	3.60	3.29	3.07	2.91	2.78	2.67
80	6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.64
90	6.93	4.85	4.01	3.54	3.23	3.01	2.84	2.72	2.61
100	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59
150	6.81	4.75	3.92	3.45	3.14	2.92	2.76	2.63	2.53
200	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50
1000	6.66	4.63	3.80	3.34	3.04	2.82	2.66	2.53	2.43
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41

Tabla A12. Distribución *F* con (*m*, *n*) grados de libertad (*continuación*)

Valores de z para los cuales la función de distribución $F(z)$ [ver (13), sección 24.7] tiene el valor **0.99**

n	$m = 10$	$m = 15$	$m = 20$	$m = 30$	$m = 40$	$m = 50$	$m = 100$	∞
1	6056	6157	6209	6261	6287	6300	6330	6366
2	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	27.2	26.9	26.7	26.5	26.4	26.4	26.2	26.1
4	14.5	14.2	14.0	13.8	13.7	13.7	13.6	13.5
5	10.1	9.72	9.55	9.38	9.29	9.24	9.13	9.02
6	7.87	7.56	7.40	7.23	7.14	7.09	6.99	6.88
7	6.62	6.31	6.16	5.99	5.91	5.86	5.75	5.65
8	5.81	5.52	5.36	5.20	5.12	5.07	4.96	4.86
9	5.26	4.96	4.81	4.65	4.57	4.52	4.42	4.31
10	4.85	4.56	4.41	4.25	4.17	4.12	4.01	3.91
11	4.54	4.25	4.10	3.94	3.86	3.81	3.71	3.60
12	4.30	4.01	3.86	3.70	3.62	3.57	3.47	3.36
13	4.10	3.82	3.66	3.51	3.43	3.38	3.27	3.17
14	3.94	3.66	3.51	3.35	3.27	3.22	3.11	3.00
15	3.80	3.52	3.37	3.21	3.13	3.08	2.98	2.87
16	3.69	3.41	3.26	3.10	3.02	2.97	2.86	2.75
17	3.59	3.31	3.16	3.00	2.92	2.87	2.76	2.65
18	3.51	3.23	3.08	2.92	2.84	2.78	2.68	2.57
19	3.43	3.15	3.00	2.84	2.76	2.71	2.60	2.49
20	3.37	3.09	2.94	2.78	2.69	2.64	2.54	2.42
22	3.26	2.98	2.83	2.67	2.58	2.53	2.42	2.31
24	3.17	2.89	2.74	2.58	2.49	2.44	2.33	2.21
26	3.09	2.82	2.66	2.50	2.42	2.36	2.25	2.13
28	3.03	2.75	2.60	2.44	2.35	2.30	2.19	2.06
30	2.98	2.70	2.55	2.39	2.30	2.25	2.13	2.01
32	2.93	2.66	2.50	2.34	2.25	2.20	2.08	1.96
34	2.89	2.62	2.46	2.30	2.21	2.16	2.04	1.91
36	2.86	2.58	2.43	2.26	2.17	2.12	2.00	1.87
38	2.83	2.55	2.40	2.23	2.14	2.09	1.97	1.84
40	2.80	2.52	2.37	2.20	2.11	2.06	1.94	1.80
50	2.70	2.42	2.27	2.10	2.01	1.95	1.82	1.68
60	2.63	2.35	2.20	2.03	1.94	1.88	1.75	1.60
70	2.59	2.31	2.15	1.98	1.89	1.83	1.70	1.54
80	2.55	2.27	2.12	1.94	1.85	1.79	1.66	1.49
90	2.52	2.24	2.09	1.92	1.82	1.76	1.62	1.46
100	2.50	2.22	2.07	1.89	1.80	1.73	1.60	1.43
150	2.44	2.16	2.00	1.83	1.73	1.66	1.52	1.33
200	2.41	2.13	1.97	1.79	1.69	1.63	1.48	1.28
1000	2.34	2.06	1.90	1.72	1.61	1.54	1.38	1.11
∞	2.32	2.04	1.88	1.70	1.59	1.52	1.36	1.00

Tabla A13. Función de distribución $F(x) = P(T \le x)$ de la variable aleatoria *T* en la sección 24.11

Si $n = 3$, entonces $F(2) = 1 - 0.167 = 0.833$.
Si $n = 4$, entonces $F(3) = 1 - 0.375 = 0.625$, $F(4) = 1 - 0.167 = 0.833$, etc.

x	$n = 3$
	0.
0	167
1	500

x	$n = 4$
	0.
0	042
1	167
2	375

x	$n = 5$
	0.
0	008
1	042
2	117
3	242
4	408

x	$n = 6$
	0.
0	001
1	008
2	028
3	068
4	136
5	235
6	360
7	500

x	$n = 7$
	0.
1	001
2	005
3	015
4	035
5	068
6	119
7	191
8	281
9	386
10	500

x	$n = 8$
	0.
2	001
3	003
4	007
5	016
6	031
7	054
8	089
9	138
10	199
11	274
12	360
13	452

x	$n = 9$
	0.
4	001
5	003
6	006
7	012
8	022
9	038
10	060
11	090
12	130
13	179
14	238
15	306
16	381
17	460

x	$n = 10$
	0.
6	001
7	002
8	005
9	008
10	014
11	023
12	036
13	054
14	078
15	108
16	146
17	190
18	242
19	300
20	364
21	431
22	500

x	$n = 11$
	0.
8	001
9	002
10	003
11	005
12	008
13	013
14	020
15	030
16	043
17	060
18	082
19	109
20	141
21	179
22	223
23	271
24	324
25	381
26	440
27	500

x	$n = 20$
	0.
50	001
51	002
52	002
53	003
54	004
55	005
56	006
57	007
58	008
59	010
60	012
61	014
62	017
63	020
64	023
65	027
66	032
67	037
68	043
69	049
70	056
71	064
72	073
73	082
74	093
75	104
76	117
77	130
78	144
79	159
80	176
81	193
82	211
83	230
84	250
85	271
86	293
87	315
88	339
89	362
90	387
91	411
92	436
93	462
94	487

x	$n = 19$
	0.
43	001
44	002
45	002
46	003
47	003
48	004
49	005
50	006
51	008
52	010
53	012
54	014
55	017
56	021
57	025
58	029
59	034
60	040
61	047
62	054
63	062
64	072
65	082
66	093
67	105
68	119
69	133
70	149
71	166
72	184
73	203
74	223
75	245
76	267
77	290
78	314
79	339
80	365
81	391
82	418
83	445
84	473
85	500

x	$n = 18$
	0.
38	001
39	002
40	003
41	003
42	004
43	005
44	007
45	009
46	011
47	013
48	016
49	020
50	024
51	029
52	034
53	041
54	048
55	056
56	066
57	076
58	088
59	100
60	115
61	130
62	147
63	165
64	184
65	205
66	227
67	250
68	275
69	300
70	327
71	354
72	383
73	411
74	441
75	470
76	500

x	$n = 17$
	0.
32	001
33	002
34	002
35	003
36	004
37	005
38	007
39	009
40	011
41	014
42	017
43	021
44	026
45	032
46	038
47	046
48	054
49	064
50	076
51	088
52	102
53	118
54	135
55	154
56	174
57	196
58	220
59	245
60	271
61	299
62	328
63	358
64	388
65	420
66	452
67	484

x	$n = 16$
	0.
27	001
28	002
29	002
30	003
31	004
32	006
33	008
34	010
35	013
36	016
37	021
38	026
39	032
40	039
41	048
42	058
43	070
44	083
45	097
46	114
47	133
48	153
49	175
50	199
51	225
52	253
53	282
54	313
55	345
56	378
57	412
58	447
59	482

x	$n = 15$
	0.
23	001
24	002
25	003
26	004
27	006
28	008
29	010
30	014
31	018
32	023
33	029
34	037
35	046
36	057
37	070
38	084
39	101
40	120
41	141
42	164
43	190
44	218
45	248
46	279
47	313
48	349
49	385
50	423
51	461
52	500

x	$n = 14$
	0.
18	001
19	002
20	002
21	003
22	005
23	007
24	010
25	013
26	018
27	024
28	031
29	040
30	051
31	063
32	079
33	096
34	117
35	140
36	165
37	194
38	225
39	259
40	295
41	334
42	374
43	415
44	457
45	500

x	$n = 13$
	0.
14	001
15	001
16	002
17	003
18	005
19	007
20	011
21	015
22	021
23	029
24	038
25	050
26	064
27	082
28	102
29	126
30	153
31	184
32	218
33	255
34	295
35	338
36	383
37	429
38	476

x	$n = 12$
	0.
11	001
12	002
13	003
14	004
15	007
16	010
17	016
18	022
19	031
20	043
21	058
22	076
23	098
24	125
25	155
26	190
27	230
28	273
29	319
30	369
31	420
32	473

Índice

A

Absoluta
convergencia, *257*
frecuencia, *712*
Aceleración centrípeta, 517
Aceleración de Coriolis, 518
Aceleración normal, 518
Aceleración tangencial, 518
Aceleración, 516
Acumulada
frecuencia relativa, *714*
función de distribución, *667*
Adición de
matrices, 374
medias, *699*
números complejos, *173*
series de potencias, 271
variables aleatorias normales, *731*
variancias, *701*
vectores, 374, 399, 462, 481
Adición de matrices, 370, 371
Adición de vectores, 374, 399, 462, 481
Agrupamiento, *716*
Ajuste de curvas, *486*
Alfabeto griego: Contraportada
Algoritmo, *402*
codicioso, *616*
de Dijkstra, *613*
de Ford-Fulkerson, *631*
de Kruskal, *616*
de Moore, *607*
de Prim, *620*
eficiente, *609*
estable, *403*
inestable, *403*
polinómicamente acotado, *609*
Algoritmo codicioso, *617*
Algoritmo de Dijkstra, *613*
Algoritmo de Ford-Fulkerson, *631*
Algoritmo de Kruskal, *617*
Algoritmo de Moore de la trayectoria más corta, *607*
Algoritmo de Prim, *620*
Algoritmo eficiente, *609*
Alternante
método implícito de la dirección, *551*
trayectoria, *636*
Amortiguamiento crítico, 109
Amortiguamiento, 109, 140
Ampère, 29
Análisis de correlación, *765*
Analítica en el infinito, *306*
Analogías electromecánicas, 145
Ángulo
entre curvas, 24
entre vectores, 487
Ángulo de fase, 142
Anticonmutativa, 496
Antihermitiana, 447, 451
Apareamiento máximo, *636*
Apareamiento, *636*
Aproximación
por mínimos cuadrados, *594*, *765*
trigonométrica, *53*
Árbol, *615*
Árbol de expansión más corto, *616*
Árbol de expansión, *616*
Arco de una curva, 510
Arco tangente, *210*
Área, 571, 580, 594, 595
Argumento, *177*
Armónica conjugada, *197*
Artículo defectuoso, *753*
Asintóticamente normal, 734
Asintóticamente
estable, 210
igual, *691*
normal, *734*
Astroide, 60
Atractivo, 210
Atraso en fase, 142
Autoinicio, *536*
Axioma de Cantor-Dedekind, 668, *826*
Axiomas de probabilidad, *655*

B

Base, 91, 159, 197, 400, 456
Base normal o estándar, 467

Bellman
- ecuaciones de, *612*
- principio de optimalidad de, *612*

Bernoulli
- distribución de, *612*
- ecuación de, 57
- ley de los grandes números de, *692*
- números de, *284*

Bessel, 260
- desigualdad de, 291, *55*
- ecuación de, 260, *140*
- funciones de, 262, 272, 276, 277, 284, *140*
- tablas de las funciones de, 687, *837*

Bien acondicionado, *479*

Binomiales
- coeficientes, *427*, *664*
- series, *282*

Binormal, 522

Bipartita
- apareamiento, *635*
- gráfica, *635*

Bit, *402*

Bondad del ajuste, *728*

Bonnet, 249

Borde hacia adelante, *625*

Bordes, 599
- lista de incidencia de, *602*

Bosque, *620*

C

Cable, 93, *155*

Cable colgante, 93

Caída de tensión (voltaje), 61

Caída libre, 24, 31

Cálculo operacional, 104, 299

Calidad saliente promedio, *756*

Camino, *605*

Campo
- conservativo, 531, 539, 564
- de fuerzas, 504
- de velocidades, 503
- escalar, 502
- gravitacional, 504, 531, *146*
- irrotacional, 539, *381*
- vectorial, 75

Campo direccional, 73

Campo vectorial, 502

Capacidad
- de un borde, *624*
- de un conjunto de corte, *626*

Capacitancia, *109*

Capacitor, 62

Característica, *401*

Característica de operación, *740*

Cardano, *171*

Cardioide, 516, 581

Catenaria, 94, 515

Catenoide, 588

Cauchy, 115
- desigualdad de, *248*
- determinante de, 167
- fórmula de la integral de, *240*
- –Goursat, teorema de, *231*
- –Hadamard, fórmula de, *267*
- método del descenso más pronunciado, *579*
- principio de convergencia de, *257*
- producto de, *271*
- –Riemann, ecuaciones de, 72, *193*, *196*
- teorema de la integral de, *232*
- valor principal de, *321*, *327*

Cayley, *348*
- teorema de, *643*
- transformación de, *348*

Centrales
- diferencias, *430*
- momentos, *677*

Centro, 202
- de una gráfica, *623*
- de gravedad, 572, 598
- de una serie de potencias, 233

Cero de una función analítica, *304*

Ciclo, *605*

Ciclo hamiltoniano, *606*

Cicloide, 520, 583

Circuito, 61, 143, 322, 328, 354
- en una gráfica, *615*

Circuito eléctrico (*véase* Circuito)

Circuito LC, 148

Circuito *RC*, 65

Circuito *RL*, 63

Circuito *RLC*, 144

Circulación, 617, *381*, *384*

Circular
- disco, *183*
- hélice, 510, 514, 522
- membrana, *138-144*

Círculo de convergencia, *265*

Círculo unitario, *182*

Circunferencia, 431, *189*

Clase (en estadística), *717*

Cociente de números complejos, *174*

Codificación, *721*

Coeficientes de
- un sistema de ecuaciones, 389
- una ecuación diferencial, 88
- una serie de Fourier, *29*, *48*
- una serie de potencias, 236, *263*

Coeficientes indeterminados, 129, 173, 220

Cofactor, 418

Coloreado, *641*

Columna, 371, 418
- de la suma de las normas, *475*
- espacio, 402
- vector, 371, 372

Combinación, *663*

Comparación pareada, *744*

Complejidad, *608*

Complemento, *186*, *650*

Completo
- apareamiento, *636*
- conjunto ortonormal, 289

Componente, 372, 480, 488

Condición de Lipschitz, 80

Condición inicial, 28, 92, 120, *93*

Condicionalmente convergente, *257*

Conducción del calor, 608, *373*

Conductividad térmica, 608, *107*

CONF, *726*

Confianza
- intervalo de, *726*, *768*
- límites de, *726*
- nivel de, *726*

Conjunto abierto de puntos, 524, *186*

Conjunto conexo, 524, *186*

Conjunto de corte, *627*

Conjunto de puntos, *186*

Conjunto de puntos cerrado, *186*

Conjunto vacío, *650*

Conservativa(o), 531, 539, 564, 565

Constante capacitiva de tiempo, 65

Constante inductiva de tiempo, 63

Conteo de operaciones, *462*

Continua por secciones, 304

Continua
- distribución, *671*, *694*
- variable aleatoria, *671*, *694*

Continuidad
- de una función compleja, *188*
- de una función vectorial, 505
- ecuación de, 536
- por secciones, 304

Contracción, *340*, *410*

Control de calidad, *747*

Control
- diagrama de, *748*
- límite de, *748*
- variables de, *578*

Convergencia eficaz (cuadrática media), 290

Convergencia media, 290

Convergencia uniforme, *285*

Convergencia
- absoluta, *257*
- círculo de, *266*
- condicional, *257*
- de un proceso iterativo, *410*
- de una serie, 237, *256*
- de una sucesión, 504, *254*
- eficaz (cuadrática media), 290
- en norma, 290
- intervalo de, 237
- media, 290
- principio de, *257*
- pruebas de, *257-262*
- radio de, 238
- uniforme, *286*

Convolución, 333, *76*

Coordenadas
- cartesianas, 479, *174*
- cilíndricas, 540, *147*
- curvilíneas, 541
- esféricas, 540, *148*
- polares, 574, 580, *135*, *177*

Coordenadas cartesianas, 479, *174*

Coordenadas cilíndricas, 540, *147*

Coordenadas curvilíneas, 542

Coordenadas esféricas, 540, *148*

Coordenadas ortogonales, 542

Coordenadas polares, 574, 580, *135*, *177*

Corona, *183*

Correcciones sucesivas, *476*

Corrector, *526*

Cosecante, *202*, 661, *819*

Coseno
- de una variable compleja, *202*, *279*, *353*
- de una variable real, 659, *871*
- hiperbólico, *204*, 661, *819*
- integral del, 665, *823*, 688, *838*

Cotangente, *202*

Coulomb, 61
- ley de, 532

Covariancia, *700*, *767*

Criterio de terminación, *413*

CSP, LCSP, *756*

Cuadrática
- ecuación, *406*

forma, 450
interpolación, *421*
Cuartil medio, *721*
Cuartil, *720*
Cuasilineal, *545*
Cubierta, *641*
Cuerda, 42, *90*, *156*
Cuerpo que cae, 24, 30
Curva, 508
longitud de arco de una, 513
orientación de una, 509
rectificable, 513
simple, 510
suave, 554, *220*
suave por secciones, 554, *221*
Curva acampanada, 34, *686*
Curva alabeada, 510
Curva CO, *740*
Curva plana, 510
Curva rectificable, 513
Curva suave, 554, *220*, *337*
Curvas ortogonales, 67
Curvatura, 521

D

Dado legal, *653*
Dantzig, *586*
De Moivre, *180*
fórmula de, *180*
teorema del límite de, *691*
Decaimiento, 115
Decremento, 28, 41
Decremento logarítmico, 115
Dedekind, 668, *826*
Definitividad, 454
Deflación, *503*
Deflación de Hotelling, *506*
Deformación de la trayectoria, *235*
Delta
de Dirac, 326
de Kronecker, 286
Delta de Dirac, 326
Delta de Kronecker, 286
Densidad, *671*, *694*
Derecho(a), 493
Derivación
de funciones analíticas, *272*
de funciones complejas, *189*
de funciones vectoriales, 505
de la transformada de Laplace, 328
de series, 818
de series de potencia, 240, 799
numérica, *449*
Derivada
de una función compleja, *187*, *244*, *272*
de una función vectorial, 505
desde la derecha, 33
desde la izquierda, 33
direccional, 528
Derivada direccional, 528
Derivada normal, 582
Derivada parcial, 665, *823*
Desarrollo de eigenfunciones, 286
Desarrollo ortogonal, 286
Desbordamiento, *402*
Descarga de una fuente, *383*
Descartes, 479
Descenso más pronunciado, *579*
Desde la derecha
derivada, *33*
límite, *33*
Desde la izquierda
derivada, *33*
límite, *33*
Desigualdad
de Bessel, 291, *55*
de Cauchy, *248*
de Schur, *496*
del triángulo, 465, 487, *178*
Desigualdad de Schur, *496*
Desigualdad de Schwarz, 465, 487
Desigualdad del triángulo, 465, 487, *178*
Desigualdad ML, *228*
Desviación estándar, *675*, *719*
Determinante, 415, 417, 418
característico, 433, *491*
de Cauchy, 167
de una matriz, 418
de Vandermonde, 167
Determinante característico, 433, *491*
Diagonal principal, 371, 418
Diagonal principal, 371, 418
Diagonalización, 224, 458
Diagrama de Argand, *175*
Diagrama de barras, *715*
Diagrama de frecuencias de puntos, *715*
Diagrama de Venn, *651*
Diámetro de una gráfica, *623*
Diferencial
forma, 565
operador, 103
Diferencial total, 46
Diferencial, 46, 515
Diferencias, *423*, *426*, *429*, *430*

Diferencias divididas, 422
Diferencias hacia adelante, *426*
Difusividad, 609, *107*
Difusividad térmica, 608, *107*
Dígito significativo, *401*
Dígitos aleatorios, *710*, 694, *844*
Dimensión del espacio vectorial, 400, 463
Dirichlet, 611
factor discontinuo de, *61*
problema de, 611, *113*, *369*, *393*, *545*, *548*
Dirigida
gráfica, *601*
trayectoria, *634*
Disco, *184*
Disco abierto, *184*
Disco cerrado, *184*
Disipativo, 565
Distribución
bidimensional, *693*
binomial, *680*
continua, *671*, *694*
de Bernoulli, *680*
de Gauss, *686*
de Poisson, *681*, *754*, 690, *840*
discreta, *667*, *694*
F de Fisher, *745*, 697, *847*
función de, *667*, *693*
hipergeométrica, *683*
ji cuadrada, *730*, 696, *846*
marginal, *695*
multinomial, *685*
normal, *686*, *723*, *727*, *741*, 691, *841*
t de Student, *728*, 695, *845*
uniforme, *675*, *695*
Distribución bidimensional, *693*
Distribución binomial, *680*, *691*, 689, 839
Distribución *F*, *745*, 697, *847*
Distribución hipergeométrica, *682*
Distribución multinomial, *685*
Distribución normal, *123*, *686*, *723*, *727*-*734*, *741*-*745*, 691, *841*
Distribución *t*, *728*, 695, *845*
Distribución *t* de Student, *728*, 695, *845*
Distribución uniforme, *675*, *695*
Distribuciones marginales, *695*
Divergencia
de campos vectoriales, 534, 545, 606, *382*
teorema de Gauss de la, 601
Divergente
serie, *256*
sucesión, *255*
División de números complejos, *174*
Doble etiquetado, *618*
Doble precisión, *402*
Dominio, 524, *186*, *187*, *231*
Dominio acotado, *231*

E

Ecuación bidimensional de onda, *127*
Ecuación característica, 95, 166, 433, *491*
Ecuación de Airy, 295, *106*, *542*
Ecuación de Clairaut, 61
Ecuación de Duffing, 228
Ecuación de Helmholtz, *128*, *149*
Ecuación de onda, *88*, *92*, *127*, *138*, *566*
Ecuación de Riccati, 60
Ecuación de Tricomi, *105*
Ecuación de Van der Pol, 218
Ecuación del calor, 609, *88*, *107*, *294*, *373*, *561*
Ecuación diferencial
con coeficientes constantes, 94, 165
de Airy, 295, *106*, *543*
de Bernoulli, 57
de Bessel, 260
de Cauchy-Riemann, 72, *193*, *196*
de Euler-Cauchy, 115, 135, 254
de Laguerre, 293
de Laplace, 532, 608, *145*, *196*, *546*
de Legendre, 243, *151*
de Poisson, *88*, *546*, *555*
de Sturm-Liouville, 279
de una cuerda vibrante, *92*
de una masa vibrante, 105, 136, 190, 342, 441, *50*
de una membrana vibrante, *127*, *138*
de una viga vibrante, *105*
elíptica, 66, *545*
exacta, 46
hiperbólica, *104*, *545*, *566*
hipergeométrica, 259
homogénea, 43, 54, 88, 158, *88*
lineal, 53, 83, 158, *88*
no homogénea, 54, 83, 158, *88*
no lineal, 83, 158
ordinaria, 23
parabólica, *104*, *545*, *560*
parcial, *88*
separable, 32
Ecuación diferencial elíptica, *104*, *545*
Ecuación diferencial hiperbólica, *104*, *545*, *566*
Ecuación diferencial hipergeométrica, 259

Ecuación diferencial homogénea, 43, 53, 88, 158, *88*
Ecuación diferencial no homogénea, 54, 88, 125, 158, 171, *88*
Ecuación diferencial no lineal, 88, 158
Ecuación diferencial ordinaria (*También véase* Ecuación diferencial), 23
Ecuación diferencial parabólica, *104*, *545*, *561*
Ecuación diferencial parcial, *88*
Ecuación diferencial separable, 32
Ecuación indicial, 252
Ecuación subsidiaria, 309
Ecuación unidimensional de onda, *92*
Ecuación unidimensional del calor *107*
Ecuaciones de la línea de alta frecuencia, *526*
Ecuaciones de la línea de transmisión, *154*
Ecuaciones del cable submarino, *155*
Ecuaciones del telégrafo, *155*
Ecuaciones naturales, 523
Ecuaciones normales, *488*, *767*
Edmonds, *631*
Eigenespacio (espacio propio o característico), 432
Eigenfunción (función propia o característica), 278, *95*, *130*, *141*
Eigenvalor (valor propio o característico), 188, 278, 432, *95*, *130*, *141*, *491*
problema de, 432
Eigenvector (vector característico), 188, 432, *491*
Eigenvectores (vectores propios o característicos) ortogonales, 457
Eje imaginario, *174*
Eje real, *173*
Electrostático
campo, *364*
potencial, *81*, *364*
Elemento, 416
Elemento de una matriz, 370
Elemento lineal, 73
Eliminación de errores del programa, *403*
Eliminación de la primera derivada, 272
Elipse, 509
Elipsoide, 588
Elíptico
cilindro, 588
paraboloide, 588
Enfriamiento, 36, 60
Ensayo, *649*
Entrada, 58, 136
Equipotencial
líneas de, 71, *364*
superficies de, *364*
Equivalente respecto a los renglones, 396, 403
Error, *403*
cota del, *403*
del tipo I, del tipo II, *739*
función de, *124*, 808, 663, *821*, 688, *838*
Error cuadrático total, *54*
Error cuadrático, 54
Error de construcción, *543*
Error experimental, *403*
Error por truncamiento, *403*, *525*
Error relativo, *404*
Errores de programación, *403*
Errores del programa, *403*
Errores del tipo I y del tipo II, *739*
Escalación, *464*
Escalamiento por renglones, *464*
Escalar(es), 374, 463, 478
campo, 502
función, 502
matriz, 380
multiplicación por, 374, 463
triple producto, 498
Esfera, 585
Esfera de números, *305*
Esfera de números complejos, *305*
Espacio euclidiano, 465
Espacio muestral, *650*
Espacio nulo, 408
Espacio real con producto interior, 464
Espacio renglón, 402
Espacio vectorial, 399, 452, 462
Espacio vectorial complejo, 452
Espacio vectorial real, 400, 462
Espectral
densidad, *74*
desplazamiento, 437, *492*, *515*
radio, 432
representación, *74*
teorema de la aplicación (mapeo), 438
Espectro, 432, *73*, *95*, *491*
Espectro discreto, *74*
Espectro puntual, *74*
Esperanza, *674*, *677*, *699*
Esperanza matemática, *674*, *677*, *699*
Estabilidad, 210
diagrama de, 211
Estacionario
estado, 64
flujo, 536

Estado transitorio, 64, 140
Estimación de parámetros, *722-734*
Estimación previa, *415*
Estimación puntual, *722*
Estocástica
matriz, 385
variable, *666*
Etiquetado, *612*, *618*
Euler, 115
camino de, *610*
–Cauchy, ecuación de, 115, 135, 254
–Cauchy, método de, *524*
constante de, 274
fórmula de, *202*
fórmulas de, para los coeficientes de Fourier, *28*, *35*, *133*
función beta de, 663, *821*
gráfica de, *610*
números de, *284*
Evaporación, 41, 83
Evento, *650*
Eventos mutuamente excluyentes, *650*
Exacta
diferencial, 269, 565
ecuación diferencial, 46
forma diferencial, 565
Excentricidad de un vértice, *623*
Éxito, *680*
Experimento, *649*
Experimento aleatorio, *649*
Exponencial
decremento, 28, 31, 41
crecimiento, 30
integral, 665, *823*
Extensión, periódica, *43*
Extrapolación, *419*
Extremo, *578*

F

Factor integrante, 50
Factorización LU, *466*
Falsa posición, *418*
Falla, *680*
Familia de curvas, 68
Faraday, 61
Fase de un número complejo (véase Argumento)
Fechamiento por radiocarbono, 35
Fenómeno de Gibbs, *62*
Fibonacci, *274*
Fisher, *620*, *744*, *760*
distribución F de, *744*, 697, *847*
Fluido compresible, 535
Flujo alrededor de un cilindro, *379*, *385*
Flujo de fluidos, 488, 898
Flujo paralelo, *383*
Flujo, 536, 590
integral de, 589
Flujos en redes, *624*
Forma
antihermitiana, 451
cuadrática, 451
hermitiana, 451
Forma escalonada, *394*
Forma normal de Hesse, 491
Forma polar de los números complejos, *177*
Forma trigonométrica de los números complejos, *177*
Fórmula abierta de integración, *449*
Fórmula de De Moivre, *180*
Fórmula de Duhamel, *159*
Fórmula de Hadamard, *267*
Fórmula de integración cerrada, *449*
Fórmula de integración de diferencias centrales, *448*
Fórmula de interpolación de Everett, *432*
Fórmula de Rodrigues, 248
Fórmula de Stirling, *664*, 663, *821*
Fórmula del poliedro de Euler, *641*
Fórmulas de Frenet, 523
Fórmulas de Gregory-Newton, *428*, *429*
Fórmulas de Newton-Cotes, *545*
Fórmulas de Serret-Frenet (*véase* Fórmulas de Frenet)
Fourier, *23*
–Bessel, serie de, 288, *142*
coeficientes complejos de, *48*
coeficientes de, *28*, *35*, *133*
constantes de, 286
desarrollos de medio rango de, *44*
integral compleja de, *72*
integral de, *60*, *325*
integral de cosenos de, *63*
integral de senos de, *63*
–Legendre, serie de, 288, *151*
serie compleja de *48*
serie de, 287, *29*, *35*
serie de cosenos de, *44*
serie de senos de, *44*
serie doble de, *132*
serie generalizada de, 286
transformada de, *73*, *81*, *159*
transformada de cosenos de, *66*, *79*
transformada de senos de, *66*, *79*

Fracción, de piezas defectuosas, *753*
Fracciones parciales, *338*
Frecuencia, 108, 138
de los valores en la muestra, *712*
Frecuencia natural, 138
Frecuencia relativa de clase, *716*
Frecuencia relativa, *655*, *713*
Fricción, 82
Frobenius, 249
método de, 249
norma de, *475*
teorema de, *497*
Frontera
condiciones de, 101, 278, *93*
problema con valores, 101, 278, *113*, *147*, *369*
punto, 185
Frontera irregular, *555*
Fuente, *535*, 607, *382*, *624*
Fuente puntual, *382*
Fuerza centrífuga, 517
Fuerza electromotriz, 61
Fuerza impulsora, 136
Fulkerson, *632*
Función
acotada, 79
analítica, 241, *190*
armónica, 609, *146*, *197*, *370*, *392*
armónica conjugada, *197*
beta, 663, *821*
característica, *95*, *130*
compleja, *188*
de Bessel, 262, 272, 276, 277, 284, *140*
de error, *124*, *281*, 663, *821*, 688, *838*
de Hankel, 276
de Legendre, 244
de Neumann, 274
de probabilidad, *668*, *693*
entera *198*, *248*, 832
escalar, 502
escalera, 352
escalón, 317
escalón unitario, 317
exponencial, 99, *198*, *213*, *278*
factorial, *663*, 688, *838*
gamma, 264, 662, *820*, 688, *838*
hiperbólica, *204*, *354*, 661, *819*
hiperbólica inversa, *210*
holomorfa, *190*
impar, *38*
logarítmica, 244
meromorfa, *307*
ortogonal, 279, *31*
ortonormal, 280
par, *38*
periódica, 349, *24*
racional, *191*
trigonométrica, *202*, *279*, 659, *817*
trigonométrica inversa, *210*
vectorial, 502
Función acotada, 79
Función analítica, 241, *190*
Función armónica, 610, *146*, *196*, *370*, *392*
Función armónica conjugada, *197*
Función beta, 663, *821*
Función compleja, *187*
Función compleja diferenciable, *190*
"Función con valores múltiples", *187*
Función de corriente, *378*
Función de error complementaria, 664, *822*
Función de frecuencias de la muestra, *712*
Función de probabilidad, *723*
Función de transferencia, 309
Función entera, *198*, *248*, *307*
Función escalera, 352
Función escalón, 317
Función escalón unitario, 317
Función exponencial compleja, 99, *198*, *213*, *278*
Función exponencial real, 659, *817*
Función factorial, 140, 688, *838*
Función gamma, 264, *836*, 688, *838*
Función gamma incompleta, 663, *821*
Función generadora, 248, 294
Función generadora de momentos, *679*
Función generalizada, 327
Función meroforma, *307*
Función objetivo, *38*
Función par, *38*
Función peso, 279
Función racional, *191*
Función vectorial, 502
Funciones asociadas de Legendre, 249
Funciones características, *96*, *130*
Funciones de Bessel modificadas, 277
Funciones de Hankel, 276
Funciones hiperbólicas complejas, *204*, *279*, *354*
Funciones hiperbólicas reales, 661, *819*
Funciones hipergeométricas, 259
Funciones ortogonales, 280, *31*
Funciones trigonométricas complejas, *202*, *279*, *851*
Funciones trigonométricas reales, 659, *817*

Fundamental
forma, 599
modo, *95*
sistema, 91, 159

G

Galileo, 37
Gauss, 259
distribución de, *685*
ecuación hipergeométrica de, 259
fórmula de Gauss de diferencias centrales, *448*
fórmula gaussiana de integración, *447*
–Jordan, eliminación de, 410, *470*
método de eliminación de, 390, *458*
mínimos cuadrados de, *487*, *765*
–Seidel, iteración de, *472*, *548*
teorema de la divergencia de, 601
Generado, 399
Gosset, *728*, *744*
Goursat, *231*, *831*
Gradiente, 527, 543, *378*
método del, *579*
Grado de un vértice, *600*
Grados de libertad, *728*, *730*, *745*
Gráfica, *599*
bipartita, *635*
completa, *604*
de Euler, *610*
plana, *640*
Gráfica completa, *604*
Gráfica conexa, *615*
Gráfica dirigida (digráfica), *601*
Gráfica plana, 640
Gráficas por computadora, 387
Gravitación, 504, 532, *146*
Green, 577
fórmulas de, 610, 611
teorema de, 576, 610, 611, 616

H

Hacia atrás
borde, *625*
diferencias, *428*
Heaviside, 300
fórmulas de, 339
función de, 317
Helicoide, 588
Hélice, 510, 514, 522
Henry, 61
Hermitiana, 448, 452
Hertz, 108
Hilbert, 464
espacio de, 464
matriz de, *486*
Hiperboloide, 588
Hipocicloide, 515
Hipótesis alternativa, *736*
Hipótesis nula, *737*
Hipótesis, *737*
Histograma, *716*
Holomorfa, *190*
Horarios, *640*

I

Identidad
de Lagrange, 502
transformación, *211*
Identidad de Parseval, 291, *56*
Igualdad de
matrices, 373
números complejos, *172*
vectores, 373, 478
Imagen, *210*
Imaginaria
parte, *172*
unidad, *172*
Impedancia, 148, 150
Impedancia compleja, *150*
Impulso, 325
Impulso unitario, 326
Incompresible, 536, *382*
Indefinida
integración, *238*
integral, *219*, *238*
Independencia
de la trayectoria, 562
lineal, 92, 159, 399, 463
Independientes
eventos, *657*
variables aleatorias, *697*
Inductancia, 62
Inductancia mutua, 357
Inductor, 62
Inestable, 210
Inferencia estadística *709*
Infinita
población, *684*
serie, *256*
sucesión, *254*
Infinito, *306*

Integración
  de funciones complejas, *219-252*, *311-334*
  de las transformadas de Laplace, 330
  de series de potencias, *272*
  de series, *289*
  numérica, *440-449*
Integral
  de contorno, *232*
  de Fourier, *60*, *120*, *325*
  de línea, 554, *219*
  de superficie, 589, 595
  definida, *219*
  doble, 569
  ecuación, 336
  impropia, *321*, *326*
  indefinida, *219*, *238*
  triple, 601
Integral compleja de Fourier, *72*
Integral compleja definida, *219*
Integral complementaria del seno, 665, *823*
Integral de contorno, *232*
Integral de línea compleja, *221*
Integral de línea, 554, *219*
Integral de senos, *61*, *282*, *327*, *355*
Integral de superficie, 589, 595
Integral de trabajo, 555
Integral doble, 568
Integral impropia, *321*, *326*
Integral indefinida compleja, *219*
Integral logarítmica, 665, *823*
Integral triple, 601
Integrales complementarias de Fresnel, 665, *823*
Integrales de Fresnel, *281*, 664, *822*
Intensidad de una fuente, *383*
Intercambio de variables, *586*
Interés, 31
Interés compuesto, 71
Interpolación, *419-440*
  de Lagrange, *420-423*
  de Newton, *423-430*
  inversa, *431*
  spline o segmentaria, *433-440*
Intersección de eventos, *650*
Intervalo
  abierto, 24, 668, *826*
  cerrado, 668, *826*
  de convergencia, 237
  estimado, *722*
Intervalo abierto, 25
Inversa
  de una función trigonométrica, *210*
  de una matriz, 409, 428, *470*, *477*
  función hiperbólica, *210*
  interpolación, *431*
Inversión, *741*
Inversión de matrices 410, 428, *470*, *477*
Irrotacional, 539, *381*
Isoclina, 72
Isotermas, *373*
Iteración
  de Gauss-Seidel, *472*, *548*
  de Jacobi, *476*
  de Picard, 73
  para ecuaciones, *408-418*
  para eigenvalores (valores propios o característicos), *499*
Iteración de Jacobi, *476*
Izquierdo, 494

J

Jacobiano, 573, *339*
Ji cuadrada
  distribución, *730*, 696, *846*
  prueba de, *758*
Jordan, 410

K

Karp, *632*
Kutta, *530*, *533*

L

l_1, l_2, l, *481*
Lagrange
  identidad de, 502
  interpolación de, *419*
Lanzamiento de una moneda, *654*
Laplace, 301
  ecuación de, 532, 608, *145*, *196*, *546*
  integrales de, *63*
  operador de, 532
  teorema del límite de, *691*
  transformada de, 301, *155*
Laplaciano, 532, 545, *135*
Legendre, 244
  ecuación diferencial de, 244, *151*
  funciones de, 244
  polinomios de, 247, 283, *151*, *447*
Leibniz, 36
  prueba de convergencia de, 669, 827
Lemniscata, 84

Leonardo de Pisa, *274*
Leontief, 443
Ley de
  acción de la masa, 84
  enfriamiento, 36
  la absorción, 41
  la gravitación, 504
  la media (*véase* Teorema del valor medio)
  los grandes números, *692*
Ley de Boyle-Mariotte, 42
Ley de cancelación, *155*
Ley de Hooke, 106
Ley de Lambert, 41
Ley de Malthus, 31
Ley de Ohm, *61*
Ley de Torricelli, 37
Ley logística de población, 60
Leyes de Kirchhoff, 63
Liapunov, 210
Libby, 36
LIC, *748*
Limaçon, 583
Límite
  ciclo, 217
  de una función compleja, *188*
  de una función vectorial, 505
  de una sucesión, *254*
  desde la derecha, *33*
  desde la izquierda, *33*
  punto, *833*,
  vector, 504
Límite inferior de control, *748*
Límites de las tres sigmas, *688*
Línea de corriente, *378*
Línea nodal, *131*
Línea recta, 490, 509
Lineal
  álgebra, 369-475
  combinación, 159, 399, 463
  dependencia, 92, 159, 399, 463
  ecuación diferencial, 53, 88, 157, *88*
  elemento, 513, 543
  espacio (*véase* Espacio vectorial)
  independencia, 92, 159, 399, 463
  interpolación, *419*
  optimización, *581*
  programación, *581*
  transformación, 384, 466
  transformación fraccionaria, *340-350*
Linealización, *213*
Linealmente dependiente, 92, 159, 378, 463
Líneas de fuerza, *367*
Liouville, 277
  teorema de, *248*
Lista, *602*
Lista de incidencia de vértices, *602*
Logaritmo, *206*, 212, *279*, 659, *817*
Logaritmo complejo, *206*, *212*, *279*
Logaritmo natural, *206*, 212, *279*, 659, *817*
Longitud
  de un vector, 452, 465
  de una curva, 513, 599 (Problema 36)
Longitud de arco, 513
Lote inaceptable, *754*
LSC, *748*

M

Magnitud de un vector (*véase* Longitud)
Mal acondicionada(o), *415*, *479*
Mantisa, *401*
Mapeo, 466, *210*, *335*
Mapeo biyectivo, *336*
Mapeo conforme, *336*, *369*
Mapeo inyectivo, *335*
Mapeo uno a uno, *335*
Marcapasos, 83
Mariotte, 42
Matrices semejantes, 455, *492*
Matriz
  antihermitiana, 447
  antisimétrica, 373, 443
  aumentada, 389
  banda, *551*
  cero, 374
  cuadrada, 371
  diagonal, 380
  escalar, 380
  estocástica, 385
  hermitiana, 409
  inversa, 409, 428
  no singular, 409
  nula (*véase* Matriz cero)
  ortogonal, 443
  rala, *548*
  simétrica, 373, 443
  singular, 409
  transpuesta, 372
  triangular, 380
  tridiagonal, *506*
  unidad, 380
  unitaria, 447
Matriz antisimétrica, 373, 443

Matriz aumentada, 389
Matriz banda, *551*
Matriz cero, 374
Matriz cuadrada, 371
Matriz de adyacencia, 136
Matriz de coeficientes, 389
Matriz de costos, 387
Matriz de Hessenberg, *516*
Matriz de incidencia, *604*
Matriz de incidencia de mallas, 377
Matriz de incidencia nodal, 376
Matriz de transmisión, 473
Matriz diagonal, 380
Matriz diagonalmente dominante, *465*
Matriz idempotente, 386
Matriz no singular, 409
Matriz normal, *496*
Matriz nula (*véase* Matriz cero)
Matriz ortogonal, 444
Matriz polinómica, *493*
Matriz simétrica, 372, 443
Matriz triangular, 380
Matriz triangular inferior, 380
Matriz tridiagonal, *506*, *551*
Matriz unitaria, 380, 447
Máximo, *578*
Mediana, *721*, *762*
Membrana, *124-134*, *138-144*
Membrana cuadrada, *131*
Membrana elástica, *81*, *125*
Membrana rectangular, *127*
Menor, 418
Método
de bisección, *418*
de diagonalización, 224
de Euler-Cauchy, *524*
de falsa posición, *418*
de Frobenius, 250
de integración numérica, *440-448*
de iteración (*véase* Iteración)
de los coeficientes indeterminados, 129, 173, 220
de mínimos cuadrados, *487*, *765*
de momentos, *722*
de Runge-Kutta, *530*, *541*
de series de potencias, 232
de variación de parámetros, 132, 176, 222
del descenso más pronunciado, *579*
Método ADI, *551*
Método de Adams-Bashford, *535*
Método de Adams-Moulton, *536*
Método de Bashford, *535*
Método de bisección, *418*
Método de Crank-Nicolson, *562*
Método de Crout, *467*
Método de Cholesky, *469*
Método de deflación de Wielandt, *503*
Método de Doolittle, *467*
Método de factorización QR, *510*
Método de Heun, *526*
Método de las series de potencias, 232
Método de Liebmann, *549*
Método de máxima probabilidad, *722*
Método de Nyström, *541*
Método de pasos múltiples, *534*
Método de Peaceman-Rachford, *551*
Método de potencias, *208*
Método de Rachford, *551*
Método de Runge-Kutta, *530*, *541*
Método de un paso, *534*
Método directo, *472*
Método indirecto, *472*
Método paso a paso, *524*
Método simplex, *586*
Métodos numéricos *397-574*
de derivación, *449*
de ecuaciones, *407-419*
de ecuaciones diferenciales ordinarias, *523-545*
de ecuaciones diferenciales parciales, *545-569*
de ecuaciones lineales, *457-486*
de integración, *440-449*
de interpolación, *419-440*
de inversión de matrices, 410, *471*, *477*
de optimización, *575-645*
para eigenvalores (valores propios o característicos), *490-516*
Métodos numéricos para ecuaciones diferenciales, *523-574*
Mínimo, *578*
Mínimo local, *578*
Mínimos cuadrados, *487*, *765*
Möbius, 592
cinta de, 592
transformación de, 340
Modelado, 21, 27, 61, 105, 136, 143, *90*, *124*
Modelo de Leslie, 440
Modelos de poblaciones, 30, 76, 440
Modo, *95*, *141*, *721*
Modo normal, *96*, *141*
Módulo, *177*
Momento polar de inercia, 572
Momento

de inercia, 572, 576, 596
de una distribución, *677*
de una fuerza, 497
de una muestra, *722*
Momento vectorial, 497
Moulton, *536*
Muestra, *708*
covariancia de la, *767*
desviación estándar de la, *719*
función de distribución de la, *714*
función de frecuencia acumulada de la, *714*
función de frecuencias de la, *713*
media de la, *719*
momentos de la, *722*
punto de la, *650*
rango de la, *721*
valores de una, *712*
variancia de la, *719*
Muestra aleatoria, *708*
Muestreo, *710*
con reemplazo, *659*, *682*
plan de, *753*
sin reemplazo, *659*, *682*
Muestreo de aceptación, *753*
Múltiplemente conexo, *231*
Multiplicación de
determinantes, 430
matrices, 377
medias, *699*
números complejos, 172, 179
series de potencias, *271*
vectores, 377, 381, 486, 493
Multiplicación de matrices, 377
Multiplicidad, 436

N

Nabla, 527
NCA, *754*
NCR, *754*
Neumann
funciones de, 274
problema de, *113*, *119*, *545*, 555
Newton, 36
fórmulas de interpolación de, *424*, *427*, *429*
ley de enfriamiento de, 36, 60
ley de la gravitación de, 504
método de, *411*
–Raphson, método de, *411*
segunda ley de, 39, 107
Neyman, *726*, *735*
Nicolson, *562*
Nivel
curva de, 508
superficie de, 508
Nivel de calidad aceptable, *754*
Nivel de calidad rechazable, *754*
Nivel de significancia, *737*
No conservativa, 565
Nodo, 200, *96*, *419*
Norma, 279, 452, 465, 472, *475*, *480*
Norma de un vector, *480*
Norma euclidiana, 465, 479, *481*
Norma suma de las columnas, *475*
Norma suma de los renglones, *475*
Norma(s) matricial(es), *475*, *482*
Normal a un plano, 490
Normal a una curva, 521
Normal a una superficie, 529, 586
Normal principal, 522
Nulidad, 408
Número complejo, *171*
Número cromático, *640*
Número de condición, *483*
Número imaginario puro, *172*
Número permisible de defectos, *752*
Números aleatorios, *709*
Números complejos conjugados, *175*

O

O, *463*, *609*
Observación aleatoria, *649*
Onda cuadrada, 350, *36*, *57*
Onda diente de sierra, 352, *41*, *56*
Operaciones elementales, 395
Operaciones en los renglones, 395
Operador, 103, 466
Optimización, *575-644*
Optimización combinatoria, *599*
Optimización no restringida, *578*
Orden, *462*, *607*
de un determinante, *417*
de un proceso de iteración, *714*
de una ecuación diferencial, 25, 87
Orientación de una curva, 508
Origen de trabajo
Ortonormal, 280, 490
Oscilación armónica, 108
Oscilaciones
amortiguadas, 109, 140
armónicas, 107
autosostenidas, 217
de un resorte, *90*

de una masa en un resorte, 105, 136, 190
de una viga, *106*
en circuitos, 64, 146
forzadas, 136, 335, 343, *50*, *100*
libres, 105
no amortiguadas, 106, 138
Oscilaciones autosostenidas, 217
Oscilaciones forzadas, 136, 335, 342, 343, *50*, *100*
Oscilaciones libres, 105, 191, 314

P

Parábola semicúbica, 515
Paraboloide, 588
Paraboliode hiperbólico, 588
Paracaidista, 39
Paralelepípedo, 499
Paralelogramo
igualdad del, 465, *184*
ley del, 482
Parámetro de una distribución, 722
Parte principal, *302*
Parte real, *172*
Pascal, 583
PBA, *607*
PBP, *607*
Pearson, E. S., *735*
Pearson, K., *744*
Péndulo, 114, 214
Percentil, *721*
Periódica
extensión, *43*
función, 349, *24*
Periodo, *24*
Periodo primitivo, 24
Permutación, *661*
Picard, 73
método de iteración de, 73
teorema de, *304*
Piel de tambor ("parche"), *124*, *138*
Pivote, 392, *459*
Pivoteo parcial, 392, *459*
Pivoteo total, 392, *459*
Plan de muestreo doble, *756*
Plan de muestreo sencillo, *753*
Plano, 431, 490
Plano complejo, *174*
Plano complejo extendido, *306*, *343*, *832*
Plano complejo finito, 306
Plano fase, 199, 208
Plano normal, 521 (Figura 186)
Plano osculador, 521 (Figura 186)
Plano rectificador (Figura 186), 521
Plano tangente, 530, 586
Población, *708*
Poder de una prueba, *741*
Poisson, *386*
distribución de, *681*, *754*, 690, *840*
ecuación de, *88*, *546*, *555*
fórmula de la integral de, *386*
Polígono de frecuencias, *716*
Polinómicamente acotado *609*
Polinomio trigonométrico, *53*
Polinomios, *191*
de Chebyshev, 292
de Hermite, 293
de Laguerre, 293, 332
de Legendre, 247, 283, *151*, *447*
trigonométricos, *53*
Polinomios característicos, 433, *491*
Polinomios de Chebyshev, 292
Polinomios de Hermite, 293
Polinomios de Laguerre, 293, 332
Polo, *302*
Porcentaje de tolerancia de defectuosos del lote, *754*
Positiva definida, 452, 464, 487, *469*
Postmultiplicación, 379
Potencial, 531, *146*, *364*
complejo, *367*, *368*
teoría del, 563, 609, *196*
Potencial complejo, *367*, *368*
Potencial del calor, *373*
Potencias generalizadas, *208*
Precisión sencilla, *402*
Predictor-corrector, *526*
Preespacio de Hilbert, 464
Premultiplicación, 379
Primer teorema de traslación, 314
Primera búsqueda de amplitud, *607*
Primera búsqueda de profundidad, *607*
Primera forma fundamental, 599
Primera fórmula de Green, 610
Principio de Arquímedes, 154
Principio de optimalidad de Bellman, *611*
Principio de superposición, 89, 158, 197
Principio del máximo, *392*
Probabilidad, *653*, *656*
condicional, *657*
densidad de, *671*, *694*
distribución de, *667*
función de, *668*, *694*
Probabilidad condicional, *657*
Problema con datos trasladados, 310

Problema con valor inicial, 28, 77, 92, 160, 196, *523*, *527*
Problema de asignación, 387, *635*
Problema de mezcla, 55, 208, 227
Problema de persecución, 76
Problema de Sturm-Liouville, 277, 278
Problema del agente viajero, *607*
Problema del cartero chino, *611*
Problema del cartero, *611*
Problema del cumpleaños, *666* (Problema 14)
Problema mixto con valor en la frontera, *113*, *147*, *375*, *545*
Problema singular de Sturm-Liouville, 281
Proceso adiabático, *117*
Proceso de Markov, 385, 439
Producto (*véase* Multiplicación)
Producto cruz, 493
Producto interior, 381, 452, 486
Producto punto, 381, 486
Producto triple mixto, 498
Producto vectorial, 493
Promedio (*véase* Valor medio)
Proyección de un vector, 489
Proyección estereográfica, *306*
Prueba, *735*
de hipótesis, *735*
de ji cuadrada, *758*
no paramétrica, 761
para la convergencia, *257-262*
Prueba bilateral, *738*
Prueba de comparación, *258*
Prueba de la raíz, *261*
Prueba de la razón, 787
Prueba del signo, *762*
Prueba *M*, 292
Prueba no paramétrica, *761*
Prueba unilateral, *738*
Pruebas sin distribución, *761*
PTDL, *754*
Puente de Wheatstone, 397
Pulsaciones, 140
Pulso rectangular, *40*
Punto crítico, 208, *336*
Punto de bifurcación, *357*
Punto de estancamiento, *380*
Punto decimal fijo, *401*
Punto en el infinito, *706*
Punto espiral, 203
Punto estacionario, *578*
Punto fijo, *344*, *409*
Punto flotante, *401*
Punto múltiple, 510
Punto regular, 250
Punto silla, 200
Punto singular regular, 251

R

Radiación, 27, *118*
Radio
de convergencia, 237, *265*
de una gráfica, *623*
Raíz, *181*
Raíz cuadrada, *182*
Raíz latente, 432
Rala(o)
gráfica, *602*
matriz, *548*
sistema de ecuaciones, *472*
Rango de una
función, *188*
muestra, *721*, *751*
Rango de una matriz, 400, 425
Rango intercuartil, *721*
Raphson, *411*
Rayleigh, *499*
ecuación de, 228
cociente de, *499*
Reactancia, 145
Recorrido, 137
Recorte, *402*
Rectificación de un lote, *755*
Rectificador, 351, 353, *37*
Rectificador de media onda, 351, 353, *37*
Rectificador de onda completa, 353
Rechazo, *737*
Red de cuatro terminales, 472
Red eléctrica (*véase* Redes)
Redes, 191, 208, 276, 364, 376, 390, 397, 473
en teoría de gráficas, *624*
Redondeo, *402*
Reducción de orden, 123
Región, *186*
Región acotada, 569
Región cerrada, 569
Región crítica, *737*
Regla de aditividad, *657*
Regla de complementación, *656*
Regla de Cramer, 416, 417, 426
Regla de la cadena, 524
Regla de la multiplicación de eventos, *658*
Regla de oro, 51
Regla de Simpson, *445*

Regla rectangular, *441*
Regla trapezoidal, *441*
Regresión, *765*
coeficiente de, *766*
recta de, *766*
Regula falsi, *418*
Relación con un sólo valor, *187*
Relación de equivalencia, 398
Renglón, 371, 418
Representación, 467, *32*
Representación paramétrica, 509, *585*
Residual, *415*, *480*
Residuo, *256*, *312*
Resistencia, 61
Resonancia, 138, 304
Resorte, 106, 114
Resorte duro, 228
Resorte plano, 113
Resorte suave, 197
Respuesta, 58, 136
Resto, 236, *256*
Restricciones, *578*, *581*
Resultado, *650*
Resultante de fuerzas, 482
Riemann, *193*
esfera de números de, *193*
superficie de, *387*
Riesgo, *754*
Riesgo del consumidor, *754*
Riesgo del productor, *754*
Rotación, 391, 498, 538, 864
Rotacional, 538, 546, 613, 617

S

Salida, 58, 136
Schrödiner, 327
Schwartz, 327
Secante, *201*, 661, *819*
método de la, *416*
Seccionalmente continua (*véase* Continua por secciones)
Secciones cónicas, 460
Segmento rectilíneo dirigido, 478
Seguimiento, *403*
Segunda fórmula de Green, 610
Segundo teorema de traslación, 318
Seidel, *292*, *472*, *548*
Semiplano, *185*
Seno
de una variable compleja, *202*, *279*, *350*
de una variable real, 659, *817*
hiperbólico, *204*, *279*, *355*
Separación de variables, 32, *92*
Serie armónica, *257*
Serie compleja, *308*
Serie compleja de Fourier, *48*
Serie de Fourier de medio rango, *44*
Serie de Laurent, *295*, *311*
Serie de Maclaurin, *276*
Serie doble de Fourier, *132*
Serie generalizada de Fourier, 286
Serie geométrica, 238, *258*, *278*, *286*
Serie(s), *256*
adición de, *271*
armónica, *257*
binomial, *282*
convergencia de, 237, *256*
de eigenfunciones (funciones propias), 285
de Fourier, 287, 288, *34*
de funciones ortogonales, 285
de las funciones de Bessel, 288, *142*
de Laurent, *295*, *312*
de Maclaurin, *276*
de potencias, 236, *264*
de Taylor, *276*
derivación de, *271*, *291*
doble de Fourier, *132*
geométrica, *238*, *258*, *278*, *286*
hipergeométrica, 259
infinita, *256*, 669, *827*
integración de, *271*, *290*
multiplicación de, *271*
real, 669, *827*
residuo de, *256*
suma de, *256*
sumas parciales de, *256*
trigonométricas, *25*
valor de una, *256*
Series de potencias, 236, 791
Series hipergeométricas, 259
Series trigonométricas, *25*
Sesgo, *678*
Significancia en estadística, *736*
Simple
cero, *305*
curva, 511
gráfica, *601*
polo, *302*
Simplemente conexo, 565, *231*
Simultáneas
correcciones, *476*
ecuaciones diferenciales, 183

ecuaciones lineales, (*véase* Sistemas lineales)
Singular
matriz, 409
punto, 250, *278*, *302*
solución, 26, 92
Singular en el infinito, *306*
Singularidad, *278*, *302*
Singularidad aislada, *302*
Singularidad esencial, *302*
Singularidad removible, *304*
Sintonización, 147, *96*
Sistema de
ecuaciones diferenciales, 183, 347
ecuaciones lineales (*véase* Sistema lineal)
unidades: Portada
Sistema autónomo, 213
Sistema cgs: Primera de forros
Sistema de ecuaciones lineales, 388, *457*
Sistema de ingeniería: Portada
Sistema homogéneo de ecuaciones, 388, 407
Sistema indeterminado, 392
Sistema mks: Portada
Sistema no amortiguado, 107, 137
Sistema no homogéneo de ecuaciones, 407
Sistema SI: Portada
Sistema sobredeterminado, 392
Sistema trigonométrico, *25*
Sistema unitario de vectores, 453
Sistemas lineales equivalentes, 396
Sistemas masa-resorte, 105, 136, 190, 342, 441, *50*
Sobolev, 327
Sobreamortiguamiento, 109
Sobretono, *96*
Solución
de estado estacionario, 64
de un sistema de ecuaciones diferenciales, 196
de una ecuación diferencial, 26, 88, 158, *88*
general, 26, 91, 126, 159
particular, 26, 91, 126, 159
singular, 27, 92
Solución aproximada de
ecuaciones, *408-497*
ecuaciones diferenciales, 72-75, *523-574*
problemas de eigenvalor (valor característico), *597-622*
Solución de D'Alembert, *102*
Solución de estado estacionario, 140
Solución explícita, 26
Solución factible, *583*
Solución factible básica, *583*
Solución factible degenerada, *591*
Solución general, 27, 91, 126, 158, 197
Solución implícita, 25
Solución óptima, *584*
Solución particular, 26, 91, 128, 158
Solución trivial, 59, 408
Spline, *433*
Splines cúbicos, *433*
Suave por secciones, 554, 587, *221-222*
Subamortiguamiento, 110
Subdesbordamiento, *402*
Subespacio, 404
Subespacio vectorial, 404
Subgráfica, *601*
Submatriz, 371
Sucesión, *254*, 668, *826*
Sucesión compleja, *306*
Sucesión creciente, 667, *825*
Sucesión decreciente, 668, *826*
Sucesión monótona, 668, *826*
Suma (*véase* Adición)
Suma de una serie, 236, *256*
Suma parcial, 236, 784
Sumidero, 535, 607, *382*, *624*
Superficie, 584
Superficie aerodinámica de Joukowski, *360*
Superficie aerodinámica, *360*
Superficie no orientable, 592
Superficie orientable, 592
Superficie suave, 587
Suprayectiva, *336*

T

Tabla de diferencias, *424*
Tablas
de funciones, 687, *837*, 688, *838*
de transformadas de Fourier, *79-81*
de transformadas de Laplace, 359-361
estadísticas, 689-701, *737-849*
Tablas estadísticas (*véase* Tablas)
Tamaño de una muestra, *711*
Tangente, *202*, *353*, 661, *819*
a una curva, 510, 522
hiperbólica, *204*, 661, *817*
Tarjan, *620*
Taylor, *276*

fórmula de, *276*
serie de, *276*
Tchebichef (*véase* Chebyshev)
Tendencia, *762*
Teorema de Bolzano-Weierstrass, *834*
Teorema de Collatz, *497*
Teorema de existencia
de la integral de Fourier, *60*
de la serie de Fourier, *32*
de las ecuaciones diferenciales, 78, 119, 160, 196
de las transformadas de Laplace, *305*
Teorema de flujo máximo-corte mínimo, *629*
Teorema de Gerschgorin, *494*, *495*
Teorema de Guldin, 600
Teorema de identidad para series de potencias, *270*
Teorema de König, *641*
Teorema de los cuatro colores, *641*
Teorema de los ejes principales, 460
Teorema de Morera, *247*
Teorema de Pappus, 600
Teorema de Perron-Frobenius, 443, *497*
Teorema de Steiner, 599
Teorema de Stokes, 613
Teorema de valor medio, 526, 570, 607
Teorema de Vizing, *641*
Teorema del binomio, *666*
Teorema del flujo entero, *634*
Teorema del límite central, *734*
Teorema del módulo máximo, *391*
Teorema del residuo, *317*
Teorema del valor intermedio, *418*
Teorema fundamental del álgebra, *249*
Teoremas de integración
compleja, *232*, *240*
real, 576, 601, 613
Teoremas de traslación, 315, 317, 318
Término a término
derivación, *291*
integración, *289*
multiplicación, *272*
Tetraedro, 499
Tiempo de vida media, 31, 83
Tipo de una ecuación diferencial, *104*
Toro, 596
Torsión de una curva, 522
Trabajo, 488, 558, 617
Tráctrix, 76
Transformación, 466
de componentes vectoriales, 540, 680
de coordenadas cartesianas, 682
de integrales, 573, 576, 601, 613
lineal, 383, 466
ortogonal, 444
por una función compleja, *210*, *335*
unitaria, 452
Transformación de coordenadas, 540, 681
Transformación de integrales, *66*
Transformación fraccionaria lineal, *340-350*
Transformación ortogonal, 444
Transformación unitaria, 452
Transposiciones, *762*
Transpuesta de una matriz, 372
Traslación, 478, *210*, *340*
Trayectoria, 208
de integración, 553, *219*
en una digráfica, *625*
en una gráfica, *605*
Trayectoria de aumento de flujo, *626*
Trayectoria de aumento, *626*, *636*
teorema de la *628*, *636*
Trayectoria más corta, *605*
Trayectoria más larga, 138
Trayectorias, 67, 199
Trayectorias isogonales, 72
Trayectorias ortogonales, 67
Traza de una matriz, 437, *491*
Tridiagonalización, *506*
Tridiagonalización de Householder, *506*
Triedro, 521
Triedro móvil, (*véase* Triedro)

U

Una estimación *a priori*, *415*
Unicidad
de las series de Laurent, *298*
de las series de potencias, *271*
del problema de Dirichlet, *393*
en las ecuaciones diferenciales, 79, 120, 160, 195
en las ecuaciones lineales, 405, 426
Unión de eventos, *650*

V

Valor absoluto, *177*
Valor característico, 432, *96*, *130*, *491*
Valor de una serie, 237, *256*
Valor medio de una
distribución, *674*
función, *381*
función analítica, *390*

función armónica, *392*
muestra, *719*
Valor principal, *178*, *206*, *321*, *327*
Valores posibles, *667*
Vandermonde, 167
Variable
aleatoria, *666*, *693*
compleja, *187*
estandarizada, *676*
estocástica, *666*
Variable aleatoria, *666*, *693*
Variable aleatoria bidimensional, *693*
Variable aleatoria discreta, *667*, *694*
Variable aleatoria estandarizada, *676*
Variable aleatoria normal, *686*
Variable artificial, *593*
Variable compleja, *187*
Variable de holgura, *582*
Variables aleatorias dependientes, *698*
Variables básicas, *586*
Variables de la derecha, *586*
Variables no básicas, *586*
Variación de parámetros, 132, 176, 222
Variancia de una
distribución, *674*, *700*
muestra, *719*
Vecindad, 505, *185*
Vector, 371, 372, 462, 478
Vector binormal unitario, 521
Vector característico, 432, *491*
Vector cero, 480
Vector de momento, 497
Vector de posición, 480
Vector normal, 490, 586
Vector normal unitario principal, 521
Vector normal unitario, 587
Vector nulo (*véase* Vector cero)
Vector renglón, 371, 372
Vector solución, 388
Vector tangente, 511
Vector tangente unitario, 511
Vector unitario, 465, 479
Vectores ortogonales, 465
Velocidad, 498, 516, 517
Velocidad angular, 498, 517
Velocidad(es)
campo de, 503
potencial de, *378*
vector, 516, *378*
Verhulst, 76
Vértice, *599*
expuesto, *635*
Vértice expuesto, *635*
Vértices adyacentes, *600*
Vibraciones (*véase* Oscilaciones)
Vibraciones torsionales, 114
Viga, *105*
Volta, 62
Volterra, 274
Volumen, 571
Vórtice, *384*
Vorticidad, *381*

W

Weber, 294
ecuación de, 294
funciones de, 275
Weierstrass, *192*, *834*
prueba *M* de, *292*
Wessel, *175*
Wronskiano, 120, 161, 197

LA EDICIÓN, COMPOSICIÓN, DISEÑO E IMPRESIÓN DE ESTA OBRA FUERON REALIZADOS BAJO LA SUPERVISIÓN DE GRUPO NORIEGA EDITORES.
BALDERAS 95, COL. CENTRO. MÉXICO, D.F. C.P. 06040
2195370000201657DP9200IE

Algunas constantes

$$e = 2.71828\ 18284\ 59045\ 23536$$
$$\sqrt{e} = 1.64872\ 12707\ 00128\ 14685$$
$$e^2 = 7.38905\ 60989\ 30650\ 22723$$

$$\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846$$
$$\pi^2 = 9.86960\ 44010\ 89358\ 61883$$
$$\sqrt{\pi} = 1.77245\ 38509\ 05516\ 02730$$

$$\log_{10} \pi = 0.49714\ 98726\ 94133\ 85435$$
$$\ln \pi = 1.14472\ 98858\ 49400\ 17414$$
$$\log_{10} e = 0.43429\ 44819\ 03251\ 82765$$
$$\ln 10 = 2.30258\ 50929\ 94045\ 68402$$

$$\sqrt{2} = 1.41421\ 35623\ 73095\ 04880$$
$$\sqrt[3]{2} = 1.25992\ 10498\ 94873\ 16477$$
$$\sqrt{3} = 1.73205\ 08075\ 68877\ 29353$$
$$\sqrt[3]{3} = 1.44224\ 95703\ 07408\ 38232$$
$$\ln 2 = 0.69314\ 71805\ 59945\ 30942$$
$$\ln 3 = 1.09861\ 22886\ 68109\ 69140$$

$$\gamma = 0.57721\ 56649\ 01532\ 86061$$
$$\ln \gamma = -0.54953\ 93129\ 81644\ 82234$$
(see Sec. 5.7)
$$1^\circ = 0.01745\ 32925\ 19943\ 29577 \text{ rad}$$
$$1 \text{ rad} = 57.29577\ 95130\ 82320\ 87680^\circ = 57^\circ 17' 44.806''$$

Coordenadas polares

$$x = r\cos\theta \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \theta = \arctan\frac{y}{x}$$
$$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

Series

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m \quad (|x| < 1)$$
$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$$
$$\mathrm{sen}\,x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$
$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}$$
$$\ln(1-x) = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m} \quad (|x| < 1)$$
$$\arctan x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2m+1} \quad (|x| < 1)$$

Alfabeto griego

α	Alpha	ν	Nu
β	Beta	ξ	Xi
γ, Γ	Gamma	o	Omicron
δ, Δ	Delta	π	Pi
ϵ	Epsilon	ρ	Rho
ζ	Zeta	σ, Σ	Sigma
η	Eta	τ	Tau
$\theta, \vartheta, \Theta$	Theta	υ, Υ	Upsilon
ι	Iota	ϕ, φ, Φ	Phi
κ	Kappa	χ	Chi
λ, Λ	Lambda	ψ, Ψ	Psi
μ	Mu	ω, Ω	Omega

Vectores

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$
$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$
$$\mathrm{grad}\, f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$
$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = \nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$
$$\mathrm{Rot}\,\mathbf{v} = \nabla\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$